周春荔主编　奥林匹克数学普及讲座丛书(之三)

# 初中数学竞赛中的数论初步

彭林　李贤军　周春荔编著

中国物资出版社

**图书在版编目(CIP)数据**

初中数学竞赛中的数论初步/彭林等编著. —北京：中国物资出版社，2004.8

(奥林匹克数学普及讲座丛书：3)

ISBN 7－5047－2201－4

Ⅰ.初…　Ⅱ.周…　Ⅲ.代数课—初中—教学参考资料
Ⅳ.G634.663

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 070196 号

责任编辑　黑俊青
责任印制　方鹏远
责任校对　王　莉

中国物资出版社出版发行
网址：http://www.chph.cn
社址：北京市西城区月坛北街 25 号
电话：(010)68589540　邮编：100834
全国新华书店经销
北京才智印刷厂印刷

开本：850×1168mm　1/32　印张：7.375　字数：158 千字
2004 年 8 月第 1 版　2004 年 8 月第 1 次印刷
书号：ISBN 7－5047－2201－4/G・0461
印数：0001—8000 册
定价：12.00 元

(图书出现印装质量问题，本社负责调换)

# 内 容 提 要

本册内容是对初中学生整数知识的自然延拓与扩充，内容包括整数与整除、整除知识的深化、余数问题、不定方程初步。通过对初中数学竞赛的整数问题的分类讲解与练习，夯实基础知识、发展逻辑思维能力，领悟数学思想，培养创新意识。内容由浅入深，按知识系统讲解逐步提高。适于自学初等数论的初步知识，各章配有精选的练习题和解答，供练习选用。既可做学生学习奥林匹数学的教材，又可做培训教练员的参考书。

# 序 言

2002 年暑期，在从西安返京的列车上，遇到了中国物资出版社的副编审黑俊贵女士。我们谈到了数学奥林匹克，她很感兴趣。诚挚地写本数学奥林匹克的书在该社出版，为数学爱好者提供一份"营养套餐"。

回到北京，写书的事一直没有排上日程。后来，经过一催再促，才抽空草拟了个编写提纲。直到 2003 年春，才着手本套书的写作。

专门以十几岁的中学生为对象的现代意义下的数学竞赛，人们公认为起源于匈牙利。匈牙利的数学竞赛自 1894 年起至今已有百余年历史，每次竞赛出 3 道题，限 4 小时完成，允许使用参考书。试题别具风格，常常有高等数学背景，却用初等数学知识就可以解答。

匈牙利的数学竞赛造就了一批数学大师或科学巨匠。被称为匈牙利现代数学之父的费叶尔(1880—59)，著名力学家，现代航天事业的奠基人冯·卡门(1881—33)，著名的组合数学家寇尼希(1884—44)，群上测度与积分论的创始人哈尔(1885—1933)，泛函分析的奠基者之一黎斯(1880—1956)，著名分析学家舍贵(1895—)，拉多(1895—1965)等，都是早期的数学竞赛优胜者。这些事例表明，数学竞赛是发现和造就人才的一个重要途径。

1934 年苏联列宁格勒大学主办了中学生数学奥林匹克，首次把数学考试与"奥林匹克"联系起来；1935 年又由莫斯科大学主办

了中学生数学奥林匹克,受到广大师生的热烈欢迎。以后不少苏联的加盟共和国也相继举办数学奥林匹克。1961 年开始举办全俄数学奥林匹克,1967 年举办全苏数学奥林匹克。人们发现,前苏联基础教育阶段的高水平的数学教育与数学奥林匹克存在着一定的联系。20 世纪中叶,世界出现了一个举办中学生数学竞赛的热潮。这个世界性的中学生数学奥林匹克热潮与新数学运动大体同时起步,但新数运动早已偃旗息鼓,而数学竞赛则正如火如荼。

世界各国的中学生数学竞赛活动的开展为国际数学奥林匹克(International Mathematical Olympiad)的产生创造了条件,而国际数学奥林匹克(IMO)的产生与发展又推动了各地区、各国数学竞赛的发展。第一届国际数学奥林匹克(IMO)于 1959 年 7 月在罗马尼亚古都布拉索(位于布加勒斯特西北约 200 公里)拉开帷幕,这是数学竞赛跨越国界的创举。至今除 1980 年因故未举办外,到 2003 年已经举办了 44 届。1990 年在北京举办第 31 届 IMO 时,已发展到 54 个国家或地区(308 人),此后又逐年陆续增加到 80 多个队,约 500 人的规模。如今 IMO 已经成为国际上一项最有影响的学科竞赛,同时也是公认的水平最高的中学生数学竞赛。

1980 年国际数学教育委员会决定成立 IMO 分委员会(1981 年正式成立),负责安排每年活动的组织者。从第 22 届 IMO 开始,IMO 更走向成熟。IMO 的运作已经制度化、规范化,选手的水平也大大提高。随着数学竞赛的发展,已逐渐形成一门特殊的数学学科——竞赛数学。数学奥林匹克的兴旺发展,影响了其他学科竞赛的发展,如物理、化学、生物、信息等国际奥林匹克相继兴起,国际学科竞赛已经成为一股促进学科教育发展的世界性潮流。

在 2002 年世界数学家大会期间及会后,不少人提出了一个十分有意思的话题:参加过历届国际数学奥林匹克的选手中有没有人拿到过菲尔兹奖?巧得很,2002 年 7 月国际数学奥林匹克(香港)委员会主席岑嘉评教授为此专门撰文,我们仅摘录了 IMO 的优胜者后来获得菲尔兹奖的人的名字。

| 姓　名 | 国　籍 | 参加 IMO 时间 | 获奖时间 |
| --- | --- | --- | --- |
| Gregory　Margulis | 俄罗斯 | 1959 年银牌 | 1978 年菲尔兹奖 |
| Valdimir　Drinfeld | 乌克兰 | 1969 年金牌 | 1990 年菲尔兹奖 |
| Jean - Ghristoophe　Yoccoz | 法国 | 1974 年金牌 | 1994 年菲尔兹奖 |
| Richard　Borcherds | 英国 | 1977 年金牌 1978 年银牌 | 1998 年菲尔兹奖 |
| Timothy　Gowers | 英国 | 1981 年金牌 | 1998 年菲尔兹奖 |
| Laurant　Lafforgue | 法国 | 1985 年金牌 | 2002 年菲尔兹奖 |

我国的中学生数学竞赛活动是与 20 世界 50 年代向苏联学习分不开的。

1946 年华罗庚应邀访苏三个月，看到苏联大学中有很多学生学数学，例如，格鲁吉亚的一个大学的 2000 多学生中就有 600 多个学生学数学。华罗庚问："你们这么多数学学生，将来毕业后，有些什么出路呢?"友人答的很妙："头脑受过数学训练的人，你担心他们会没有出路吗?"大数学家维诺格拉朵夫也说："数学是科学之母，一个国家如果数学不发达，其他都谈不上。"华罗庚听了柯尔幕哥洛夫与阿历山德罗夫为参赛中学师生的两次讲演。这样两位著名数学家，利用星期天休假给十五六岁的学生作讲演，那种诲人不倦，传播数学给一般人民的精神使华罗庚深受感动。除教室中席无虚座外，窗口上也挤满了人，其间还有白发苍苍的老年中学教师，他们是专程来听这些著名学者的讲演而求进步的。这些在华罗庚心中"埋藏了在中国倡办数学竞赛活动及数学普及活动的种子。"

1956 年，在华罗庚、苏步青、江泽涵等我国老一辈数学家的倡导下，由中国数学理事会发起，经高等教育部和教育部同意，我国举行了首次中学生数学竞赛，这次只在北京、天津、上海、武汉试办。待取得经验后，再逐步推广。据不完全统计，除 1959 年、1961 年中断外，1964 年前每年都有一些城市举办数学竞赛。这一时期，我国数学竞赛的势头良好，竞赛方式，试题难度，选手水平都与国

际持平。从1965年起到1977年,我国的数学竞赛因文革而中断了13年。这一时期的数学竞赛优胜者在文革后不少显露头角,正如王元院士在《数学竞赛之我见》中指出的:“要用事实说明数学竞赛活动的成就。例如,仅仅‘文革’前的几次低层次数学竞赛中,已有一些竞赛优胜者成才了。如上海的汪嘉冈、陈志华,北京的唐守文、石赫,他们现在已经是国内的著名中年数学家,有的已获博士导师资格。他们在文革中都被耽误了10年,否则完全会有更大成就。”

中国数学竞赛的国内成熟期是在1978年以后。1978年粉碎了四人帮后迎来了科学的春天,4月中旬,国务院批准全国举办数学竞赛,组织北京、上海、天津、陕西、安徽、四川、辽宁、广东8省市举办中学生数学竞赛,由方毅副总理任竞赛委员会主任,由中科院副院长中国数学会理事长华罗庚教授任竞赛委员会副主任,4月25日召开了竞赛委员会第一次会议,确定了命题原则、竞赛方法、和推荐优秀学生免试进入大学的办法。全国有20万在校生参加。参加决赛的青少年,年龄最大的19岁,最小的14岁。多数是高中生,但也有少数的初中生。除上述8个省市之外,1978年福建省,福州市,山西省等也组织了数学竞赛。

邓小平同志肯定了这次竞赛,方毅同志批示说:“这是发现人才,出人才的好方法之一,今后拟继续坚持下去。”由于1979年全国出现了竞赛过热形势,1980年全国停办数学竞赛。教育部和各省的教育行政部门不再组办数学竞赛,我国的中学生数学竞赛转为民办。1981年由中国数学会普及工作委员会,北京数学会发起全国高中数学联合竞赛,25个省市参加,1982年由上海组办,28省市参加。以后各省市轮流组办,由中国数学会普及工作委员会进行调节,至今都采取这个模式。1984年开始,举办全国初中数学联赛,也是采取上述模式。从1991年开始,中国数学会普及工作委员会举办小学生数学奥林匹克。

敬爱的华罗庚教授于1985年6月12日在出访日本讲学时因

心脏病突发而逝世,享年75岁。为了弘扬华罗庚教授的爱国主义精神,学习华老勤奋学习、献身科学的优秀品质,激发广大中小学生学习数学的兴趣,开发智力,普及数学科学,于1986年由中国少年报社、中国优选法统筹法与经济数学研究会、中国数学会、中央电视台、中国科协青少部共同举办了首届“华罗庚金杯”少年数学邀请赛。当时的胡耀邦总书记亲为“华罗庚金杯”题字。参赛学生是小学高年级和初一学生,每两年举办一届。自2003年第9届起,改为每年一届。

自1990年开始,“双法”学会数学教育委员会举办“希望杯”全国数学邀请赛。对象是初一、初二、高一、高二共四个年级。前中国数学奥委会主席王寿仁教授说:全国初中、高中数学联赛和全国希望杯数学邀请赛,好比我的左右手,缺一个都不好,我都支持。从2002年又有了小学希望杯数学邀请赛,也很受学生欢迎。

从1985年派观察员和两名学生参加IMO以来,我国参加IMO的准备工作由中国数学会的中国数学奥林匹克委员会领导。先由各省市的全国高中数学联赛优胜者参加全国数学冬令营(也叫《中国数学奥林匹克》),从中选出20余名学生进国家集训队,集训队由高校教师进行培训,经过三个月后,通过考试评估由教练组投票表决选出参加IMO的6名选手,再经过一个月的培训,于每年7月出国参加IMO比赛。从1988年至2003年的17次IMO,我国取得10次团体总分第一名,共获金牌71枚,占我国参赛选手的69.6%,我国的选手在IMO比赛中的优异成绩标志着我国数学教育的优异水平。

如今,奥林匹克数学教育的作用已被多数国民所公认。激发青少年学习数学的兴趣,有助于早期智力开发,有助于发现和培养人才。数学竞赛推动了数学知识的普及,促进数学教师知识水平的提高,是数学改革的试验田。因此奥林匹克数学教育是较高层次的基础教育,开发智力的素质教育,生动活泼的课外教育,现代数学的普及教育。理应大家更好地培育它、研究它和发展它!

随着人类进入21世纪,我国的数学奥林匹克又有新的发展。2001年在古城西安举办了首届中国西部数学奥林匹克;此外,2002年在珠海举办了首届中国女子数学奥林匹克(CGMO),我国的数学竞赛活动正在21世纪的改革浪潮中与时俱进地向前发展!

数学是一门基础课。义务教育新课标的推行为数学爱好者提供了时间与空间,可以充分地发展自己的数学爱好,更好地提高数学能力。为此,初中阶段必须较系统地打好数学的基础。不但要学好代数,还要学好平面几何与数论初步,领悟数学的思想方法。本套丛书就是为此目的做的一种尝试,分为《初中数学竞赛中的代数问题》、《初中数学竞赛中的平面几何》、《初中数学竞赛中的数论初步》、《初中数学竞赛中的思维方法》四册。希望与广大初中生能在学习实践中切磋学好数学的体验,共同探索一条能使多数人具备较高的数学素养的学习途径。

首都师范大学数学系　周春荔

# 目　　录

# 第1章 整 除

在日常生活中，我们会遇到许多有趣而又耐人寻味的问题：

某同学到文具店买了七个一角二分钱的本子、五个六分钱的铅笔和三个活页夹子．售货员收了他三元钱，并找还三角七分钱．这个同学马上对售货员说："您的账算错了！"你能知道他为什么这样快就知道"算错了账"吗？

排练团体操时，要求队伍变成10行、15行、18行、24行时，队形都能成为矩形．问最少需要多少人参加团体操的排练？

同学们，你能不能回答这样的问题呢？

让我们还是从数的整除性的基础知识谈起．

## §1.1 十进制整数

在小学数学中，我们主要学习的是整数的运算，不知同学们想过没有，整数是怎样表示的？"逢十进一"是什么意思？

我们通常接触到整数都是十进制的整数．十进制记数法就是采取逢十进一的法则进行记数的方法．例如，1995就是由1个一千，9个一百，9个十和1个五组成的，因此1995这个数可以写成

$$1995=1\times1000+9\times100+9\times10+5.$$

**想一想**

对于任意一个 $n+1$ 位的正整数怎样用这种形式表示？

为了表达方便，我们经常把用字母表示数字的多位数，在这个多位数上面加一横线，以避免和乘法混淆，例如，$\overline{37a56}$就表示一个五位数．

**例 1** 证明：形如$\overline{abcabc}$的六位数总能被 7、11、13 整除．

**证明**：将已知的六位数写成十进制表达形式，得

$$\begin{aligned}\overline{abcabc} &= a\times10^5+b\times10^4+c\times10^3+a\times10^2+b\times10+c\\ &= a\times(10^5+10^2)+b\times(10^4+10)+c\times(10^3+1)\\ &= a\times100100+b\times10010+c\times1001\\ &= 1001\times(100a+10b+c)\\ &= 7\times11\times13(100a+10b+c).\end{aligned}$$

∴$\overline{abcabc}$总能被 7，11，13 整除．

**例 2** 已知$\overline{abcd}$是一个四位数，且$\overline{abcd}-\overline{dcba}=\square999$，问“□”代表几？

**解**：将$\overline{abcd}$及$\overline{dcba}$用十进制表示出来，并求差，得$\overline{abcd}-\overline{dcba}=9(111a+10b-10c-111d)$.

可见，两数之差为 9 的倍数，从而□999 也应是 9 的倍数，故□+9+9+9 也是 9 的倍数，得“□”代表 9 或 0，由题意知 0 舍去．所以□代表 9.

**例 3** 试证明：当$\overline{abc}$是 37 的倍数时，$\overline{bca}$也是 37 的倍数．

**证明**：∵$\overline{abc}=100a+10b+c$，$\overline{bca}=100b+10c+a$，

$$\begin{aligned}\therefore\overline{bca} &= 10(100a+10b+c)-999a\\ &= 10\times\overline{abc}-27\times37a.\end{aligned}$$

故当$\overline{abc}$是 37 的倍数时，$\overline{bca}$也一定是 37 的倍数．

**练一练**

试证明：当$\overline{bca}$是 37 的倍数时，$\overline{cab}$也是 37 的倍数．

**例 4** 有一种室内游戏，魔术师要求某参赛者想好一个三位数$\overline{abc}$，然后，魔术师再要求他记下五个数$\overline{acb}$、$\overline{bac}$、$\overline{bca}$、$\overline{cab}$、$\overline{cba}$，并把这五个数加起来求出和 $N$，只要讲出 $N$ 的大小，魔术师就能说出原数$\overline{abc}$是什么．如果 $N=3194$，请你确定$\overline{abc}$.

**解**：由题意，得

$$\overline{acb}+\overline{bac}+\overline{bca}+\overline{cab}+\overline{cba}=3194.$$

两边加上$\overline{abc}$，得

$222(a+b+c)=3194+\overline{abc}$,

∴　$222(a+b+c)=222\times14+86+\overline{abc}$.

∴　$\overline{abc}+86$ 是 222 的倍数，且 $a+b+c>14$.

设$\overline{abc}+86=222n$，考虑到$\overline{abc}$是三位数，依次取 $n=1,2,3,4$，分别得出$\overline{abc}$的可能值为 136,358,802，结合 $a+b+c>14$，知 $\overline{abc}=358$.

**练一练**

一个三位数的各位数字互不相同，把它的各位上的数字任意交换位置，又可得到五个三位数，若这六个三位数的和等于 2220，那么在所有满足条件的三位数中，最小的三位数是多少？

**答案**：127.

**例 5**　有一个若干位的正整数，它的前两位数字相同，且它与它的反序数（$\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}$ 与 $\overline{a_0a_1a_2\cdots a_{n-1}a_n}$互为反序数，其中 $a_0\neq0,a_n\neq0$）之和为 10879，求原数．

**分析**：首先需要确定原数是几位数，若原数是五位数，则它最小是$\overline{11\times\times\times}$，已大于 10879，与已知条件不符；若原数是三位数，则原数与它的反序数之和最大是 $2\times999=1998$，还小于 10879，亦与已知条件不符，故原数必为四位数．

**解**：由已知可推得原数为四位数，又根据它的前两位数字相同，可设原数为$\overline{aabc}$，其中 $a\geqslant1,c\geqslant1$，则它的反序数为$\overline{cbaa}$. 由题意，得

$\overline{aabc}+\overline{cbaa}=10879$,

∴　$(10^3a+10^2a+10b+c)+(10^3c+10^2b+10a+a)=10879$,

∴　$1001(a+c)+110(a+b)=10879$,　①

比较①式两边的末位数，得

$a+c=9$.　②

将②代入①，得　$a+b=17$.

∵　$a=17-b\geqslant17-9=8$，且 $c\geqslant1$,

∴　只有 $a=8$.

分别代入①②，得　$c=1,b=9$.

故原数为 8891.

**例 6**　一个正整数 $N$ 的各位数不全相等，如果将 $N$ 的各位数字重新排列，必可得到一个最大数和一个最小数，若最大数与最小数的差正好等于原来的数 $N$，则称 $N$ 为“拷贝数”，试求所有的三位“拷贝数”.

**解**：设 $N$ 为所求的三位“拷贝数”，它的各位数字分别为 $a$，$b$，$c$（$a$，$b$，$c$，不全相等），将其数码重新排列后，连同原数共得到 6 个三位数：$\overline{abc}$，$\overline{acb}$，$\overline{bac}$，$\overline{bca}$，$\overline{cab}$，$\overline{cba}$. 设其中最大数为$\overline{abc}$，则最小数为$\overline{cba}$，根据“拷贝数”的定义，得

$$\begin{aligned} N &= \overline{abc} - \overline{cba} \\ &= (100a + 10b + c) - (100a + 10b + a) \\ &= 99(a - c). \end{aligned}$$

0 可知 $N$ 为 99 的整数倍，这样的三位数可能是 198，297，396，495，594，693，792，891，990. 这 9 个数中，只有 $954-459=495$.

故 495 是唯一的三位“拷贝数”.

**练一练**

卡片上写有一个三位数（个位数字不是零），将这个三位数的个位数字与百位数字对调，记这两个三位数的差（大数减小数）为 $m$，且 $m$ 也是一个三位数．又将 $m$ 的个位数字与百位数字对调后的三位数记为 $n$，则 $m+n$ 等于多少？

**答案**：1089.

**例 7**　甲、乙、丙 3 个人的年龄满足下列 4 个条件：

（1）甲的年龄是一个两位数；

（2）把甲的年龄的两位数字对调就是乙的年龄；

（3）甲的年龄与乙的年龄的差的$\frac{1}{3}$就是丙的年龄；

（4）乙的年龄是丙的年龄的 15 倍．

**分析**:本题可根据条件(1)设出甲的年龄,再由(2)、(3)两个条件把乙和丙的年龄用甲的年龄的代数式表示出来,然后由条件(4)列出方程.

**解**:由条件(1),设甲的年龄为$\overline{ab}(a>b\geqslant1)$由(2)知乙的年龄为$\overline{ba}$,由(3)知丙的年龄为$\frac{1}{3}(\overline{ab}-\overline{ba})$.根据条件(4),得

$$\overline{ba}=15\times\frac{1}{3}(\overline{ab}-\overline{ba})$$

即 $5\times\overline{ab}=6\times\overline{ba}$,

∴ $5(10a+b)=6(10b+a)$,

∴ $4a=5b$.

∴ $a$ 是 5 的倍数,$b$ 是 4 的倍数.

∵ $a>b\geqslant1$,

∴ 只有 $a=5,b=4$.

故甲、乙、丙的年龄分别是 54,45,3.

**例 8** 某人驾使汽车从甲地出发到乙地需 1 小时,继续行驶 1 小时 45 分到达丙地.汽车速度一定,甲、乙两地路程是$\overline{ab}$千米,乙、丙两地路程是$\overline{ba}$千米,现在知道从甲地经乙地到丙地的路程不少于 100 千米,试问从甲到乙地的路程是多少千米?

**解**:速度一定,路程与时间成正比知

$$\frac{\overline{ab}}{\overline{ba}}=\frac{1}{1\frac{3}{4}},$$

∴ $7\,\overline{ab}=4\,\overline{ba}$,

∴ $7(10a+b)=4(10b+a)$,∴ $b=2a$.

又 $\overline{ab}+\overline{ba}=(10a+b)+(10b+a)$

$=11(a+b)$

$=11(a+2a)$

$=33a\geqslant100$,

∴ $a\geqslant4$.

又　$b=2a<10$，

∴　$a<5$.

∴　$a=4, b=8$.

∴　$\overline{ab}=48$.

故从甲地到乙地的路程是 48 千米．

**例 9**　已知一个四位数的各位数字的和与这个四位数相加等于 1995，试求这个四位数．

**解**：设所求四位数是$\overline{abcd}$，由题意得

$$a+b+c+d+\overline{abcd}=1995,$$

∴　$1001a+101b+11c+2d=1995.$　①

此时必有 $a=1$（请读者想一想为什么？）

∴　$101b+11c+2d=994$　②

此时必有 $b=9$（请读者想一想为什么？）

∴　$11c+2d=85.$　③

对于③式，若 $c=8$ 或 9，则左边都大于 85；若 $c\leqslant6$，则左边都小于 85，所以只有 $c=7$.

将 $c=7$ 代入③，得　$d=4$.

故所求四位数是 1974.

**说明**：解答整数问题，常常需要从首位或末位数字入手去进行分析．本例在确定 $a,b,c,d$ 的值时，我们都是采用了首位数字分析法．

**例 10**　若一个首位数字是 1 的六位数$\overline{1abcde}$乘以 3 所得的积是一个末位数字为 1 的六位数$\overline{abcde1}$，求原来的六位数．

**解**：设$\overline{abcde}=x$，则

$$\overline{1abcde}=100000+\overline{abcde}=100000+x,$$

$$\overline{abcde1}=\overline{abcde0}+1=10\times\overline{abcde}+1=10x+1.$$

由题意，得　$3\times(100000+x)=10x+1$，

解得　$x=42857$.

∴　原来的六位数为 $100000+42857=142857$.

**说明**：此题的关建是如何表示十进制数$\overline{1abcde}$和$\overline{abcde1}$. 对于一个十进制整数 $M=\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}$，这样的表示方法是常用的：

$$M=10\times\overline{a_na_{n-1}\cdots a_2a_1}+a_0$$

$$M=100\times\overline{a_na_{n-1}\cdots a_3a_2}+\overline{a_1a_0},$$

……

$$M=10^k\cdot\overline{a_na_{n-1}\cdots\cdots a_k}+\overline{a_{k-1}a_{k-2}\cdots\cdots a_1a_0}.$$

**例 11**　一个自然数的首位数字是 4，将其首位数字移至末尾之后，它的大小降为原来的$\frac{1}{4}$，求满足条件的最小正整数.

**解**：设所求的数表示为 $N=\overline{4ab\cdots c}=4\times10^n+A$，其中 $A=\overline{ab\cdots c}$（$A$ 是一个 $n$ 位数），将其首位移至末位得$\overline{ab\cdots c4}=10A+4$.

由题意，得

$$4\times10^n+A=4(10A+4),$$

$$\therefore\quad 39A=4\times(10^n-4),$$

$$\therefore\quad 39A=4\times\underbrace{99\cdots9}_{n-1\text{个}9}6,$$

$$\therefore\quad 13A=4\times\underbrace{33\cdots3}_{n-1\text{个}3}2.$$

故$\underbrace{33\cdots3}_{n-1\text{个}3}2$必能被 13 整除，不难发现 33332 是满足条件的最小值，从而 $A$ 的最小值是 10256，所以 $N$ 的最小值就是 410256.

**例 12**　将正整数 $N$ 接写在每一个正整数的右边，如果得到的新数都能被 $N$ 整除，那么称 $N$ 为“魔术数”，在小于 130 正整数中，“魔术数”的个数有多少？

**解**：设“魔术数”$N$ 为 $m$ 位数，任取正整数 $P$，接写后得到的新数为$\overline{PN}=P\times10^m+N$. 由题意$\overline{PN}$能被 $N$ 整除，得 $P\times10^m$ 也能被 $N$ 整除，但由于 $P$ 的任意性，故 $10^m$ 一定能被 $N$ 整除，从而

当 $m=1$ 时，$N=1,2,5$；

当 $m=2$ 时，$N=10,20,25,50$；

当 $m=3$ 时，考虑到 $N<130$，$N=100,125$.

所以，小于 130 的“魔术数”有 9 个.

## 习题 1.1

### A 组

1. $M$ 表示一个两位数，$N$ 表示一个三位数，如果把 $M$ 放在 $N$ 的左边，组成一个五位数，那么这个五位数是(  )

(A)$M+N$　　(B)$MN$

(C)$10000M+N$　　(D)$1000M+N$

2. 一个两位数，它是本身数字和的 $k$ 倍，将个位数字与十位数字交换位置后，组成一个新数，则新数为其数字和的(  )

(A)$(k-1)$倍　　(B)$(11-k)$倍

(C)$(10-k)$倍　　(D)$(9-k)$倍

3. 在大于 10 小于 100 的正整数中，数字交换位置后所得的数比原数增加 9 的数的个数为__________.

4. 一个两位数，它的各位数字和的 3 倍与这个数加起来所得的和恰好是原数的两个数字交换了位置所得的两位数，这样的两位数有__________个.

5. 已知 $\overline{ab}$ 为两位数，且满足 $a \cdot b \cdot \overline{ab}=\overline{bbb}$，求这个两位数.

6. 求一个最小的正整数 $n$，它的个位数字为 6，将 6 移到首位，所得新数是原数的 4 倍.

7. $A$ 是一个三位数，$B$ 是一个两位数，$A:B=3:1$，如果将 $B$ 放在 $A$ 的左边，得到一个五位数 $C$；把 $A$ 放在 $B$ 的左边得到另一个五位数 $D$，且 $D$ 比 $C$ 小 40014，求 $D^A$ 的末位数字.

8. 两位数 $\overline{ab}$(个位数字与十位数字不同)的平方等于三位数 $\overline{xyz}$；而两位数 $\overline{ba}$ 的平方恰好等于三位数 $\overline{zyx}$，求上述两位数

与三位数.

## B　组

1. 在十进制整数表示中,整数 $a$ 是由 1985 个数字 8 组成,整数 $b$ 是由 1985 个数字 5 组成,则整数 $9\cdot a\cdot b$ 的各位数字之和是(　)

(A)15880　　(B)17856

(C)17865　　(D)17874

2. 小文在计算两个数相加时,把一个加数个位上的 1 错误地当作 7,把另一个加数十位上的 8 错误地当作 3,所得的和为 1946,原来两数相加的正确答案是__________.

3. 一辆新汽车出厂以后,为了试验汽车的性能,两位司机轮流驾驶,每小时行驶 55 千米,不停地行驶了一整天.停下来以后,看看手表,行驶时间是整整 $n$ 小时,$n$ 是个整数;看看里程表,出发时是个三位数,停止时,三倍数恰好颠倒了顺序.

(1)汽车行驶了几小时?

(2)设出发时里程表上三位数为$\overline{abc}$,若 $a+b+c$ 不超过 7,你知道这两个三位数是多少吗?

4. 求所有能被 11 整除的三位数,使其满足除得的商正好等于被除数中各数字的平方和.

5. $N$ 是由 5 个不同的非零数字组成的 5 位数,且 $N$ 等于这 5 个数字中取 3 个不同的数字构成的所有三位的和,求所有的这种 5 位数 $N$.

6. 如果一个正整数各位数字之和与各位数字之积的和恰好等于这个正整数,我们称它为"幸运数".试求出所有幸运数的和.

## §1.2　数的整除

设有两个整数 $a,b(b\neq0)$，若有另一整数 $q$，使得 $a=b\times q$，则称 $a$ 被 $b$ 整除；或 $b$ 能整除 $a$；若 $a$ 被 $b$ 整除，也称 $a$ 是 $b$ 的倍数；$b$ 是 $a$ 的约数，并记作 $b|a$. 若 $a$ 不能被 $b$ 整除，则记作 $b\nmid a$.

我们曾经学过下述有关整除的判别法则：

(1)被 2 或 5 整除的数的特征是末位数字能被 2 或 5 整除.

(2)被 4 或 25 整除的数的特征是末两位数字能被 4 或 25 整除.

(3)被 8 或 125 整除的数的特征是末三位数字能被 8 或 125 整除.

(4)被 3 或 9 整除的数的特征是各位数字和能被 3 或 9 整除.

(5)被 11 整除的数的特征是其奇数位数字之和与偶数位数字之和的差能被 11 整除.

**例 1**　判断下列各数中，哪些数能被 4 或 25 整除：

457565，456575，184062，186240.

**解**：$\because$　456575 的末两位数字 75 能被 25 整除，而 457565 的末两位数字 65 不能被 25 整除，

$\therefore$　456575 能被 25 整除，而 457565 不能被 25 整除.

同理可知，$4|186240$，$4\nmid184062$.

**例 2**　判断 789789 能否被 11 整除.

**解**：$\because$　这个六位数奇位数字之和与偶位数字之和的差为 $(8+7+9)-(7+8+9)=0$，是 11 的倍数，

$\therefore$　$11|789789$.

**练一练**

判断 456456 能否被 11 整除；

判断 67896789 能否被 11 整除.

在解题过程中，我们还经常用到下述一些性质：

(1)若 $a|b$，$b|c$，则 $a|c$.

**证明**：$\because$ $a|b$，$b|c$，

$\therefore$ $b=ap$，$c=bq$($p$，$q$ 是整数)，

$\therefore$ $c=(ap)q=(pq)a$，

$\therefore$ $a|c$.

(2)若 $a|b$，$a|c$，则 $a(b\pm c)$.

**证明**：$\because$ $a|b$，$a|c$，

$\therefore$ $b=ap$，$c=aq$($b$，$q$ 是整数)，

$\therefore$ $b\pm c=ap\pm aq=a(p\pm q)$，

$\therefore$ $a|(b\pm c)$.

(3)若 $a|b$，则 $a|nb$($n$ 是正整数).

请读者完成证明.

(4)若 $a$，$b$ 互质，且 $a|bc$，则 $a|c$.

(5)若 $a$，$b$ 互质，且 $a|c$，$b|c$，则 $ab|c$.

(6)$n$ 个连续整数中，必有一个能被 $n$ 整除.

如 11，12，13 中有 $3|12$；41，42，43，44 中有 $4|44$；77，78，79，80，81 中有 $5|80$.

**例 3** 已知九位数 $\overline{32a35717b}$ 能被 72 整除，求 $a$，$b$.

**解**：$\because$ $72|\overline{32a35717b}$，而 $72=8\times 9$，

$\therefore$ $8|\overline{32a35717b}$，$9|\overline{32a35717b}$.

根据数的整除特征，有 $8|\overline{17b}$，且 $b$ 必须是偶数，

$\therefore$ $b=6$.

又 $9|(3+2+a+3+5+7+1+7+6)$，

即 $9|(34+a)$，　$\therefore$ $a=2$.

**例 4** 已知 $N=\overline{13xy45z}$ 能被 792 整除，试确定数字 $x$，$y$，$z$ 及 $N$.

**解**：$\because$ $792=8\times 9\times 11$，　$\therefore$ $8|N$，

$\therefore$ $8|\overline{45z}$，　$\therefore$ $z=6$.

又　$9|N$，

∴　$9|(1+3+x+y+4+5+6)$，

即　$9|(19+x+y)$，

∴　$x+y=18$，或 $x+y=17$.

又　$11|N$，

∴　$11|[(1+x+4+6)-(3+y+5)]$，

即　$11|[3+(x-y)]$，

∴　$x-y=8$，或 $x-y=-3$.

经检验，$\begin{cases}x+y=8,\\x-y=8\end{cases}$ 符合题意，它的解是 $\begin{cases}x=8,\\y=0.\end{cases}$

故　$N=1380456$.

**例** 5　用 0，1，2，3，…，9 这十个不同的数字组成能被 99 整除的十位数，求其中最大的一个数和最小的一个数.

**分析**：因为 $99=9\times11$，所以这个十位数能同时被 9 和 11 整除.

**解**：∵　$0+1+2+\cdots+9=45=5\times9$，

∴　所有这样的十位数均能被 9 整除.

设十位数中奇数位上数字和为 $x$，偶数位上数字和为 $y$，则 $x+y=0+1+2+\cdots+9=45$ 为奇数，

∴　$x-y$ 为奇数.

根据题意，得　$11|(x-y)$，

∴　$|x-y|=11$.

若 $x-y=11$，则 $x=28$，$y=17$；

若 $x-y=-11$，则 $x=17$，$y=28$.

要使十位数最大，前几位应尽量选用 9，8，7，6；

若前四位为 9876，则 $9+7=16$，$8+6=14$，可知 $x\neq17$，于是有 $x=28$，$y=17$.

从而易得能被 99 整除的最大的十位数为 9876524130.

同理能被 99 整除的最小的十位数为 1024375869.

**说明**:注意到 $x-y$ 与 $x+y$ 奇偶性相同,在得 $|x-y|=0$, 11,22 时就可以排除 $|x-y|=0$ 与 $|x-y|=22$.

**例 6**　从 19 到 80 的所有两位数被连续地写成一个数 $x=19202122\cdots7980$. 求证:这个数能被 1980 整除.

**分析**:显然 $20|x$,由 $1980=20\times9\times11$,只要证 $9|x$,$11|x$.

**证明**:首先,显然有 $20|x$.

其次,由于各位上的数字和为 558 能被 9 整除,所以 $9|x$.

最后,因为 $(1+2\times10+3\times10+4\times10+5\times10+6\times10+7\times10+8)-(9+6\times45)=0$,所以 $11|x$.

而 20,9,11 两两互质,且 $1980=20\times9\times11$,故 $1980|x$. 这个数能被 1980 整除.

**想一想**

证明 $11|x$ 时,也可以证 $19+20+21+\cdots+79+80=99\times31$ 能被 11 整整除,这是为什么?

**例 7**　若 $4b+2c+d=32$,试问 $\overline{abcd}$ 能否被 8 整除?请说明理由.

**分析**:要说明 $\overline{abcd}$ 能否被 8 整除,根据被 8 整除的数的特征,只要判断 $\overline{bcd}$ 能否被 8 整除.

**解**:$\because$

$$\begin{aligned}\overline{bcd}&=100b+10c+d\\&=96b+8c+(4b+2c+d)\\&=96b+8c+32\\&=8(12b+c+4),\end{aligned}$$

$\therefore$　$8|\overline{bcd}$,

$\therefore$　$8|\overline{abcd}$.

**例 8**　若 $a,b,c,d$ 是互不相等的整数,且整数 $x$ 满足等式

$(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)=9$,

求证:$4|(a+b+c+d)$.

**证明**:$\because$　$a,b,c,d$ 是互不相等的整数,

$\therefore$　$x-a,x-b,x-c,x-d$ 也是互不相等的整数.

∵　$(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)=9$,

∴　$x-a,x-b,x-c,x-d$ 均为 9 的约数,

而　$9=(-1)\times(+1)\times(-3)\times(+3)$,

∴　$(x-a)+(x-b)+(x-c)+(x-d)$

$=(-1)+(+1)+(-3)+(+3)=0$,

即　$a+b+c+d=4x$.

故　$4\mid(a+b+c+d)$.

**例 9**　求证:$1\underbrace{00\cdots0}_{8个0}1$ 能被 11 整除.

**证明**:$1\underbrace{00\cdots0}_{8个0}1=10^9+1=(10^3)^3+1$

$=(10^3+1)(10^6-10^3+1)$

$=(10+1)(10^2-10+1)(10^6-10^3+1)$

$=11(10^2-10+1)(10^6-10^3+1)$,

∴　$1\underbrace{00\cdots0}_{8个0}1$ 能被 11 整除.

**例 10**　若 $N=\overline{2x78}$ 是一个能被 17 整除的四位数,求 $x$.

**解**:$N=2078+100x=(122\times17)+17\times6x+4-2x$

$=17(122+6x)+(4-2x)$.

∵　$17\mid N,17\mid17(122+6x)$,

∴　$17\mid4-2x$,　∴　$x=2$.

**例 11**　已知 $x,y,z$ 均为整数,若 $11\mid(7x+2y-5z)$,求证:$11\mid(3x-7y+12z)$.

**证明**:∵　$4(3x-7y+12z)+3(7x+2y-5z)$

$=11(3x-2y+3z)$,

又∵　$11\mid(7x+2y-5z),11\mid11(3x-2y+3z)$,

∴　$11\mid4(3x-7y+12z)$,

又∵　11,4 互质,

∴　$11\mid(3x-7y+12z)$.

**练一练**

1.　已知 $7|(13x+8y)$，求证：$7|(9x+5y)$.

2.　已知 $17|(2a+3b)$，求证：$17|(9a+5b)$.

**提示：**

1.　$3(9x+5y)=13x+8y+7(2x+y)$.

2.　$$\begin{aligned}9a+5b&=17a-8a+17b-12b\\&=17(a+b)-4(2a+3b).\end{aligned}$$

**例 12**　试证：$n$ 为整数时，$n(n+1)(2n+1)$是 6 的倍数.

**证明：**$\because$　$$\begin{aligned}&n(n+1)(2n+1)\\=&n(n+1)[(n+2)+(n-1)]\\=&n(n+1)(n+2)+(n-1)n(n+1),\end{aligned}$$

又　$n,n+1,n+2$ 是三个连续整数，

$\therefore$　$n(n+1)(n+2)$是 $1\times2\times3$ 的倍数，

即　$6|n(n+1)(n+2)$；

同理　$6|(n-1)n(n+1)$，

$\therefore$　$6|[n(n+1)(n+2)+(n-1)n(n+1)]$，

即　$6|n(n+1)(2n+1)$.

**练一练**

求证：对于任意正整数 $n$，$n^3+\frac{3}{2}n^2+\frac{1}{2}n-3$ 都是能被 3 整除的整数.

**提示：**$$\begin{aligned}&n^3+\frac{3}{2}n^2+\frac{1}{2}n-3\\=&\frac{1}{2}(2n^3+3n^2+n-6)\\=&\frac{1}{2}[n(n+1)(2n+1)-6].\end{aligned}$$

**例 13**　一整数 $a$ 若不能被 2 和 3 整除，则 $a^2+47$ 必能被 24 整除.

**证明：**因为 $a^2+47=(a^2-1)+48$，且 48 能被 24 整除，故只

需证 $a^2-1$ 能被 24 整除，$a^2+47$ 就能被 24 整除．

∵　$a$ 不能被 2 整除，

∴　$a$ 为奇数．

设 $a=2k+1$（$k$ 是整数），则 $a^2-1=(2k+1)^2-1=4k(k+1)$能被 8 整除．

∵　$a(a^2-1)=(a-1)a(a+1)$能被 3 整除，而 $a$ 不能被 3 整除．

∴　$a^2-1$ 能被 3 整除．

又　3 与 8 互质，

故　$a^2-1$ 能被 24 整除．

**例 14**　已知 $a,b$ 为整数，且 $9|(a^2+ab+b^2)$，求证：$3|a,3|b$.

**分析**：由 $a^2+ab+b^2=(a-b)^2+3ab$，得　$3|(a-b)^2$，从而 $3|(a-b)$.

**证明**：∵　$a^2+ab+b^2=(a-b)^2+3ab,9|(a^2+ab+b^2)$，

∴　$3|[(a-b)^2+3ab]$，

∴　$3|(a-b)^2$.

∵　3 是质数，

∴　$3|(a-b)$.

又∵　$9|[(a-b^2)+3ab]$，

∴　$9|3ab$，

∴　$3|ab$.

∵　3 是质数，

∴　$3|a$，或 $3|b$.

若 $3|a$，由 $3|(a-b)$，得 $3|b$.

若 $3|b$，同理可得 $3|a$.

故　$3|a,3|b$.

**说明**：$3|ab$ 是显然的，但它不能保证 $3|a$ 与 $3|b$ 同时成立．

## 习题 1.2

### A　组

1. 已知 $x,y$ 为整数，且 $5|(x+9y)$，求证：$5|(8x+7y)$.

2. 求证：若 $3|(4x-y)$，则 $9|4x^2+7xy-2y^2)$.

3. 求证：若 $a$ 为整数，则 $6|[a(a+1)(2a+1)]$.

4. 求证：若 $n|(ma-b)$，$n|(mc-d)$，则 $n|(ad-bc)$.

5. 求证：若 $(m-p)|(mn+pq)$，则 $(m-p)|(mq+np)$.

### B　组

1. 求证：若 $57|(7^{82}+8^{161})$，则 $57|(7^{83}+8^{163})$.

2. 已知 $\overline{abc}+\overline{def}$ 能被 37 整除，求证：$37|\overline{abcdef}$.

3. 1,2,3,4,5,6 每个使用一次组成一个六位数 $\overline{abcdef}$，使得三位数 $\overline{abc}$，$\overline{bcd}$，$\overline{cde}$，$\overline{def}$ 依次能被 4,5,3,11 整除，求这个六位数.

4. 设 $(a,b,c)$ 为一组勾股数（即 $a,b,c$ 满足 $a^2+b^2=c^2$），求证：$30|abc$.

5. 用 1,2,3,4,5,6 这六个数字组成一个六位数 $\overline{abcdef}$，其中不同的字母表示不同的数字，要求 $\overline{ab}$ 是 2 的倍数，$\overline{abc}$ 是 3 的倍数，$\overline{abcd}$ 是 4 的倍数，$\overline{abcde}$ 是 5 的倍数，$\overline{abcdef}$ 是 6 的倍数．试求出所有这样的六位数，并说明你的推理过程．

6. 安德列、瓦西里和谢尔盖三兄弟不同岁，恰在同一天出生．当大哥安德列 12 岁生日时，三兄弟年龄之和被 12 整除，而老二瓦西里 12 岁生时，三兄弟年龄之和仍被 12 整除，证明：小弟谢尔盖 12 岁时生日时，三兄弟年龄之和依然被 12 整除．

## §1.3 奇数和偶数(一)

把全体整数

$\cdots,-4,-3,-2,-1,0,1,2,\cdots$分成奇数类和偶数类是一种最常用的分类方法．

奇数就是通常所说的单数，偶数就是通常所说的双数．

一般地，一个整数如果能被 2 整除就叫做偶数，如果不能被 2 整除(即被 2 除余 1)就叫做奇数．

偶数可以记作 $2n$，奇数可以记作 $2n-1$ 或 $2n+1$($n$ 是整数)．

**想一想**

当 $n$ 为整数时，如何理解以 $2n$ 表示偶数，以 $2n+1$ 表示奇数呢?

我们先看下表：

| $n$ | $\cdots$ $-7$, $-6$, $-5$, $-4$, $-3$, $-2$, $-1$, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, $\cdots$ |
|---|---|
| $2n$ | $\cdots$ $-14$, $-12$, $-10$, $-8$, $-6$, $-4$, $-2$, 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, $\cdots$ |
| $2n+1$ | $\cdots$ $-13$, $-11$, $-9$, $-7$, $-5$, $-3$, $-2$, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, $\cdots$ |

表中告诉我们，当 $n$ 取遍全体整数时，$2n$ 将对应取遍所有偶数，$2n+1$ 将对应取遍所有奇数．因此，当 $n$ 取整数时，我们以 $2n$，$2n+1$ 分别作为任意偶数、任意奇数的代表表达通式．

奇数和偶数有一些十分简单又明显的性质．

(1)奇数不等于偶数．

(2)奇数±奇数=偶数，偶数±偶数=偶数，奇数±偶数=奇数．

(3)奇数个奇数的和是奇数，偶数个奇数的和是偶数，任意多个偶数的和是偶数．

(4)奇数×奇数＝奇数，偶数×整数＝偶数，偶数×偶数＝4的倍数．

(5)两个整数的和与这两个整数的差具有相同的奇偶性．

**练一练**

请读者利用奇偶数的表示法证明上述的各条性质．

(6)奇数的平方为 $4k+1$ 型的数，偶数的平方为 $4k$ 型的数．

这是因为

$$(2n+1)^2=4n^2+4n+1=4n(n+1)+1, \quad ①$$

$$(2n)^2=4n^2.$$

**想一想**

由①式还可得出结论：奇数的平方被 8 除余 1．你知道为什么吗？

(7)任意两个整数的平方和被 4 除一定不余 3.

这可由性质(6)推出：

$$奇数^2+奇数^2=4k+2,$$

$$奇数^2+偶数^2=4k+1,$$

$$偶数^2+偶数^2=4k.$$

即两个奇数的平方和为 $4k+2$ 型，一个奇数与一个偶数的平方和为 $4k+1$ 型，两个偶数的平方和为 $4k$ 型．所以没有两个整数的平方和为 $4k+3$ 型．由这个性质可知，所有形如 $4k+3$ 型的数都不能表示为两个整数的平方和．

(8)任意两个整数的平方差被 4 除一定不余 2.

这可由 $x^2-y^2=(x+y)(x-y)$ 以及 $x+y$ 和 $x-y$ 有相同的奇偶性得到．

由这个性质可知，所有形如 $4k+2$ 型的数都不能表示为两个整数的平方差．

**例 1**　是否存在整数 $m,n$，满足 $m^2+2002=n^2$．

**证明**:假设存在整数 $m,n$,满足 $m^2+2002=n^2$,则

$$(n+m)(n-m)=2002.$$

∵ 2002 是偶数,

∴ $(n+m)$与$(n-m)$中必有一个为偶数.

又 $(n+m)$与$(n-m)$同为奇数或同为偶数,

∴ $(n+m)$与$(n-m)$同为偶数.

故$(n+m)(n-m)$为 4(即 $2^2$)的倍数.

而 2002 不是 4 的倍数,这与$(n+m)(n-m)=2002$ 发生矛盾.

∴ 不存在整数 $m,n$,满足 $m^2+2002=n^2$.

**例 2** 设 1,2,3,…,9 的任一排列为 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_9$. 求证:$(a_1-1)(a_2-2)\cdots(a_9-9)$是一个偶数.

**证明**:假设$(a_1-1)(a_2-2)\cdots(a_9-9)$是奇数,则 $a_1-1,a_2-2,\cdots,a_9-9$ 都是奇数,故这 9 个奇数的和也是奇数. 而

$$\begin{aligned}&(a_1-1)+(a_2-2)+\cdots+(a_9-9)\\=&(a_1+a_2+\cdots+a_9)-(1+2+\cdots+9)\\=&0.\end{aligned}$$

0 是偶数,不是奇数,发生矛盾.

因此,$(a_1-1)(a_2-2)\cdots(a_9-9)$是偶数.

**说明**:应用整数的奇偶性解题,常需变换角度去考察问题. 本题通过化积的奇偶性为和的奇偶性来研究问题,从而化难为易.

**练一练**

(1)设 1,2,3,…,2001 的任一排列为 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_{2001}$,$(a_1-1)(a_2-2)\cdots(a_{2001}-2001)$是奇数还是偶数? 说说你的道理.

(2)设 1,2,3,…,2001 的任一排列为 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_{2001}$,$(a_1+1)(a_2+2)\cdots(a_{2001}+2001)$是奇数还是偶数? 说说你的道理.

(3)设 1,2,3,…,2003 的任意两个排列为 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_{2003}$ 与 $b_1,b_2,\cdots,b_{2003}$,$(a_1-b_1)(a_2-b_2)\cdots(a_{2003}-b_{2003})$是奇数还是偶数?$(a_1+b_1)(a_2+b_2)\cdots(a_{2003}+b_{2003})$呢?

**试一试**

请你由此归纳出一般性结论.

**例** 3　设 $a,b$ 是正整数,且满足关系式

$$(11111+a)(11111-b)=123456789,$$

求证:$a-b$ 是 4 的倍数.

**证明**:由已知条件可得:$11111+a$ 与 $11111-b$ 均为奇数,所以 $a,b$ 均为偶数. 又由已知条件得

$$11111(a-b)=ab+2648.$$

由于 $ab$ 是 4 的倍数 ,$2648=4\times617$ 也是 4 的倍数,所以 $11111(a-b)$是 4 的倍数,故 $a-b$ 是 4 的倍数.

**例** 4　有 $n$ 个数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$,它们中的每一个数或者为 1,或者为 $-1$. 如果

$$x_1x_2+x_2x_3+\cdots+x_{n-1}x_n+x_nx_1=0,$$

求证:$n$ 是 4 的倍数.

**证明**:我们先证明 $n=2k$,再证明 $k$ 也是偶数.

由于 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的绝对值都是 1,所以 $x_1x_2,x_2x_3,\cdots,x_nx_1$ 的绝对值也都是 1,即它们或者为 $+1$,或者为 $-1$. 设其中有 $k$ 个 $-1$,由于总和为 0,故 $+1$ 也有 $k$ 个,从而 $n=2k$.

下面我们来考虑$(x_1x_2)\cdot(x_2x_3)\cdots(x_nx_1)$.

一方面,有

$$(x_1x_2)\cdot(x_2x_3)\cdots(x_nx_1)=(-1)^k,$$

另一方面,有

$$(x_1x_2)\cdot(x_2x_3)\cdots(x_nx_1)=(x_1x_2\cdots x_n)^2=1.$$

所以$(-1)^k=1$,故 $k$ 是偶数,从而 $n$ 是 4 的倍数.

**练一练**

设 $x_1,x_2,\cdots,x_n(n>4)$为 1 或 $-1$,并且

$$x_1x_2x_3x_4+x_2x_3x_4x_5+\cdots+x_nx_1x_2x_3=0.$$

求证：$n$ 是 4 的倍数．

**例 5** 设有 $n$ 个数 $x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n$，其中每一个 $x_i$ 不是 $+1$ 就是 $-1$，且

$$\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_3}+\frac{x_3}{x_4}+\cdots+\frac{x_{n-1}}{x_n}+\frac{x_n}{x_1}=0.$$

证明：$n$ 是 4 的倍数．

**证明**：令 $\frac{x_i}{x_{i+1}}=y_i(1\leqslant i\leqslant n-1)$，$\frac{x_n}{x_1}=y_n$.

∵ $x_i$ 不是 $+1$ 就是 $-1$，

∴ $y_i$ 不是 $+1$ 就是 $-1$.

设 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 这 $n$ 个数中有 $a$ 个 $+1$，$b$ 个 $-1$，则 $a+b=n$.

又 $y_1+y_2+\cdots+y_n=\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_3}+\cdots+\frac{x_n}{x_1}=0$，

而 $y_1+y_2+\cdots+y_n=a\times(+1)+b\times(-1)=a-b$，

∴ $a-b=0$， 即 $a=b$，

∴ $n=2b$.

又∵ $y_1y_2\cdots y_n=\frac{x_1}{x_2}\cdot\frac{x_2}{x_3}\cdots\frac{x_n}{x_1}=1$，

即 $(+1)^a\cdot(-1)^b=1$，

∴ $b$ 为偶数，设 $b=2m$，则 $n=4m$，故 $n$ 是 4 的倍数．

**说明**：解决此题的关键是抓住隐含条件：$\frac{x_1}{x_2}\cdot\frac{x_2}{x_3}\cdot\cdots\cdot\frac{x_n}{x_1}=1$.

**练一练**

设有 $n$ 个数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，其中每一个 $x_i$ 不是 $+1$ 就是 $-1$，且

$$\frac{x_1x_2x_3}{x_4}+\frac{x_2x_3x_4}{x_5}+\cdots+\frac{x_{n-3}x_{n-2}x_{n-1}}{x_n}+\frac{x_{n-2}x_{n-1}x_n}{x_1}+\frac{x_{n-1}x_nx_1}{x_2}+\frac{x_nx_1x_2}{x_3}=0,$$

**证明**:$n$ 是 4 的倍数.

**例 6**　一个立方体的顶点标上+1 或−1,面上标上一个数,它等于这个面的 4 个顶点处的数的乘积,这样所标的 14 个数的和能否为 0?

**解**:设立方体的 8 个顶点上的数分别是 $a_1,a_2,\cdots,a_8$,六个面上的 6 个数分别是 $b_1,b_2,\cdots,b_6$. 由题意,得

$$a_i=+1\text{ 或 }-1(i=1,2,\cdots,8).$$

$\therefore\quad b_i=+1$ 或 $-1$.

如果所标的 14 个数的和为 0,即

$a_1+a_2+\cdots+a_8+b_1+b_2+\cdots+b_6=0$,

那么这 14 个数中+1 的个数与−1 的个数一样多,都是 7 个.

但事实上,$\because\quad b_1b_2\cdots b_6=(a_1a_2\cdots a_8)^3$,

$\therefore\quad a_1a_2\cdots a_8b_1b_2\cdots b_6=(a_1a_2\cdots a_8)^4=1$,

$\therefore$　这 14 个数中−1 的个数为偶数个.

由于 7 不是偶数,产生矛盾. 因此,所标的 14 个数的和不能为 0.

**例 7**　在 $n\times n$($n$ 为奇数)方格表里的每一个方格中任意填上一个+1 或−1,在每一列的下面写上该列所有数的乘积,在每一行的右面写上该行所有数的乘积,求证:这 $2n$ 个乘积的和不等于 0.

**证明**:设每列下面的数为 $a_1,a_2,\cdots,a_n$,每行右面的数为 $b_1,b_2,\cdots,b_n$. 由题意得

$a_i=+1$ 或 $-1$,$b_i=+1$ 或 $-1(i=1,2,\cdots,n)$.

如果这 $2n$ 个乘积的和为 0,即

$a_1+a_2+\cdots+a_n+b_1+b_2+\cdots+b_n=0$,

那么这 $2n$ 个数中+1 的个数与−1 的个数一样多,都是 $n$ 个.

但事实上,$\because\quad a_1a_2\cdots a_n$ 和 $b_1b_2\cdots b_n$ 都表示 $n\times n$ 方格表里

所有数的乘积，

$\therefore\quad a_1a_2\cdots a_n=b_1b_2\cdots b_n$，

$\therefore\quad a_1a_2\cdots a_nb_1b_2\cdots b_n=(a_1a_2\cdots a_n)^2=1$，

$\therefore$ 这 $2n$ 个数中 $-1$ 的个数为偶数，即 $n$ 为偶数．

而已知 $n$ 为奇数，产生矛盾，因此这 $2n$ 个乘积的和不等于 0.

**例** 7　结定整数 $a$ 和 $b$，

(1)如果 $ab$ 是偶数，证明能够找到两个正整数 $c$ 和 $d$，使得 $a^2+b^2+c^2=d^2$；

(2)如果 $ab$ 是奇数，证明不存在满足 $a^2+b^2+c^2=d^2$ 的正整数 $c$ 和 $d$.

**证明**：(1)若 $ab$ 是偶数，则 $a$ 和 $b$ 至少有一个是偶数．

若 $a$ 和 $b$ 一为奇数，一为偶数，则 $a^2+b^2$ 必为奇数．设

$$a^2+b^2=2k+1,$$

则设 $c=k,d=k+1$，就可得到

$$a^2+b^2+c^2=2k+1+k^2=(k+1)^2=d^2.$$

若 $a$ 和 $b$ 都是偶数，则 $a^2+b^2$ 是 4 的倍数．设

$$a^2+b^2=4k+4,$$

则设 $c=k,d=k+2$，就可得到

$$a^2+b^2+c^2=4k+4+k^2=(k+2)^2=d^2.$$

(2)若 $ab$ 是奇数，则 $a$ 和 $b$ 都是奇数，于是 $a^2+b^2$ 是$4k+2$ 型的数．

若存在正整数 $c$ 和 $d$ 满足等式，则有

$$d^2-c^2=a^2+b^2.$$

由性质(8)可知，$d^2-c^2$ 不可能为 $4k+2$ 型的数，因此满足等式的正整数 $c$ 和 $d$ 不存在．

**说明**：当 $a$ 和 $b$ 都是偶数时，$a^2+b^2$ 是 4 的倍数，可设 $a^2+b^2=4k$，也可设 $a^2+b^2=4k+4$. 而对于本题，设 $a^2+b^2=4k+4$ 易于证明问题．

**例 8**　是否存在整数 $a,b,c,d$，使得对所有整数 $x$，等式

$x^4+2x^2+1992x+30=(x^2+ax+b)(x^2+cx+d)$ 成立．

**解**：如果已知的等式成立，我们可以把等式右边的两个二次三项式的积算出来．

$$(x^2+ax+b)(x^2+cx+d)$$
$$=x^4+(a+c)x^3+(b+d+ac)x^2+(bc+ad)x+bd.$$

于是有等式

$$x^4+2x^2+1992x+30$$
$$=x^4+(a+c)x^3+(b+d+ac)x^2+(bc+ad)x+bd.$$

比较等式两边对应项的系数，则有

$$\begin{cases} a+c=0, & ① \\ b+d+ac=2, & ② \\ bc+ad=1992, & ③ \\ bd=30. & ④ \end{cases}$$

由④知，$b$ 和 $d$ 一为奇数，一为偶数，不妨设 $b$ 为奇数，$d$ 为偶数．再考虑③式，由 $d$ 是偶数，则 $ad$ 是偶数，又因为 1992 是偶数，则 $bc$ 必为偶数，再由 $b$ 为奇数得，$c$ 为偶数．根据这些结果考虑②式，由 $b$ 为奇数，$d$ 和 $c$ 为偶数可知 $b+d+ac$ 为奇数，可是等式右边是 2，2 为偶数，这样②式不可能成立，因而题目要求的 $a,b,c,d$ 不存在．

**例 9**　已知一奇数 $\beta$，使得整系数二次三项式 $ax^2+bx+c$ 的值 $a\beta^2+b\beta+c$ 也是奇数，其中 $c$ 是奇数，求证：方程 $ax^2+bx+c=0$ 没有奇数根．

**证明**：因为 $c$ 是奇数，并且 $a\beta^2+b\beta+c$ 是奇数，因此 $a\beta^2+b\beta=\beta(a\beta+b)$ 是偶数．由于 $\beta$ 是奇数，因此 $a\beta+b$ 是偶数．又由于 $\beta$ 是奇数，因此 $a$ 与 $b$ 必须同奇或同偶．

要证明二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 没有奇数根，仅需证明：对任意的一个奇数 $\beta'$，都有

$$a\beta'+b\beta'+c\neq 0$$

即可.

其实,由于 $a$ 与 $b$ 同奇或是同偶,对任意一个奇数 $\beta'$,总有 $a\beta'+b$ 是偶数. 由此

$a\beta'^2+b\beta'+c=\beta'(a\beta'+b)+c=$ 偶数 $+$ 偶数 $\neq 0$.

所以方程 $ax^2+bx+c=0$ 没有奇数根.

**说明**:要证明方程 $ax^2+bx+c=0$ 没有奇(偶)数根,仅需证明对于任意的一个奇(偶)数 $\beta$,总有 $a\beta^2+b\beta+c\neq 0$ 即可.

**练一练**

已知一个偶数 $\beta$,使得整系数二次三项式 $ax^2+bx+c$ 的值 $a\beta^2+b\beta+c$ 是奇数. 求证:方程 $ax^2+bx+c=0$ 没有偶数根.

**例** 10 三个质数之积恰好等于它们的和的 7 倍,求这三个质数.

**解**:根据题意,若设三个质数分别为 $x,y,z$,则 $x+y+z=\frac{xyz}{7}$,这样三个质数中必有一个质数是 7. 若 $x=7$,则 $yz=y+z+7$,也就是 $yz-(y+z)=7$.

根据整数的奇偶性:偶数－奇数＝奇数;奇数－偶数＝奇数,进行讨论.

当 $yz$ 为偶数时,其中 $y$(或 $z$)必定是 2,则 $2\times3-(2+3)=1$;$2\times5-(2+5)=3$;$2\times11-(2+11)=9$;…均不符合条件. 因此,偶数－奇数＝奇数不符合条件.

当 $yz$ 为奇数时,其中 $y,z$ 均为奇数,则 $y+z$ 是偶数. 若 $y=3,z=5$,$3\times5-(3+5)=7$,符合条件.

因此,这三个质数分别是 3,5 和 7.

**例** 11 黑板上写着三个整数,任意擦去其中一个,将它改写成为其他两数的和减去 1. 这样继续下去,最后得到 117,2001,2003,问原来的三个数能否是 2,2,2?

**解**:答案是否定的. 我们利用奇偶性来说明这一点.

我们按照问题中说的方式首先把 2,2,2 变为 2,2,3,其中

两个偶数，一个奇数．以后无论改变多少次，总是两个偶数，一个奇数(数值可以改变，但奇偶性不变)．但 117,2001,2003 是三个奇数，所以按照题中所述方式 2,2,2 永远不会变为 117,2001,2003.

**说明**:本例解答的决窍在于考察数字变化后的奇偶性．117,2001,2003 这三个数并无特别意义，我们只用到它的奇偶性(都是奇数).

**例** 12　设 $a_1,a_2,\cdots,a_{64}$ 是正整数 $1,2,\cdots,64$ 的任意一种排列．令

$$b_1=|a_1-a_2|,b_2=|a_3-a_4|,\cdots,b_{32}=|a_{63}-a_{64}|;$$
$$c_1=|b_1-b_2|,c_2=|b_3-b_4|,\cdots,c_{16}=|b_{31}-b_{32}|;$$
$$d_1=|c_1-c_2|,d_2=|c_3-c_4|,\cdots,d_8=|c_{15}-c_{16}|;$$
$$\cdots\qquad\qquad\qquad\cdots$$

这样一直作下去，最后得到一个整数 $x$. 求证:$x$ 为偶数．

**证法** 1:假设 $x$ 是奇数，那么上述计算过程中倒数第二步里的两个数必然是一个奇数一个偶数．再往前推一步，得知倒数第三步里的四个数只能或是三个奇数一个偶数，或是一个奇数三个偶数，总之只能是奇数个奇数．依此推知，在计算过程中的每一步里，只能有奇数个奇数，连“初始状态”也不例外，但由于它们是 $1,2,\cdots,64$ 的某一排列，其中奇数的个数为 32 个，这是一个偶数，这就产生了矛盾．

**证法** 2:我们知道，$|a-b|$ 与 $a+b$ 奇偶性相同．由此可知，上述计算的第一步中，32 个数

$$|a_1-a_2|,|a_3-a_4|,\cdots,|a_{63}-a_{64}|$$

分别与下列 32 个数

$$a_1+a_2,a_3+a_4,\cdots,a_{63}+a_{64}$$

有相同的奇偶性．这就是说，在只考虑奇偶性的时候，可以不注意绝对值符号，而且可以用“和”代替“差”．这样可以把原来的计算过程改为

第一步：$a_1, a_2, a_3, a_4, \cdots, a_{61}, a_{62}, a_{63}, a_{64}$；

第二步：$a_1+a_2, a_3+a_4, \cdots, a_{61}+a_{62}, a_{63}+a_{64}$；

第三步：$a_1+a_2+a_3+a_4, \cdots, a_{61}+a_{62}+a_{63}+a_{64}$；

……

现在的问题是：要决定最后一步所得出的那一个整数的奇偶性．

很明显，最后那一个数是 $a_1+a_2+\cdots+a_{64}$．由于 $a_1, a_2, \cdots, a_{64}$ 是 $1, 2, \cdots, 64$ 的一个排列，因此它们的总和为 $1+2+\cdots+64$ 是一个偶数．故最后一个整数是偶数．

**练一练**

在黑板上写上 $1, 2, 3, \cdots, 2004$，只要黑板上还有两个或两个以上的数，就擦去其中的任意两个数 $a$ 和 $b$，并写上 $|a-b|$，问最后黑板上剩下的数是奇数还是偶数？

**例 13**　如图 1－1，将 1，2，3，4，5，6，这 6 个数字分别填入 3 个顶点及每条边的中点的圆圈内．如果要使每条边上的 3 个数字之和都等于 10，那么符合上述条件的填法能否实现？如果能实现，有多少种不同的填法？如果不能实现，请说明理由．

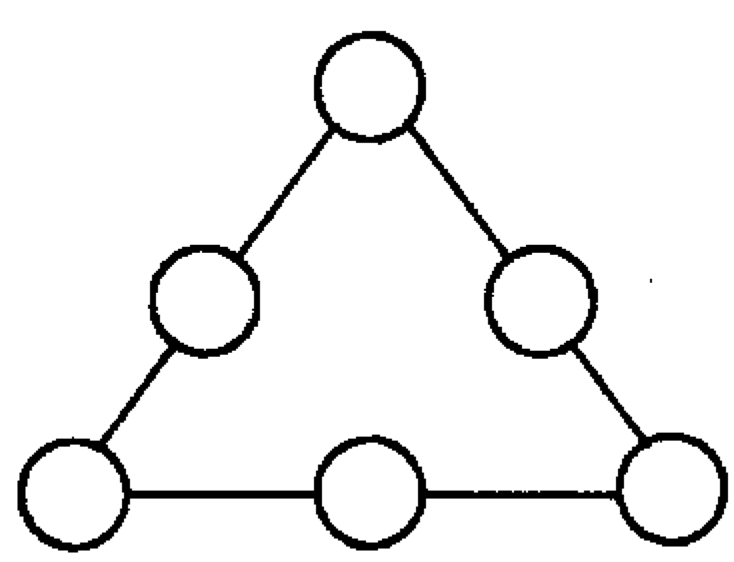


图 1－1

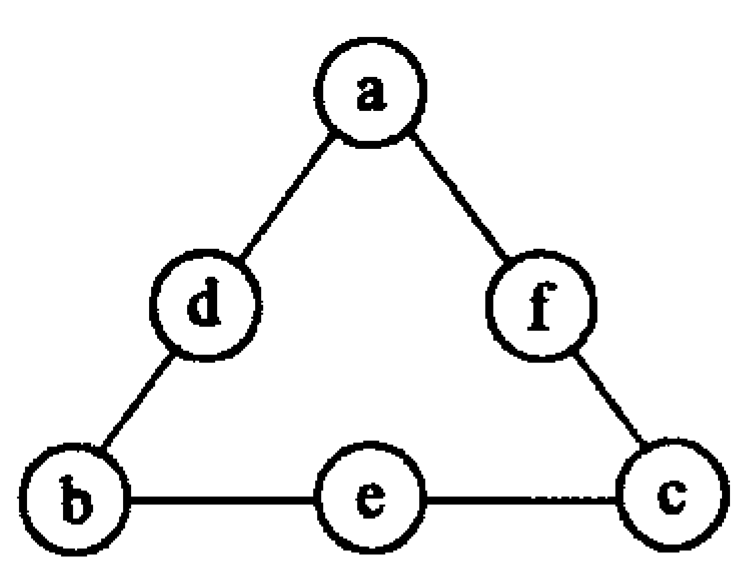



图 1－2

**解**：设 6 个圆圈内的数分别为 $a, b, c, d, e, f$（如图 1－2）．由题意，有

$$a+d+b=b+e+c=c+a+f=10,$$

即　$2(a+b+c)+(d+e+f)=30.$

$\because$　$a+b+c+d+e+f=21,$

∴　$a+b+c=30-21=9$(奇数).

∴　$a,b,c$ 必是三个奇数或一个奇数两个偶数．

下面分两种情况讨论．

(1)若 $a,b,c$ 为一个奇数两个偶数，不妨设 $a,b$ 为偶数，$c$ 为奇数，则 $d=10-(a+b)$ 为偶数，从而 $a,b,d$ 只能取2,4,6，这与 $a+d+b=10$ 矛盾，这种情况是不可能的．

(2)若 $a,b,c$ 都是奇数，容易验证下面6种填法均符合要求：

①$a=1,d=6,b=3,e=2,c=5,f=4$;

②$a=1,d=4,b=5,e=2,c=3,f=6$;

③$a=3,d=6,b=1,e=4,c=5,f=2$;

④$a=3,d=2,b=5,e=4,c=1,f=6$;

⑤$a=5,d=4,b=1,e=6,c=3,f=2$;

⑥$a=5,d=2,b=3,e=6,c=1,f=4$.

**例14**　27名小运动员所穿运动服的号码恰是1,2,3,…,26,27这27个正整数．问这些小运动员能否站成一个圆圈，使得任意相邻的两个运动员号码之和都是质数？说明理由．

**解法1**:不能．不同的两个奇数、两个偶数之和都是大于2的偶数，它必是合数．所以要使任意相邻的两个运动员号码之和都是质数，这些质数必都是奇数．因此，相邻两运动员号码必定奇偶性相反．这样一来，运动员必须号码奇偶相间地排成一圈，这表明号码为奇数的运动员与号码为偶数的运动员个数必相等．因此，运动员总数为偶数个．这与运动员个数是奇数(27)不符．所以，题设要求的站圈的排列方式是不能办到的．

**解法2**:不同的两个奇数、两个偶数之和都是大于2的偶数．所以，要使任意两个运动员号码之和都是质数，这些质数必定都是奇数．这样，一方面由于相邻的运动员号码的和是27个奇数的和，它应是个奇数；另一方面，这个和又等于 $2\times(1+2+3+\cdots+26+27)$ 是个偶数，导致矛盾．因此，题设要求的站圈排列

方式不能办到.

## 习题 1.3

### A 组

1. 在 $1^2,2^2,3^2,\cdots,95^2$ 这 95 个数中,十位数字为奇数的个数为________.

2. 将和 $1+2+3+4+5+6+7+8+9$ 中的若干个"+"号换成"−"号,设其非负代数和为 $x$,则 $x$ 的最小值为________.

3. 若 $a,b,c,d$ 是正整数,且 $a^2+b^2+c^2=d^2$,则 $ab$ 的奇偶性是________.

4. 整数 $2^3+3^4+4^5+5^6$ 的奇偶性是________.

5. 若 $3n^2+2n+7$ 是一个偶数,则整数 $n$(  )

(A)一定是奇数 (B)一定是偶数

(C)有时为奇数有时为偶数 (D)是任意整数

6. 在九张卡片上分别写上数字 $1,2,3,\cdots,9$,现将卡片顺序打乱,让空白面朝上,再写上 $1,2,3,\cdots,9$,然后将每张卡片上的两个数字作差,则九个差的积(  )

(A)一定是奇数 (B)一定是偶数

(C)可以是奇数或偶数 (D)一定是负数

7. 桌上放有 10 枚硬币,第一次翻动 10 枚,第二次翻动其中 9 枚,第三次翻动其中的 8 枚,…,第九次翻动其中的 1 枚.问能否使桌面上所有硬币原先朝下的一面全部朝上?说明现由.

8. 已知正整数 $a,b,c,d$ 之和 $a+b+c+d$ 为奇数,问 $a^2+b^2+c^2+d^2$ 是奇数还是偶数?说明理由.

9. 已知 $x_1,x_2,\cdots,x_{10}$ 取值 1 或 −1,求证:$x_1+2x_2+3x_3+9x_9+x_{10}\neq 0$.

## B 组

1. 设 $a,b,c$ 都是整数，且 $a+b+c$ 是偶数．求证：$a+b-c$，$b+c-a$，$c+a-b$ 都是偶数．

2. 是否存在正整数 $m$，满足 $1+2+3+\cdots+m=1024$？

3. 是否存在四个整数 $a,b,c,d$，同时满足四个等式

$$abcd-a=2003,$$
$$abcd-b=20032003,$$
$$abcd-c=200320032003,$$
$$abcd-d=2003200320032003.$$

4. 设 $a$ 和 $b$ 是两个相邻的整数，$c=ab$，$M^2=a^2+b^2+c^2$，求证：$M^2$ 是奇数．

5. 某电影院共有 2003 个座位．一天，这家电影院上、下午各演一场电影，看电影的是甲、乙两所中学的各 2003 名学生(同一学校的学生有的看上午场，也有的看下午场)．试证明：电影院中一定有这样的座位，这天看电影时，上、下午在这个座位上坐的是两个不同学校的学生．

6. 在一次象棋比赛中，每两个选手恰好比赛一局，每局赢者记 2 分，输者记 0 分，平局每个选手各记 1 分．今有四个人统计了这次比赛中全部得分总数．由于有的人粗心，其数据各不相同，分别是 1979，1980，1984，1985．经核实，其中有一个统计无误．问这次比赛有多少选手参加？

7. 证明，改变一个正整数各位数字的顺序后得到的数与原数之和不能等于$\underbrace{99\cdots9}_{1999\text{个}9}$.

8. 代数式

$$rvz-rwy-suz+swx+tuy-tvx$$

中，$r,s,t,u,v,w,x,y,z$ 可以分别取 $+1$ 或 $-1$.

(1)证明代数式的值必是偶数；

(2)求这个代数式所能取得的最大值．

# §1.4 奇数和偶数(二)

因为一个整数被 2 除所得的余数只有 0 和 1 这两个数，因此把所有整数分为奇数和偶数两大类，既不会有一个整数同时出现在奇数类和偶数类，也不会有一个整数既不在奇数类又不在偶数类．这种分类方法使得我们可以把对整数问题的研究转化为奇数和偶数的研究，即用整数的两种状态来研究整数．因此，在解题时，还可以用另外的表示两种状态的形式来表示奇偶数．例如，用红色来代表奇数，用黄色来代表偶数，即用染色法表述奇偶数；也可以用整数被 2 除的余数，即 0 代表偶数，1 代表奇数；或者用 $-1$ 代表奇数，$+1$ 代表偶数，即用赋值法表述奇偶数．用染色法或赋值法进行奇偶性分析，有时使解题更为直观，更为简洁．

**例 1** 某展览会有如图 1－3 的 $7\times7=49$ 间展厅，相邻展厅都有门可通，参观者从图中的 1 号展厅开始参观，希望依次不重复，也不遗漏地参观每一个展厅，并且仍然回到 1 号展厅开始参观，试问参观者的愿望能否实现？

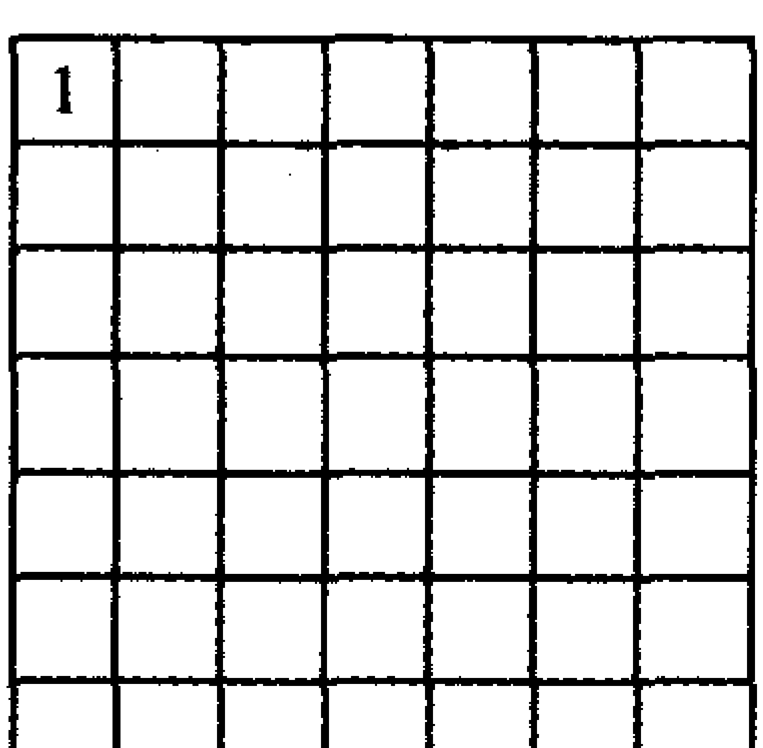



图1-3

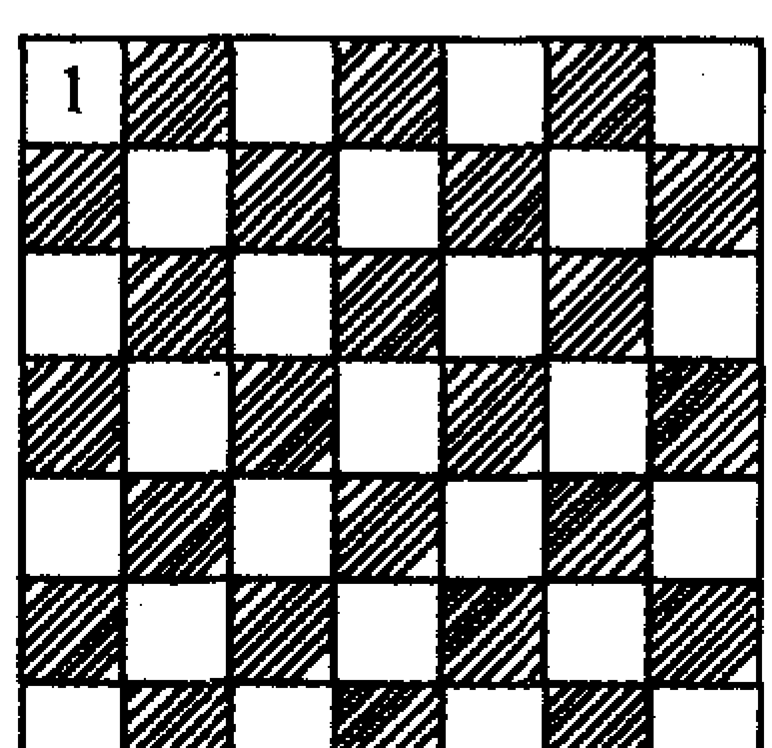



图1-4

**解**：为了便于思考，我们把展厅做一番布置．把 1 号展厅涂上黄色，再把相邻的展厅涂上红色，继而如图 1－4 那样，采取

红、黄相间的方法涂色(阴影所示的展厅为红色). 显然,每个参观者从黄厅出来只能进入相邻的红厅,从红厅出来只能进入相邻的黄厅,并且从 1 号展厅出发,再回到 1 号展厅,必须进行 49 次移动,即从 1 号展厅出发,经过 49 次移动再回到黄厅.

现在考察参观者的参观路线,他第 1 次移动进入红厅,第 2 次移动进入黄厅,第 3 次移动进入红厅,第 4 次移动进入黄厅,…,由此看出,他第奇数次移动一定进入红厅,第偶数次移动一定进入黄厅,而按题目要求,第 49 次(奇数次)移动应回到 1 号黄厅,这显然是不可能的,所以参观者的愿望不能实现.

**说明**:在这里,我们借助于染色的帮助进行了奇偶性分析,虽然是对展厅染色,而实际上是移动第奇数次到达的位置染红色,移动第偶数次达到的位置染黄色,从而使问题明朗化了.

**练一练**

某班有 49 位同学,坐成 7 行 7 列,每个座位的前、后、左、右相邻的位子都叫做他们的邻座. 要让这 49 位同学中的每一位都换到其邻座上去,能否办到?

**例 2** 证明:15 块 $4\times1$ 的矩形骨牌和 1 块 $2\times2$ 的正方形骨牌不能盖住 $8\times8$ 的正方形.

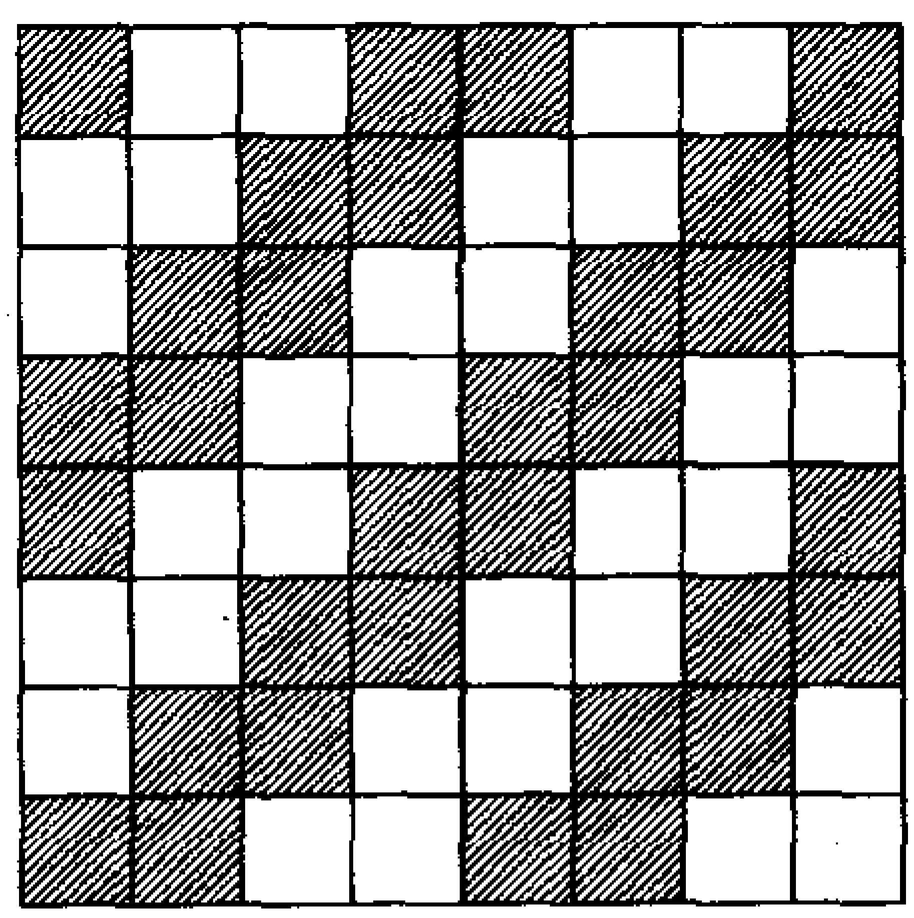


**图 1—5**

**证明**:将 $8\times8$ 的正方形的小方格用红、黄色涂色(如图 1—5). 每一块 $4\times1$ 骨牌不论怎么铺设都恰好盖住两个黄格,因此 15 块 $4\times1$ 的骨牌能盖住偶数个黄格. 一块 $2\times2$ 的骨牌只能盖住一个或三个黄格,总之能盖住奇数个黄格. 于是 15 块 $4\times1$ 骨牌和一块 $2\times2$ 骨牌在图上盖住的黄格是奇数个. 事实上,图上的黄格恰为偶数个,故不能盖住 $8\times8$ 的正方形.

**例 3** 高为 50cm,底面周长为 50cm 的圆柱,如图 1—6 所示,在此圆柱的偶面划分边长为 1cm 的正方形. 如图 1—7 所

示，用四个边长为 1cm 的小正方形构成"T"字形，用此图形是否能拼成圆柱侧面？试说明理由．

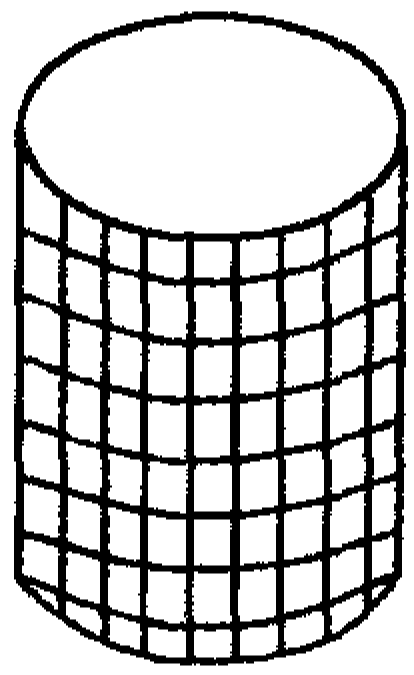


图1-6

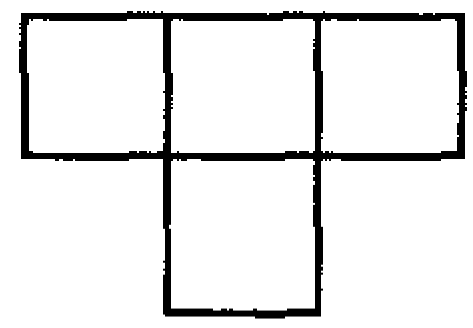


图1-7

**解**：不能．

因为圆柱侧面是 $50\times50$ 的正方形，将其红黄相间染色，则红格与黄格各有偶数个．

又因为每个"T"字形含有 3 个或 1 个红格，若能用"T"字形纸片拼成 $50\times50$ 的正方形，则需要 $(50\times50)\div4=625$ 个"T"字形，而 625 个"T"字形含有奇数个红格，矛盾．因此，不可能拼成．

**练一练**

将 $8\times8$ 的方格纸片的左下角和右上角的小格剪去．试证明：用 31 张 $1\times2$ 的小长方形纸片不能完全盖住这一张残缺纸片．

**例 4**　在一个国家里，国王要建 $n$ 个城市，并在它们之间建 $n-1$ 条道路，使得从每个城市可走到任一个城市（每条道路连结两个城市，道路不相交也不经过其它城市），国王要求每两个城市沿路网的最小路程分别等于 1 千米，2 千米，3 千米，…，$\frac{1}{2}n(n-1)$ 千米，这样的要求能否做到？

(1)$n=6$ 时；$n=2003$ 时．

**解**：(1)$n=6$ 时，可设计如下道路：

其中 $A,B,C,D,E,F$ 为六个城市，如图 1—8 所示，数 1，2，4，5，8 为道路的千米数．

$A\to C$：1 千米；$B\to C$：2 千米；$A$（经 $C$）$\to B$：3 千米；

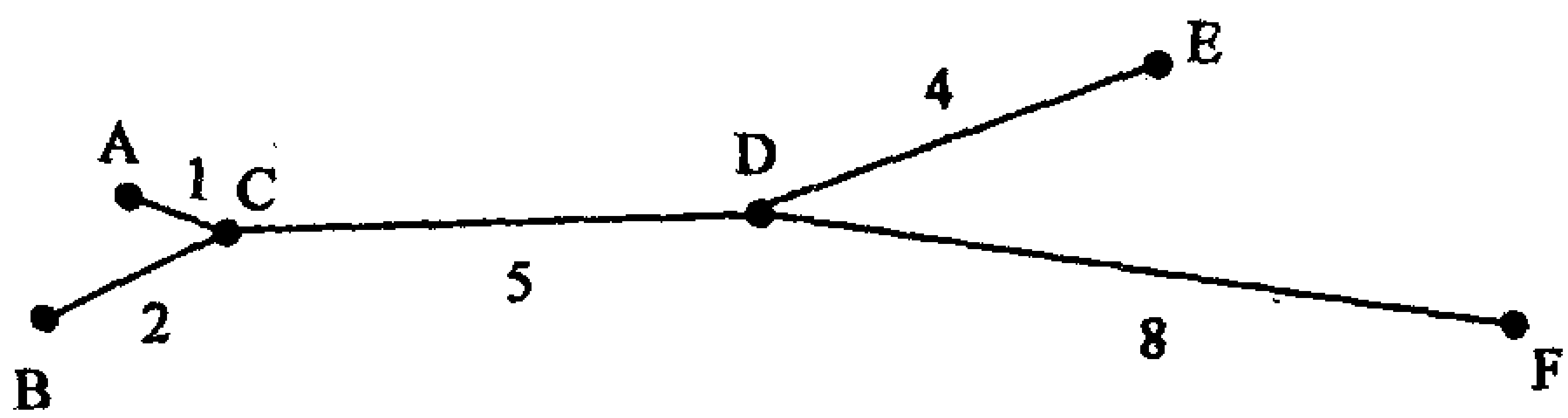



图1-8

$D\to E$：4 千米；$C\to D$：5 千米；$A$(经 $C$)$\to D$：6 千米；$B$(经 $C$)$\to D$：7 千米；$D\to F$：8 千米；$C$(经 $D$)$\to E$：9 千米；$A$(经 $C$, $D$)$\to E$：10 千米；$B$(经 $C,D$)$\to E$：11 千米；$E$(经 $D$)$\to F$：12 千米；$C$(经 $D$)$\to F$：13 千米；$A$(经 $C,D$)$\to F$：14 千米；$B$(经 $C,D$)$\to F$：15 千米．

所以符合国王要求．

(2)先考虑一般的情形．

根据 $n$ 个城市间建 $n-1$ 条道路的要求可知，从任一城市到另一城市只有唯一的路线．

把城市 $A$ 染上红色，若城市 $B$ 与 $A$ 之间的路程为偶数，则 $B$ 也染成红色，否则染上黄色．这样可以把所有城市均染成红色或黄色，并且两城市同色时，它们之间的路程来偶数，当两城市异色时，它们之间的路程为奇数．

设有 $x$ 个城市染红色，$y$ 个城市染黄色，则由一个红色城市与一个黄色城市配对可配 $xy$ 对，因而在所有的路程中，有 $xy$ 个奇数．

若$\frac{1}{2}n(n-1)$是偶数，则 $1,2,\cdots,\frac{1}{2}n(n-1)$中有一半是奇数，因而有

$$xy=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}n(n-1)\right].$$

又　$x+y=n$,

∴　$n=n^2-4xy=(x+y)^2-4xy=(x-y)^2$.

若$\frac{1}{2}n(n-1)$是奇数，则 $1,2,\cdots,\frac{1}{2}n(n-1)$中有$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}n(n\right.$

$-1)+1]$个奇数，因而有

$$xy=\frac{1}{2}[\frac{1}{2}n(n-1)+1].$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad n&=n^2-4xy+2\\&=(x-y)^2+2.\end{aligned}$$

即 $n-2=(x-y)^2$.

于是，若题设的要求能实现，则 $n$ 或 $n-2$ 是完全平方数，而 2003 或 2003－2 都不是完全平方数，所以国王的要求不能实现.

**例** 5　如图 1－9，在一个圆周上依次排列 $n$ 个点 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，对每个点任意涂上红色或蓝色，求证：在连接相邻两点的 $n$ 条圆弧 $\overset{\frown}{A_1A_2},\cdots,\overset{\frown}{A_2A_3},\ \overset{\frown}{A_{n-1}A_n}\ ,\overset{\frown}{A_nA_1}$ 中，端点不同色的圆弧数必是偶数.

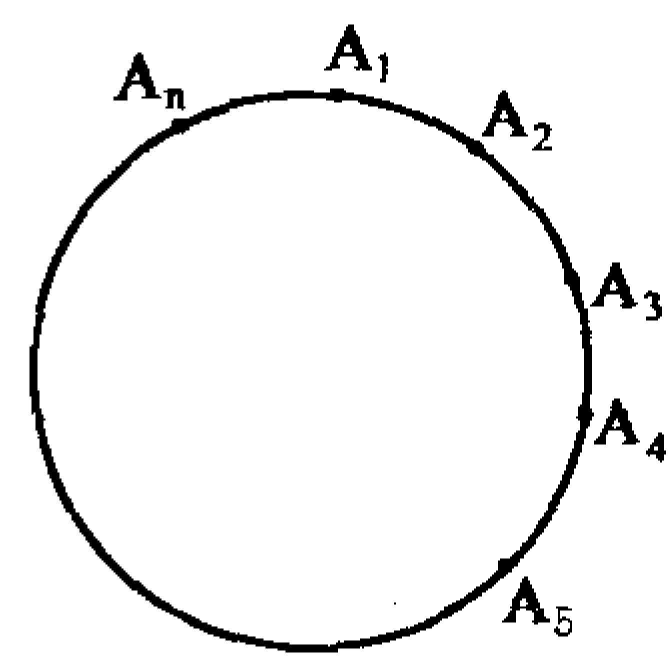



**图** 1－9

**证明**：将圆弧端点为红色的赋值 1，蓝色赋值－1. 用圆弧端点上的数值积表示这条圆弧对应的数值，则“端点不同色的圆弧”对应数值－1. 设“端点不同色的圆弧”有 $k$ 条，并用端点字母表示所赋的值，则

$$(A_1A_2)(A_2A_3)(A_3A_4)\cdots(A_{n-1}A_n)(A_nA_1)=A_1^2A_2^2A_3^2\cdots A_{n-1}^2A_n^2,$$

$$\therefore\quad(-1)^k=1,\qquad\therefore\quad k\text{是偶数}.$$

故端点不同色的圆弧数是偶数.

**练一练**

若将题中的圆周从 $A_1,A_n$ 之间剪开，并将圆周拉成直线，附加条件 $A_1$ 与 $A_n$ 异色，则得到如下问题：

在直线 $l$ 上依次排列着 $n$ 个点 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，对每个点任意涂上红色或蓝色，又已知 $A_1$ 与 $A_n$ 异色. 那么，在线段 $A_1A_2,A_2A_3,\cdots,A_{n-1}A_n,A_nA_1$ 中，端点不同色的线段是奇数还是偶数？并说明理由.

**例** 6　将正方形 $ABCD$ 分割成 $n^2$ 个相等的小方格（$n$ 是正

整数)，把相对的顶点 $A$，$C$ 染红色，$B$，$D$ 染成蓝色，其他交点染成红、蓝两色中任一种颜色．证明：恰有三个顶点同色的小方格数目必是偶数．

**证明**：不妨将红色记为 1，蓝色记为 $-1$，并将小方格编号，分别记为 $1,2,\cdots,n^2$，记第 $i$ 个小方格四个顶点相应数字的乘积为 $A_i$，若恰有三个顶点同色，则 $A_i=-1$，否则 $A_i=1$.

在乘积 $A_1A_2\cdots A_{n^2}$ 中，正方形内部的交点各点相应的代表数重复了 4 次；边上非顶点各点相应的代表数重复了 2 次；$A$，$B$，$C$，$D$ 四点相应的代表数乘积为 1，所以 $A_1A_2\cdots A_{n^2}=1$. 这说明 $A_1,A_2,\cdots,A_{n^2}$ 中 $-1$ 的个数必是偶数，也就是恰有三个顶点同色的小方格数必是偶数．

**说明**：本例也可以将红点记为 0，蓝点记为 1，并记第 $i$ 个小方格四个顶点相应数字之和为 $A_i(i=1,2,\cdots,n^2)$. 若恰有三个顶点同色，则 $A_i=1$ 或 3，否则 $A_i$ 为偶数．然后从考虑和 $A_1+A_2+\cdots+A_{n^2}$ 的奇偶性入手进行论证．

**例 7**　表甲是一个英文字母电子显示盘，每一次操作可以使某一行 4 个字母同时改变，或者使某一列 4 个字母同时改变，改变的规则是：按照英文字母表的顺序每个英文字母变成它下一个字母(即 $A$ 变成 $B$，$B$ 变成 $C$，$\cdots$，最后字母 $Z$ 变成 $A$).

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $S$ | $O$ | $B$ | $R$ | $K$ | $B$ | $D$ | $S$ |
| $T$ | $Z$ | $F$ | $P$ | $H$ | $E$ | $X$ | $G$ |
| $H$ | $O$ | $C$ | $N$ | $R$ | $T$ | $B$ | $S$ |
| $A$ | $D$ | $V$ | $X$ | $C$ | $F$ | $Y$ | $A$ |

表甲　　　　表乙

问：能否经过若干次操作，使表甲变成表乙？如果能，请写出变化过程；如果不能，说明理由．

**解**：26 个字母可以用 1～26 这 26 个数来表示，如果从奇偶性考虑，则一半是奇数，一半是偶数．为简便起见，我们又将表

示为奇数的字母:$A,C,E,G,I,K,M,O,Q,S,U,W,Y$ 记作 1,将表示为偶数的字母:$B,D,F,H,J,L,N,P,R,T,V,X,Z$ 记作 0. 这样一来表甲、表乙又可分别写成

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 0 | | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | | 1 | 0 | 1 | 1 |

表丙　　　　表丁

每一次操作则将同一行或同一列的 1 改为 0,0 改为 1.

由于每一行(列)有 4 个数,故其中 1 的个数 $a$ 与 0 的个数 $b$ $(=4-a)$有相同的奇偶性. 每次操作将 1 与 0 互换,从而个数 $a$ 与 $b$ 互换,所以操作的结果不改变 1 的个数的奇偶性.

表丙中,原有 5 个 1,无论经过多少次操作,表中 1 的个数始终为奇数. 而表丁中,1 的个数为 8. 这表明表丙不可能经过上述操作变为表丁,即表甲不可能经过上述操作变为表乙.

**例 8**　桌面上 $p(p>100)$个杯子,杯口全部向上. 按如下规则对杯子进行操作:第 1 次任意翻动其中 1 个杯子,第 2 次任意翻动其中 2 个杯子,…,第 $n$ 次任意翻动其中 $n(n\leqslant p)$个杯子. 每次操作都是把杯口的方向由原来的向上(或向下)改为向下(或向上). 求证:翻动 100 次以后,杯口向下的杯子必有偶数个.

**证明**:给杯口向上的杯子赋值+1,杯口向下的杯子赋值-1,则操作前各杯子的数值之积为 $a_0=1$. 设第 $n$ 次操作后各杯子的数值之积为 $a_n$,依题意,如果有 $a_{100}=1$,则命题必成立. 因为翻动一个杯子,相当于将该杯子的数值乘以-1,故

$a_n=(-1)^n a_{n-1}(n\geqslant 1)$. 由此得

$a_1=(-1)a_0$,

$a_2=(-1)^2 a_1$,

$$a_3=(-1)^3a_2,$$

$$\cdots$$

$$a_{100}=(-1)^{100}a_{99}.$$

将以上各式相乘，并约去公因式，得

$$a_{100}=a_0(-1)^{1+2+\cdots+100}=1\times(-1)^{5050}=1.$$

故命题获证．

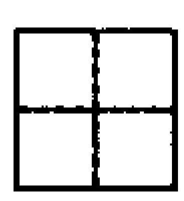
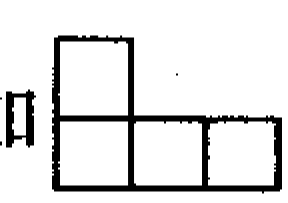
**练一练**

15 只茶杯，杯口向上，将其中 6 只茶杯同时翻转称为一次运动，问能否经过若干次运动，使 15 只茶杯全部为杯口向下？

## 习题 1.4

### A　组

1. 某班学生（人数大于 2）围成一圈席地而坐，并且按照以下规则戴上红帽或蓝帽：如果一个学生的两旁都是男生或都是女生，这个学生就戴红帽；否则就戴蓝帽．求证：戴蓝帽的学生数目必为偶数．

2. 能否用 9 块如  的小纸片及 7 块形如  的小纸片盖满 $8\times8$ 的棋盘？为什么？

3. 13 只茶杯，开始时杯口全朝上，每次翻动其中的 4 只算一次翻转，能否经过有限次翻转把茶杯全翻转成杯口朝下？为什么？

### B　组

1. 已知$\triangle ABC$ 内有 $n$ 个点（无三点共线），连同 $A,B,C$ 共 $n+3$ 个点，以这些点为顶点，把$\triangle ABC$ 分割为若干个互不重叠的小三角形，现把 $A,B,C$ 分别染成红色、蓝色、黄色，而其余 $n$ 个点，每点任意染上红、蓝、黄三色之一，证明：三顶点都不同色

的小三角形总数必是奇数．

2．在$(2m+1)\times(2n+1)$的方格纸上，每个方格内有一只蚂蚁，假设在某一时该所有的蚂蚁都爬到相邻（横向或纵向）的方格里去，证明：这时一定出现一个没有蚂蚁的方格．

3． 今有$A_1,A_2,\cdots,A_n$共$n$个人．$A_1$说$A_2$讲假话，$A_2$说$A_3$讲假话，$\cdots$，$A_{n-1}$说$A_n$讲假话，而$A_n$却说$A_1,A_2,\cdots,A_{n-1}$都讲假话，唯有他一人讲真话．试问：他们之中，究竟谁讲真话？谁讲假话？

4．某班有50个学生，男女各占一半，他们围成一圈，席地而座开营火晚会，求证：必能找到一位两旁都是女生的学生．

5．求证：$8\times8$国际象棋盘不可能被剪成7个$2\times2$正方形小棋盘与9个$1\times4$小长条．

## §1.5　质数与合数

对于正整数可以依照它们的正约数的个数分为三类:一类是只有一个正约数的数,它就是 1;一类是只有两个正约数的数,这两个正约数只能是 1 和它本身,例如 5,7,这样的数叫做质数(也叫素数);第三类是有两个以上的正约数的数,例如 6 就有 4 个正约数:1,2,3,6,这样的数叫做合数.因此,正整数是由 1,质数和合数三部分组成的.

关于质数、合数有下列性质:

(1)质数有无限多个.

证明:假设质数只有有限多个,比如只有 $n$ 个,设这 $n$ 个质数为 $p_1, p_2, \cdots, p_n$.

现在构造一个新数

$$a=p_1 p_2 \cdots p_n+1.$$

如果 $a$ 是质数,显然,$a$ 是一个与 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 不同的一个质数.这说明只有 $n$ 个质数的假设是错误的.

如果 $a$ 是合数,则 $a$ 必有一个质约数 $p$,使 $a=pq$,则

$$pq=p_1 p_2 \cdots p_n+1.$$

显然,$p$ 不是 $p_1$,否则,1 能被 $p_1$ 整除,同理 $p$ 也不是 $p_2$,不是 $p_3, \cdots$,不是 $p_n$,即 $p$ 是 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 之外的一个质数,同样与仅有 $n$ 个质数的假设相矛盾.

因此,质数有无限多个.

性质(1)的证明告诉我们,若知道质数 $p_1, p_2, \cdots, p_n$,则从数 $p_1 p_2 \cdots p_n+1$ 或其约数中一定能找到一个新质数.

(2)除 2 以外的全体质数都是正奇数,除 2 以外的全体正偶数都是合数.

性质(2)表明,偶数中仅有一个质数 2,它也是最小的质数.

**例 1**　设 $p, q, r$ 都是质数,并且

$$p+q=r, p<q,$$

求 $p$.

解：由于 $r=p+q$，所以 $r$ 不是最小的质数，从而 $r$ 是奇数，所以 $p,q$ 为一个奇数一个偶数．因为 $p<q$，故 $p$ 既是质数又是偶数，于是 $p=2$.

**练一练**

当 $p=2$ 时，$r=2+q$，满足 $r=2+q$ 的两个质数叫做孪生质数，请写出前十对孪生质数．

**例 2** 设 $a,b,c$ 均为质数，且 $a+b+c=68$，$ab+bc+ca=1121$，求 $abc$ 的值．

**分析**：要求 $abc$ 的值，不一定要把 $a,b,c$ 都求出来．注意到 3 个质数的和 $a+b+c=68$ 是偶数，所以 $a,b,c$ 中必有一个是偶数，它只能是 2，代入第二个等式，便可求出另两个数的乘积．

**解**：不妨设 $a\leqslant b\leqslant c$.

由 $a+b+c=68$，得 $a=2$，则 $b+c=66$，代入 $a(b+c)+bc=1121$，得 $bc=989$.

故 $abc=1978$.

**练一练**

已知 $A=p^4(p^2q+1)$，其中 $p,q$ 为质数，且满足 $q-p=29$，试求 $A$.

答案：2000.

**例 3** 解方程：$x(x+y)=z+120$，其中 $x,y$ 是质数，$z$ 是奇质数．

**解**：$\because$ $z$ 是奇数，

$\therefore$ $z+120$ 是奇数，

$\therefore$ $x$ 和 $x+y$ 均为奇数，

$\therefore$ $y=(x+y)-x$ 为偶数．

又 $y$ 为质数，　$\therefore$ $y=2$.

$\therefore$ $x(x+2)=z+120$,

$\therefore \quad x^2+2x-120=z,$

即 $\quad (x-10)(x+12)=z.$

又 $z$ 为质数,且 $x-10<x+12$,

$$\therefore \quad \begin{cases} x-10=1 \\ x+12=z. \end{cases}$$

$\therefore \quad x=11, z=23.$

故方程的解为$\begin{cases} x=11, \\ y=2, \\ z=23. \end{cases}$

在清楚了质数与合数的概念之后,人们总希望能找到一个表示质数和合数的公式,就像我们可以用式子 $2k$($k$ 是整数)来表示偶数,用 $2k-1$ 或 $2k+1$ 来表示奇数那样. 数学史上,一些著名的数学家进行了许多尝试,例如,数学家费尔玛(*Fermar*)曾猜想质数的表达试为 $2^{2^n}+1$,数学家欧拉(*Euler*)曾猜想质数的表述式为 $n^2+n+41$. 后来发现,这些猜想都是不确的. 可以验证,费尔玛的猜想在 $n=5$ 时,$2^{2^5}+1$ 能被 641 整除,不是质数. 欧拉的猜想在 $n=40$ 时,$40^2+40+41=41\times41$ 也不是质数.

事实上,由于质数的分布很不规则,人们至今还未发现一个一般的方法来判断正整数中哪些是质数. 下面的两个性质有助于我们来判断一些正整数是否为质数.

(3)大于 1 的整数的所有约数中,1 以外的最小正约数一定是质数.

(4)如果 $a$ 是合数,那么 $a$ 的最小质因数一定不大于$\sqrt{a}$.

性质(3)是很明显的,性质(4)可以这样证明:

设 $a=bq$,因为 $a$ 是合数,则 $b$ 和 $q$ 都是大于 1 的整数. 又设 $q$ 是 $a$ 的最小质因数,即 $b\geqslant q$.

如果 $q\leqslant\sqrt{a}$不成立,则必有 $q>\sqrt{a}$,此时更有 $b>\sqrt{a}$,于是

$$a=bq>\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}=a,$$

出现矛盾，故 $q\leqslant\sqrt{a}$.

性质(4)表明，一个合数 $a$ 一定是不大于$\sqrt{a}$的某些质数的倍数．换句话说，如果所有不大于$\sqrt{a}$的质数都不能整除 $a$（$a\neq 1$），那么 $a$ 一定是质数．这便给出了判断一个正整数是不是质数的方法．

例如，判断 191 是不是质数．因为不大于 $\sqrt{191}<14$ 的质数有 2，3，5，7，11，13，由于 191 不能被 2，3，5，7，11，13 整除，所以 191 是质数．

利用这种方法还可以求不大于 $a$ 的所有质数，例如，求 50 以内的全体的质数．由于不大于 $\sqrt{50}<8$ 的质数有 2，3，5，7，可在 2，3，4，…，50 中依次划去 2，3，5，7 的倍数（保留 2，3，5，7），最后余下的数 2，3，5，7，11，13，17，19，23，29，31，37，41，43，47 就是 50 以内的全体质数．这就是著名的爱拉托斯散质数筛选法．

**练一练**

分别判断 107，437 是质数还是合数？

下面再看几个判断质数与合数的例题．

**例 4**　若 $n$ 是正整数，且$\dfrac{n^3-1}{5}$是一个质数，求 $n$ 的值．

**解**：$\because$　$\dfrac{n^3-1}{5}=\dfrac{(n-1)(n^2+n+1)}{5}$是一个质数，

$\therefore$　$5\mid(n-1)(n^2+n+1)$，

$\therefore$　$5\mid(n-1)$，或 $5\mid(n^2+n+1)$.

若 $5\mid(n^2+n+1)$，$\because$　$n>1$，

$\therefore$　$n^2+n+1\geqslant2^2+2+>15$.

又　$\dfrac{(n-1)(n^2+n+1)}{5}$是质数，

$\therefore n-1=1$，即 $n=2$.

但此时 $n^2+n+1=7$，与 $5\mid n^2+n+1$ 矛盾，

$\therefore\quad 5\mid(n-1)$.

又　$n^2+n+1>1$,

$\therefore\quad n-1=5$, 即　$n=6$.

此时$\frac{n^3-1}{5}=43$是质数.

综合上述, $n=6$.

**例** 5　设 $n$ 为正整数, 且 $n$ 与 $5n^2+3$ 均为质数, 求证: $5n^2+4n+1$ 也是质数.

**证明**: 若 $n$ 为奇质数, 则 $5n^2$ 为奇数,

$\therefore\quad 5n^2+3$ 为偶数.

又$\because\quad n$ 为正整数, 显然 $5n^2+3>2$,

$\therefore\quad 5n^2+3$ 为合数, 这与 $5n^2+3$ 为质数矛盾.

$\therefore\quad n$ 为偶质数, 即 $n=2$.

当 $n=2$ 时, $5n^2+4n+1=5\times2^2+4\times2+1=29$ 为质数.

**例** 6　设 $p, p+10, p+14$ 都是质数, 试确定所有的 $p$.

**解**: 设 $p=3k+r(r=0,1,2)$.

(1)当 $r=1$ 时, $p=3k+1$, 则 $p+14=(3k+1)+14=3(k+5)$. 此时, $p+14$ 是合数. 这表明 $r=1$ 时, $p+14$ 不能是质数, 当然更不可能 $p, p+10, p+14$ 同为质数.

(2)当 $r=2$ 时, $p=3k+2$, 则 $p+10=(3k+2)+10=3(k+4)$. 此时, $p+10$ 是合数. 这表明 $r=2$ 时, $p+10$ 不能是质数, 当然更不可能 $p, p+10$、$p+14$ 同为质数.

由(1)(2)可知, 要使 $p, p+10$、$p+14$ 同为质数, 只能 $r=0$, 即 $p=3k$. 这时, 当且仅当 $k=1$ 时, $p=3$ 为质数. 此时, $p+10=13$, $p+14=17$ 也都是质数. 所以满足 $p$、$p+10$、$p+14$ 都是质数的 $p$ 值只有 3.

**说明**: 质数被 2 除, 除 2 外, 只能是 $2k+1$ 型的数; 质数被 3 除, 除 3 外, 只能是 $3k+1$ 与 $3k-1$ 型数; 依此类推, 特别地, 质数被 6 除, 只能是 $6k\pm1$ 型的数.

**练一练**

求质数 $p$,使 $p^2+2$ 也是质数.

答案:$p=3$.

**例** 7 若 $p$ 和 $p+2$ 都是大于 3 的质数,求证:$p+1$ 是合数,且 6 是它的一个约数.

**分析**:由 6 是 $p+1$ 的一个约数,提示我们应将质数 $p$ 被 6 除,分为两类,即 $6k\pm1$ 型的数.

**证明**:$\because$ 整数被 6 除可分为 $6k,6k+1,6k+2,6k+3,6k-2,6k-1$ 这六类,

$\therefore$ 质数 $p$ 只能是 $6k\pm1$ 型的数.

若 $p=6k+1$,则 $p+2=3(2k+2)$是合数,不合题意.

$\therefore$ $p=6k-1$,这时 $p+1=6k$ 是合数,且 6 是它的一个约数.

**例** 8 设 $m$ 为正整数,且 $1\times2\times3\times\cdots\times(m-1)+1$ 被 $m$ 整除,求证:$m$ 为质数.

**证明**:假设 $m$ 为合数,令 $m=pq(1<p<m,1<q<m)$,则 $A=1\times2\times3\times\cdots\times(m-1)$中含有因子 $p$,因而 $A+1$ 不会被 $p$ 整除,它更不会被 $m$ 整除,这与题设矛盾,从而可知 $m$ 为质数.

**例** 9 设 $n$ 是大于 1 的正整数,求证:$n^4+4$ 是合数.

**分析**:我们只需把 $n^4+4$ 写成两个大于 1 的整数的乘积即可.

**证明**:
$$\begin{aligned}n^4+4&=n^4+4n^2+4-4n^2\\&=(n^2+2)^2-4n^2\\&=(n^2-2n+2)(n^2+2n+2),\end{aligned}$$

$\because$ $n^2+2n+2>n^2-2n+2=(n-1)^2+1>1$,

$\therefore$ $n^4+4$ 是合数.

**例** 10 若 $x_1,x_2$ 为正整数,且 $x_1+x_2=a,x_1x_2=1-b$,求证:$a^2+b^2$ 为合数.

**分析**:将 $a^2+b^2$ 用 $x_1$、$x_2$ 的代数式表示,再化为两个大于 1 的正整数之积.

**证明**：$a^2+b^2=(x_1+x_2)^2+(1-x_1x_2)^2$

$$=x_1^2+x_2^2+x_1^2x_2^2+1$$

$$=(x_1^2+1)(x_2^2+1),$$

∵　$x_1$、$x_2$ 是正整数，

∴　$x_1^2+1>1, x_2^2+1>1$，

∴　$a^2+b^2$ 是合数．

**练一练**

求证：1000001 是合数．

**例 11**　给定下表

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 4 | 7 | 10 | 13 | … |
| 4 | 9 | 14 | 19 | 24 | … |
| 7 | 14 | 21 | 28 | 35 | … |
| 10 | 19 | 28 | 37 | 46 | … |
| 13 | 24 | 35 | 46 | 57 | … |

求证：(1)若 $N$ 在表中，则 $2N+7$ 不是质数；

(2)若 $N$ 不在表中，则 $2N+7$ 是质数．

**证明**：由观察知，表中第 $m$ 行、第 $n$ 列处的数为$n(2m+1)+m-3$.

(1)若 $N$ 为表中第 $m$ 行、第 $n$ 列数，则

$$2N+7=2n(2m+1)+2m-6+7$$

$$=(2m+1)(2n+1).$$

∵　$m\geqslant1, n\geqslant1$，

∴　$2m+1>1, 2n+1>1$，

∴　$2N+7$ 不是质数．

(2)设 $2N+7=pq, p>1, q>1$，则 $p, q$ 必为正奇数，令 $p=2m+1, q=2n+1$.

∵　$2N+7=(2m+1)(2n+1)$，

∴　$N=n(2m+1)+m-3$.

显然 $N$ 为表中第 $m$ 行、第 $n$ 列处的数，矛盾．

故 $2N+7$ 是质数.

最后来看一下连续合数问题.

**例 12** 是否存在连续四个正整数,它们均为合数?若存在,求出其中一组最小的数;若不存在,说明理由.

**分析**:连续四个正整数中必有一个是 2 的倍数,一个是 3 的倍数,一个是 4 的倍数.

**解**:设 $n=1\times2\times3\times4$,则 $n$、$n+1$、$n+3$、$n+4$ 对应的值 24、25、26、27 是四个连续正整数,它们均为合数,且是最小的一组.

**说明**:如果不要求最小的一组,设 $n=2\times3\times4\times5$,则 $n+2$、$n+3$、$n+4$、$n+5$ 分别含有约数 2、3、4、5,故它们是四个连续的合数.所以,符合条件的合数有无穷多组.

**练一练**

写出十个连续的正整数,使其中每一个数都是合数.

## 习题 1.5

### A 组

1. 有下列 4 种说法:

(1)两个质数的和必为质数;

(2)两个合数的和必为合数;

(3)一个质数与一个合数的和必为质数;

(4)一个质数与一个合数的和必为合数,

其中正确说法的个数是(　　)

(A)0　　(B)1　　(C)2　　(D)4

2. 有 3 个数,一个是最小的奇质数,一个是小于 50 的最大质数,一个是大于 60 的最小质数,则这 3 个数的和是(　　)

(A)101　　(B)110　　(C)111　　(D)113

3. 若正整数 $a$ 分别加上 3、7 后,所得的两个数都是质数,则 $a$ 被 3 除的余数是(　　)

(A)0　　(B)1　　(C)2　　(D)1 或 2

4. 在 1,2,3,…,20 这 20 个正整数中,质数的个数与合数的个数之和等于________.

5. 一个质数的平方与一个正奇数的和等于 125,那么这两个数的乘积是________.

6. 已知 $x$ 为正整数,$y$ 和 $z$ 均为质数,且满足 $x=yz$,$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{z}$,则 $x$ 的值是______.

7. 已知质数 $p$ 和 $q$ 满足关系式 $3p+5q=31$,求 $\frac{p}{3q+1}$ 的值.

8. 已知正整数 $p,q$ 都是质数,并且 $7p+q$ 与 $pq+11$ 也都是质数,试求:$(p^q+q^p)\div(2^p+2^q)$的值.

9. 已知 $a$ 为正整数,则 $a^4-a^2+9$ 是质数还是合数?证明你的结论.

10. 试问:在 1,0 交替出现,且以 1 为首位和结尾的所有整数(即 101,10101,1010101,…)中有多少个质数?说明理由.

## B　组

1. 从 1～100 这一百个正整数中,有____个质数,有______个合数.

2. 一个两位质数,将它的十位数字与个位数字对调后仍是一个质数,我们称为它"无暇质数",则所有"无暇质数"之和为__________.

3. 既是两个质数之和,又是两个质数之差的质数有__________个.

4. 有三个质数,使它们的积是和的 5 倍,则这三个质数的和是__________.

5. 对于一个正整数 $n$,如果能找到正整数 $a$ 和 $b$,使 $n=a+$

$b+ab$,则称 $n$ 为一个“好数”,例如 $3=1+1+1\times1$,即 3 是一个“好数”. 在 1～100 个正整数中,“好数”共有__________个.

6. 凸四边形 $ABCD$ 的 $AB=a,BC=b,CD=c,DA=d$,且 $\angle B=\angle D=90°$. 若四条边的长度都是正整数,则四边形的周长必是一个合数.

7.(1)哪些质数能写成两个平方数之差?

(2)哪些质数能写成两种(或更多种)不同形式的两平方数之差?

8. 证明:对每个正整数 $n$,总能找到正整数 $m$,使 $nm+1$ 是个合数.

9. 设 $a,b,c,d$ 是四个整数,且使得 $M=(ab+cd)^2-\frac{1}{4}(a^2+b^2-c^2-d^2)^2$ 是个非零整数,求证:$|m|$一定是合数.

10. 是否存在 14 个连续的正整数,使得其中每一个数都至少可被一个不小于 2 且不大于 11 的质数整除?

## §1.6　算术基本定理

每一个合数都可以写成几个质数相乘的形式，这几个质数叫做这个合数的质因数．

把一个合数用质因数的连乘的形式来表示，叫做分解质因数．分解质因数有下面一个重要的定理：

**算术基本定理**：任何一个正整数 $N>1$，都能分解成质因数的连乘积，即

$$N=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot\cdots\cdot p_n^{\alpha_n},(n\geqslant 1) \quad ①$$

其中 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 为互不相等的质数，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 为正整数；如果不考虑因数的顺序，则这个分解式是唯一的．

我们把①式叫做 $N$ 的标准分解式．

**练一练**

(1)求 9828 的标准分解式．

(2)求 4725 的标准分解式．

(3)求 21600 的标准分解式．

**例 1**　若 $k$ 是正整数，使得 $935\times972\times975\times k$ 之积最末四个数字都是零，求 $k$ 的最小值．

**分析**：积的末尾有连续四个零，于是积分解质因数后，至少含有 4 个 2，4 个 5.

**解**：$\because 935=5\times11\times17$，

$972=2^2\times3^5$，

$975=3\times5^2\times13$，

而要使积的末尾有四个零，至少还需要 2 个质因数 2 和 1 个质因数 5，

$\therefore$　$k$ 的最小值是 $2^2\times5=20$.

**例 2**　$m$、$n$ 是正整数，$mn=120$，则 $m+n$ 可能取到的最小值是多少？

**解**：由$(m+n)^2=4mn+(m-n)^2=4\times120+(m-n)^2$知，当$(m-n)^2$越小时，$(m+n)^2$也越小，从而$m+n$也越小．因而$|m-n|$要最小，才能使$m+n$最小．

$\because\quad mn=120=2\times2\times2\times3\times5$，

$\therefore$　当$m=12$，$n=10$时，$|m-n|$才最小，$m+n=22$为最小值．

**例3**　已知$1176a=b^4$，$a$、$b$为正整数，求$a$的最小值．

**解**：$\because\quad 1176=2^2\times3\times7^2$，

$\therefore\quad 2^3\times3\times7^2a=b^4$，

$\therefore\quad 3|b^4$.

又$\because$　3是质数，

$\therefore\quad 3|b$.

同理，$2|b$，$7|b$.

令$b=2\times3\times7t$（$t$是正整数），

$\therefore\quad 2^3\times3\times7^2a=(2\times3\times7t)^4$，

$\therefore\quad a=2\times3^3\times7^2t^4$.

要求$a$的最小值，$t$应尽可能地小．

取$t=1$时，$a$有最小值$2\times3^3\times7^2=2646$.

**练一练**

已知$1176a=b^3$，$a$、$b$为正整数，求$a$的最小值．

**例4**　互为反序的两个正整数的积是92565，求这两个互为反序的正整数.（例如，102和201，35和53，11和11，…称为互为反序的数．但是120和21不是互为反序的数．）

**分析**：将92565分解成质因数的积，再进行试验．

**解**：$\because\quad 92565=5\times3^2\times11^2\times17$，

由题意，92565是两个三位数的积，

$\therefore\quad 92565=121\times765=165\times561=187\times495=255\times363$.

其中，只有165和561是互为反序的两个正整数．

**例 5** 求一个最小的正整数,使它的$\frac{1}{2}$是平方数,$\frac{1}{3}$是立方数,$\frac{1}{5}$是五次方数.

**解**:因为这个整数的$\frac{1}{2}$、$\frac{1}{3}$、$\frac{1}{5}$均为整数,所以它一定能被2、3、5整除,再考虑这个整数最小的要求,它一定具有下面的形式

$$N=2^a\cdot 3^b\cdot 5^c, a\neq 0, b\neq 0, c\neq 0.$$

因为$\frac{1}{2}N=2^{a-1}\cdot 3^b.5^c$是平方数,则$a-1$、$b$、$c$均为偶数.

因为$\frac{1}{3}N=2^a\cdot 3^{b-1}\cdot 5^c$是立方数,则$a$、$b-1$、$c$均为3的倍数.

因为$\frac{1}{5}N=2^a\cdot 3^b\cdot 5^{c-1}$是五次方数,则$a$、$b$、$c-1$均为5的倍数.

由于$a$是3和5的倍数且为奇数,则最小的$a$为15;$b$是2和5的倍数且被3除余1,则最小的$b$为10;同理,最小的$c$为6.

于是,所求的最小的$N=2^{15}\times 3^{10}\times 5^6$.

**例 6** 正整数$a$、$b$、$c$、$d$满足等式$ab=cd$,求证:$k=a^{1998}+b^{1998}+c^{1998}+d^{1998}$是合数.

**证明**:由正整数的质因数分解的唯一性,可求得这样的正整数$p,q,r,s$,使

$$a=pq, b=rs, c=pr, d=qs.$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad k&=(pq)^{1998}+(rs)^{1998}+(pr)^{1998}+(qs)^{1998}\\&=(p^{1998}+s^{1998})(q^{1998}+r^{1998})\end{aligned}$$

$\therefore$ $k$是合数.

**例 7** 在黑板上任意写上一个正整数,在不是它的约数中,

找出最小的正整数，擦去原数，写上找到的这个最小的正整数．例如，写的数是 12，不是 12 的约数中，最小的正整数是 5，擦去 12，写上 5．这样继续下去，直到黑板上出现 2 为止．对于任意的一个正整数，最多擦多少次，黑板上就可以出现 2？

**解**：(1)如果黑板上是偶数 2，不用擦．

(2)如果黑板上是奇数，擦后即出现 2．

(3)如果黑板上是偶数 $n(n>2)$，设 $n=2^t p$，其中 $t\geqslant 1$，$p$ 是奇数．

①$p=1$ 时，$n=2^t(t\geqslant 2)$，第一次擦后出现 3，第二次擦后出现 2．

②$p>1$ 时，$n=2^t p(t\geqslant 1)$，设第一次擦后出现 $a$($a$ 不是 $n$ 的约数)．

$\because \quad 2^{t+1}\nmid n, \qquad \therefore \quad a\leqslant 2^{t+1}.$

若 $a=2^{t+1}$，那么第二次擦后出现 3，第三次出现 2．

若 $a<2^{t+1}$，则 $a$ 必为奇数（否则，$a$ 为偶数，令 $a=2^k q$，其中 $1\leqslant k\leqslant t$，$q$ 为大于 1 的奇数，由于 $2^k\mid n$，则 $q\nmid n$，但 $q<a$，这与 $a$ 为不是 $n$ 的约数中最小的正整数产生矛盾），第二次擦后出现 2．

故最多要擦 3 次，就出现 2．

**说明**：本题应用质因数分解时，进行了改造，体现了质因数分解解题的灵活性．

**例 8**　求 600 的正约数的个数并求 600 的所有正约数的和．

**解**：将 600 分解质因数可得 $2^3\times 3\times 5^2$．

(1)600 的每一个正约数都是从质数 2、3、5 中取若干个相乘得到的．

先考虑取 2，它可不取，也可取 1 个、2 个或 3 个出来，共有 4 种取法；

再考虑取 3，它只有取与不取共 2 种取法；

最后考虑取 5，它可以不取，也可以取 1 个或 2 个出来，共

有3种取法．

故组成600的一个正约数有

$$4\times2\times3=24$$

种方法，即600有24个正约数．

(2)如果 $3\times5^2$ 有 $n$ 个正约数，则这 $n$ 个正约数与1、2、$2^2$、$2^3$ 分别相乘得到的 $4n$ 个积就是600的所有正约数．不妨设 $3\times5^2$ 的所有正约数之和为 $x$，则600的所有正约数之和为 $(1+2+2^2+2^3)x$.

又设 $5^2$ 所有正约数之和为 $y$，则 $x=(1+3)y$.

而 $5^2$ 的所有正约数之和 $y=1+5+5^2$.

600的所有正约数之和为

$$(1+2+2^2+2^3)(1+3)(1+5+5^2)=1860.$$

**练一练**

求下列各数的正约数的个数及正约数的和．

(1)144；　(2)180.

**试一试**

你能总结出求正整数 $N(N>1)$ 的正约数的个数及正约数之和的方法吗？

若要求正整数 $N(N>1)$ 的正约数的个数，可先将其分解质因数得

$$N=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_n}\cdot\cdots\cdot p_n^{\alpha_n},$$

则 $N$ 的所有正约数的个数为

$$(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_n+1),$$

$N$ 的所有正约数之和为

$$(1+p_1+p_1^2+\cdots+p_1^{\alpha_1})(1+p_2+p_2^2+\cdots+p_2^{\alpha_2})\cdots(1+p_n+p_n^2+\cdots+p_n^{\alpha_n}).$$

**例9**　如果正整数 $N(N>1)$ 的正约数的个数是奇数，求证：$N$ 是完全平方数．

**证明**：将 $N$ 分解质因数，设 $N$ 的标准分解式为

$$N=P_1^{\alpha_1}\cdot P_2^{\alpha_2}\cdot\cdots\cdot P_n^{\alpha_n},$$

其所有正约数的个数为

$$(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_n+1)$$

由题意，$(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_n+1)$是奇数，

$\therefore\quad \alpha_1+1,\alpha_2+1,\cdots,\alpha_n+1$ 都是奇数．$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n$ 都是偶数.

令 $\alpha_i=2\beta_i$（$\beta_i$ 均为整数）$(i=1,2,\cdots,n)$

$$\therefore\quad N=p_1^{2\beta_1}\cdot p_2^{2\beta_2}\cdot p_n^{2\beta_n}$$
$$=(p_1^{\beta_1}\cdot p_2^{\beta_2}\cdot\cdots\cdot p_n^{\beta_n})^2,$$

$\therefore\quad N$ 是完全平方数．

**例 10**　求不大于 200 的且只有 15 个正约数的正整数．

**解**：因为 $15=1\times15=3\times5$，故所有的正整数 $N$ 只有下面两种形式：

$$N=p^{14}\text{，或 } N=p_1^2\cdot p_2^4.$$

若 $N=p^{14}$，因最小质数是 2，而 $2^{14}>200$，这种形式不合要求．

因此，$N=p_1^2\cdot p_2^4$.

(1)当 $p_1=2$ 时，$p_2\geqslant3$，有 $N\geqslant2^2\times3^4=324>200$，不合题意．

(2)当 $p_1=3$，则 $N=3^2\times P_2^4$.

①若 $p_2=2$，则 $N=3^2\times2^4=144<200$，所以 $N=144$，符合题意．

②若 $p_2>2$，则 $p_2\geqslant5$，因此 $N\geqslant3^2\times5^4>200$，不合题意．

(3)当 $p_1\geqslant5$ 时，$p_2\geqslant2$，有 $N\geqslant5^2\times2^4=400>200$，不合题意．

故所求的正整数为 144.

**例 11**　试求 1998 的所有正约数的倒数之和．

**解**：因为 $1998=2\times3^3\times37$，所以 1998 所有正约数的个数为$(1+1)(3+1)(1+1)=16$，这 16 个正约数之和为$(1+2)(1+3+3^2+3^3)(1+37)=4560$.

设这 16 个正约数分别为 $x_1,x_2,x_3,x_4,\cdots,x_{13},x_{14},x_{15},x_{16}$，可按乘积等于 1998 分为 8 组，不妨设 $x_1x_2=x_3x_4=x_5x_6=x_7x_8=x_9x_{10}=x_{11}x_{12}=x_{13}x_{14}=x_{15}x_{16}=1998$，则

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}+\cdots+\frac{1}{x_{13}}+\frac{1}{x_{14}}+\frac{1}{x_{15}}+\frac{1}{x_{16}}$$

$$=(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2})+(\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4})+\cdots+(\frac{1}{x_{13}}+\frac{1}{x_{14}})+(\frac{1}{x_{15}}+\frac{1}{x_{16}})$$

$$=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}+\frac{x_3+x_4}{x_3x_4}+\cdots+\frac{x_{13}+x_{14}}{x_{13}x_{14}}+\frac{x_{15}+x_{16}}{x_{15}x_{16}}$$

$$=\frac{x_1+x_2+x_3+x_4+\cdots+x_{13}+x_{14}+x_{15}+x_{16}}{1998}$$

$$=\frac{4560}{1998}=\frac{760}{333}$$

**例 12**　若正整数 $a$ 的正约数(除 $a$ 本身)之和等于另外一正整数 $b$，$b$ 的正约数之和(除 $b$ 自身)等于 $a$，则称 $a,b$ 互为亲和数．证明：284 与 220 是亲和数．

**证明**：$284=2^2\times71$，其正约数(除自身)之和为

$$(1+2+2^2)(1+71)-284=220.$$

$220=2^2\times5\times11$，其正约数(除自身)之和为

$$(1+2+2^2)(1+5)(1+11)-220=284.$$

由题设知，284 与 220 为亲和数．

**例 13**　求正整数 $N$，使它能被 5 和 49 整除，并且包括 1 和 $N$ 在内，它共有 10 个正约数．

**解**；把正整数 $N$ 写成质因数分解标准形式：

$N=2^{\alpha_1}\cdot3^{\alpha_2}\cdot5^{\alpha_3}\cdot7^{\alpha_4}\cdot\cdots\cdot P_n^{\alpha_n}(\alpha_k\geqslant0)$

由于 $N$ 能被 5 和 $7^2=49$ 整除，故 $\alpha_3\geqslant1,\alpha_4\geqslant2$，其余的指数 $\alpha_k$ 为正整数或零．

由题意，有

$(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_n+1)=10.$

$\because$　$\alpha_1+1\geqslant2,\alpha_4+1\geqslant3$，且 $10=2\times5$，

$\therefore\quad \alpha_1=\alpha_2+1=\alpha_5+1=\cdots=\alpha_n+1=1.$

即 $\quad \alpha_1=\alpha_2=\alpha_5=\cdots=\alpha_n=0.$

$\therefore\quad N$ 只有两个不同的质因数 5 和 7.

因为 $\alpha_4+1\geqslant3>2$，故由 $(\alpha_3+1)(\alpha_4+1)=10$ 知 $\alpha_3+1=5$，$\alpha_4+1=2$ 是不可能的，因而 $\alpha_3+1=2$，$\alpha_4+1=5$，得

$N=5^{2-1}\cdot7^{5-1}=5\times7^4=12005.$

## 习题 1.6

### A 组

1. 求出不大于 200 且只有 15 个正约数的所有正整数．

2. 设 $p$ 是不等于 3 的质数，求形如 $3p^2$ 且所有正约数之和为 124 的所有正整数．

3. 求四个不超过 70000 的正整数，每一个正整数的约数多于 100 个．

4. 如果 $a<b<c<d<e$ 是连续的五个正整数，$b+c+d$ 是完全平方数，$a+b+c+d+e$ 是完全立方数，求 $c$ 的最小值．

5. 若正整数 $N$ 的全部因数之和为 $2N$，则称 $N$ 为“完全数”．验证：6，28，496 是完全数．

### B 组

1. 求最小的正整数 $n$，满足：

(1) $n$ 恰有 144 个不同的正约数；

(2) 在 $n$ 的正约数中有 10 个连续整数．

2. 有一个小于 2000 的四位数，它恰有 14 个正约数(包括 1 和它本身)，其中有一个质约数的末位数字是 1，求这个四位数．

## §1.7　最大公约数与最小公倍数

对于 4,8,12 这一组数,显然,1,2,4 都能整除它们中的每一个数,所以 1,2,4 都是它们的公约数,其中 4 是这些公约数中的最大的．把这个概念推广到一般情形,有如下的定义:

如果 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 和 $d$ 都是正整数,且 $d|a_1,d|a_2,\cdots,d|a_n$,那么 $d$ 叫做 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的公约数．公约数中最大的叫做 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的最大公约数,记作$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$.

当$(a,b)=1$ 时,我们称 $a,b$ 互质．

**想一想**

根据定义,$(4,8,12)=?$　$(12,30)=?$

$a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n$ 的最大公约数$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$表示的是一个正数,是一个能够整除 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 并且能被 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的每一个约数整除的数．

常用的有关最大公约数的性质有:

(1)若 $a|b$,则$(a,b)=a$.

(2)若$(a,b)=d$,且 $n$ 是正整数,则$(na,nb)=nd$.

(3)若 $n|a,n|b$,则$\left(\frac{a}{n},\frac{b}{n}\right)=\frac{(a,b)}{n}$.

(4)若 $a=bq+r(o\leqslant r<b)$,则$(a,b)=(b,r)$.

性质(3)表明,若$(a,b)=d$,则$\left(\frac{a}{d},\frac{b}{d}\right)=1$.

性质(4)是求最大公约数的一个非常有用的结论．具体地讲,为求$(a,b)$,可转化为求$(b,r)$,由于 $b$ 和 $r$ 相对 $a$ 和 $b$ 来说较小,因此求$(b,r)$要比求$(a,b)$容易些．如果 $b$ 和 $r$ 仍然较大,可以重复使用性质(4),即由 $b=rq+r_1$,有$(b,r)=(r,r_1)$;由 $r=r_1q_2+r_2$,有$(r,r_1)=(r_1,r_2)$;…如此下去．由于 $r_1,r_2,\cdots$,在逐渐减小,必有 $r_k=r_{k+1}q_{k+2}$,由性质(1)知,$r_{k+1}$就是 $a$ 和 $b$ 的最大

公约数．这种求最大公约数的方法叫做辗转相除法．

对于 4,8,12 这一组数,24,48 和 72 等都能被它们中的每一个数整除,24,48 和 72 等都叫它们的公倍数,而 24 是公倍数中最小的．把这个概念推广到一般情形,有如下的定义：

如果 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 和 $m$ 都是正整数,且 $a_1|m,a_2|m,\cdots,a_n|m$,那么 $m$ 叫做 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的公倍数．公倍数中最小的数叫做 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的最小公倍数,记作$[a_1,a_2,\cdots,a_n]$.

如果 $m$ 是 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的公倍数,那么 $km$($k$ 是正整数)也是它们的公倍数,因此不存在最大公倍数．

(5)若 $b|a$,则$[a,b]=a$.

(6)若$[a,b]=m$,且 $n$ 为正整数,则$[na,nb]=nm$.

(7)若 $n|a,n|b$,则$\left[\frac{a}{n},\frac{b}{n}\right]=\frac{[a,b]}{n}$.

最大公约数与最小公倍数这两个概念有着密切的联系,下面的性质揭示了它们的关系．

(8)若$[a,b]=m$,则$\left(\frac{m}{a},\frac{m}{b}\right)=1$.

(9)$(a,b)=\frac{ab}{[a,b]}$.

由性质(9)知,在已知 $a,b$ 两数的最大公约数和最小公倍数之一时,便很容易求出另一个．

**例 1**　求(1056,3960)和[1056,3960].

**解法** 1:(提取公因数法):

$$\begin{array}{r|ll}
2 & 1056 & 3960 \\
2 & 528 & 1980 \\
2 & 264 & 990 \\
3 & 132 & 495 \\
11 & 44 & 165 \\
 & 4 & 15
\end{array}\quad\cdots(\text{互质})$$

$\therefore$　$(1056,3960)=2^3\times3\times11=264$,

$[1056, 3960]=2^3\times3\times11\times4\times15=15840.$

**说明**：提取公因数法就是利用短除法的形式，每次提取公约数，直到得到 2 个互质的数．最大公约数就是所有公约数的乘积．最小公倍数是所有公约数与最后的两个互质整数的乘积．

**解法** 2：(分解质因数法)：

$\because$　$1056=2^3\times3\times11\times4, 3960=2^3\times3\times11\times15,$

$\therefore$　$(1056,3960)=2^3\times3\times11=264,$

$[1056,3960]=2^3\times3\times11\times4\times15=15840.$

**解法** 3：(辗转相除法)：

(1)先用 1056 除 3960，得到商和余数 $3960=1056\times3+792$.

(2)再用第一步得到的余数 792 来除 1056，得到商和余数 $1056=792\times1+264$.

(3)用第二步得到的余数 264 来除第二步中的除数 792，得 $792=264\times3$.

故 264 是 1056 和 3960 的最大公约数．

由最大公约数和最小公倍数的关系可求出最小公倍数 15840.

**练一练**

(1)求 336 和 1260 的最大公约数和最小公倍数；

(2)求 899 和 493 的最大公约数和最小公倍数．

**例 2**　$a,b,c$ 为正整数，证明：$((a,b),c)=(a,b,c)$.

**分析**：$((a,b),c)$指的是 $a$ 和 $b$ 的最大公约数与 $c$ 的最大公约数．要证明$((a,b),c)=(a,b,c)$，只需证明$(a,b,c)\mid((a,b),c)$，并且$((a,b),c)\mid(a,b,c)$.

**证明**：由最大公约数的概念可知，$(a,b,c)\mid a$，$(a,b,c)\mid b$,

$\therefore$　$(a,b,c)\mid(a,b)$.

又$\because$　$(a,b,c)\mid c$,

$\therefore$　$(a,b,c)\mid((a,b),c)$.

反过来，$((a,b),c)\mid(a,b)$，$((a,b),c)\mid c$,

$\therefore\quad ((a,b),c)\mid a,((a,b),c)\mid b,$

$\therefore\quad ((a,b),c)\mid(a,b,c).$

$\therefore\quad ((a,b),c)=(a,b,c).$

**练一练**

利用这个结论求(377,728,1443).

**答案**:(377,728,1443)=13.

**例** 3 对于任意正整数 $n$,试证:分数$\frac{21n+4}{14n+3}$不能约简.

**分析**:要证明这个分数不可约,只需要证明 $21n+4$,和 $14n+3$ 的最大公约数是 1 即可.

**证明**:$(21n+4,14n+3)$

$=(21n+4-14n-3,14n+3)$

$=(7n+1,14n+3)$

$=(7n+1,14n+3-14n-2)$

$=(7n+1,1)$

$=1.$

故对于任何正整数 $n$,$\frac{21n+4}{14n+3}$不可约.

**练一练**

证明:对于任意的正整数 $n$,分数$\frac{65n+12}{39n+7}$是既约分数.

**想一想**

判断两个正整数互质,除了可以利用辗转相除法以外,还有其他的方法吗?

**例** 4 两个正整数的最大公约数是 7,最小公倍数是 105,求这两个数?

**解**:依题意,设这两个数分别为 $7a,7b$($a,b$ 为正整数,且 $a$ 与 $b$ 互质,$a<b$),则这两个数的最小公倍数是 $7ab$,

$\therefore\quad 7ab=105,$

$\therefore\quad ab=15.$

又　$15=1\times15=3\times5$,

$\therefore$　$a=1,b=15$,或 $a=3,b=5$.

故这两个数分别为 7,105 或 21,35.

**说明**:已知$(x,y)=d$,一般都是令 $x=da,y=db$,且$(a,b)=1$,从而把求 $x,y$ 的问题转化为求互质的两个数 $a,b$. 这是解这类问题的一种常用方法.

**例 5**　已知两个正整数之和为 104055,它们的最大公约数是 6937,求这两个数.

**解**:设这两个数为 $x,y$,依题意得

$$\begin{cases}x+y=104055, & ①\\(x,y)=6937. & ②\end{cases}$$

由②令 $x=6937a,y=6937b$,且$(a,b)=1$,代入①得

$$a+b=15.$$

由于$(a,b)=1$,所以只有以下 4 种可能:

$$\begin{cases}a=1,\\b=14;\end{cases}\begin{cases}a=2,\\b=13;\end{cases}\begin{cases}a=4,\\b=11;\end{cases}\begin{cases}a=7,\\b=8.\end{cases}$$

分别代入 $x,y$ 的表达式,得

$$\begin{cases}x=6937,\\y=97118;\end{cases}\begin{cases}x=13874,\\y=90181;\end{cases}\begin{cases}x=27748,\\y=76307;\end{cases}\begin{cases}x=48559,\\y=55496.\end{cases}$$

**例 6**　已知两正整数之和为 667,它们的最小公倍数除以最大公约数,商等于 120. 求这两个正整数.

**解**:设所求两数为 $x,y$ 则

$$\begin{cases}x+y=667, & ①\\{[x,y]}=120(x,y). & ②\end{cases}$$

设$(x,y)=d,x=md,y=nd$,则$(m,n)=1,m<n$.

由①②得　$(m+n)d=667,$　③

$mnd=120d.$　④

由④得　$mn=120.$　⑤

$\because$　$667=23\times29,120=2^3\times3\times5$,且注意到 $d\neq1$,

∴　有以下两种情况：

若 $d=23$，则

$$\begin{cases}m+n=29,\\ mn=120.\end{cases}$$

∴　$m=5, n=24$.

若 $d=29$，则

$$\begin{cases}m+n=23,\\ mn=120.\end{cases}$$

∴　$m=8, n=15$.

故所求两数为 $5\times23, 24\times23$，或 $8\times29, 15\times29$，即 115，552，或 232，435.

**例 7**　已知两个正整数的和是 45，它们的最小公倍数是 168，求这两个数．

**解**：设两数分别为 $x, y(x<y)$，$(x,y)=d$，则有 $x=md, y=nd$，$(m,n)=1$.

依题意可得：

$$\begin{cases}(m+n)d=45, & ①\\ md\cdot nd=168d. & ②\end{cases}$$

①÷②得　$\dfrac{m+n}{mn}=\dfrac{15}{56}$.

∵　$(m,n)=1$,

∴　$(m,n)=(m,m+n)$

$$=(n,m+n)$$
$$=(mn,m+n)$$
$$=1.$$

∴　$\begin{cases}m+n=15,\\ mn=56.\end{cases}$

∴　$m=7, n=8$.

∴　$d=3$.

$\therefore\quad x=2, y=24.$

**例 8**　某正整数与 24 的最大公约数和最小公倍数分别为 4 和 168，求这个正整数．

**解**：设所求正整数为 $x$，则由 $(x,24)=4$，有 $x=4n$（$n$ 是正整数）．于是有

$$[4n,24]=168.$$

根据性质(8)，有　$\left(\frac{168}{4n},\frac{168}{24}\right)=1$，

即　$\left(\frac{42}{n},7\right)=1.$

由 $\frac{42}{n}$ 是正整数，得 $n$ 可能取的值是 1，2，3，6，7，14，21，42．分别代入上式检验，只有 $n=7$．

故所求正整数是 28．

**例 9**　已知正整数 $a$，$b$ 使得 $\frac{a+1}{b}+\frac{b+1}{a}$ 是整数．证明：$a$ 与 $b$ 的最大公约数不超过 $\sqrt{a+b}$．

**证明**：因为 $\frac{a+1}{b}+\frac{b+1}{a}=\frac{a^2+b^2+a+b}{ab}$，假设 $a$ 和 $b$ 的最大公约数是 $d$．由于 $ab$ 可被 $d^2$ 整除，所以 $a^2+b^2+a+b$ 可被 $d^2$ 整除．既然 $a^2+b^2$ 可以被 $d^2$ 整除，所以 $a+b$ 可被 $d^2$ 整除，因此 $\sqrt{a+b}\geqslant d$．

**例 10**　求三个不同的正整数 $a$，$b$，$c$，使它们满足

$$\frac{11}{a}+\frac{11}{b}+\frac{11}{c}=\frac{143}{210},\tag{①}$$

且使 $[a,b,c]$ 最小．

**解**：①可变为　$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{13}{210}.\tag{②}$$

注意到 $(13,210)=1$，由②可见 $[a,b,c]\geqslant 210$．

又　$210=2\times3\times5\times7$，

$$13=1+2+10=1+5+7=2+5+6,$$

$\therefore$ $[a,b,c]$的最小值是 210. 此时 $a,b,c$ 的取值可为 210, 105, 21;或 210,42,30;或 105,42,35.

## 习题 1.7

### A 组

1. (6188,4709)等于(  ).

(A)13  (B)17  (C)19  (D)23

2. 在 1,2,3…,100 这 100 个正整数中,能同时被 2,3,4 整除的数共有(  )

(A)4 个 (B)8 个 (C)16 个 (D)17 个

3. 两个两位数,它们的最大公约数是 8,最小公倍数是 96,这两个数的和是(  )

(A)56  (B)78  (C)84  (D)96

4. 与 $4\frac{1}{26}$的乘积及与 $2\frac{17}{65}$的乘积都是正整数的最小分数是____

5. $(462,55)\times[462,55]-55\times462$ 等于________.

6. 正整数 $n$ 被 3 除余 2,被 4 除余 3,被 5 除余 4,则 $n$ 的最小值是__________.

7. 设 $n$ 为正整数,则 $(n,n+1)=$____,$[n,n+1]=$________.

8. 已知两个正整数的乘积是 8214,它们的最大公约数是 37,求这两个正整数.

9. 已知 $a$ 和 $b$ 都是正整数,且$(a,b)=1$,求证:$(a+b,a^2-ab+b^2)$等于 1 或者 3.

10. 有若干个苹果,2 个 1 堆多 1 个,3 个 1 堆多 1 个,4 个 1 堆多 1 个,5 个堆多 1 个,6 个堆多 1 个,问这堆苹果最少有多

少个？

## B　组

1. 设 $a,b$ 为正整数，$a>b$，$p=(a,b)$，$q=[a,b]$，则 $p,q,a,b$ 依次用 $<$，$\leqslant$ 连接为__________.

2. 若 $(x,y)=60$，$(y,z)=90$，$[z,x]=360$，则 $x+z=$ __________.

3. 若 $d\mid(19n+14)$，$d\mid(10n+3)$，$n,d$ 均为正整数，则 $d=$ ________.

4. 把 1，2…，19 分成 $m$ 个组，使得有 2 个数以上的各组中任意两个数的最小公倍数不在同一组，则 $m$ 的最小值是__________.

5. 在黑板上写两个不同的正整数，擦去较大数，换成这两个数的差，称为一次变换．对得到的两个数仍然可以继续作这种变换，直到两个数变得相同为止，对 1024，$\underbrace{11\cdots1}_{20\text{个}1}$ 作这样的变换最后得到的两个相同的数是__________.

6. 用正方形的地砖不重叠、无缝隙地铺满一块地，若选用甲种规格的地砖，恰需若干块；若选用乙种规格的地砖，则要比前一种刚好多用 124 块．已知这些地砖的表面都是边长为整数厘米的正方形．试问需购买乙种规格的地砖多少块？

7. 在正方形的每个顶点上各记上 1 个互不相同的正整数，在它的每条棱上记上它两端上的两个正整数的最大公约数．那么，是否有可能使顶点上的各数的和等于棱上的各数的和？证明你的结论．

# §1.8 竞赛题选讲

**例 1** 一个三位数等于它的三个数字的和的一半的立方，则此三位数是__________.

**解**:设此三位数是$\overline{abc}=100a+10b+c$，则

$$100\leqslant 100a+10b+c=\left(\frac{a+b+c}{2}\right)^3<1000,$$

$$\therefore\quad \sqrt[3]{100}\leqslant\frac{a+b+c}{2}<10,$$

即 $5\leqslant\frac{a+b+c}{2}<10.$

考察了 $5^3=125,6^3=216,7^3=343,8^3=512,9^3=729$，只有 $729=\left(\frac{7+2+9}{2}\right)^3$，故所求的三位数是 729.

**说明**:上述解答是先估计$\frac{a+b+c}{2}$的大致范围，然后逐一检验，这种解题方法用途非常广泛.

**例 2** 是否存在这样的三位数$\overline{abc}$，它等于如下 3 个两位数之和:$\overline{ab},\overline{bc},\overline{ac}$?

**解**:如果存在这样的三位数，那么就应当有等式

$$\overline{abc}=\overline{ab}+\overline{bc}+\overline{ac},$$

即 $100a+10b+c=(10a+b)+(10b+c)+(10a+c)$，

$$\therefore\quad 80a=b+c.$$

而这显然是不可能的，因为 $a\geqslant1,b\leqslant9,c\leqslant9$. 这表明所找的数是不存在的.

**例 3** 解方程:$\overline{xyz}\cdot\overline{zyx}=\overline{xzyyx}$.

**解**:$\because$ $\overline{xyz}$、$\overline{zyx}$是三位正整数，

$\therefore$ $x,y,z$ 必满足 $0<x\leqslant9,0\leqslant y\leqslant9,0<z\leqslant9$.

$\because$ $\overline{xyz}\cdot\overline{zyx}=\overline{xzyyx}$,

$\therefore \quad xz=x.$

$\because \quad x\neq 0, \quad \therefore \quad z=1.$

由题意,有 $(100x+10y+1)(100+10y+x)=10000x+1000+100y+10y+x.$

整理,得 $101xy+10x^2+90y+10y^2=90.$

若 $y\neq 0$,上面方程不可能成立,故必有 $y=0$,从而可得 $x^2=9$,即 $x=3$.

故所求方程的解为 $x=3,y=0,z=1.$

**例 4** 把一个四位数的各位数字按反序排成一个新的四位数,它恰好是原数的 4 倍,试求这个四位数.

**解**:设所求四位数是$\overline{abcd}$.

由题意,$\overline{dcba}=4\times\overline{abcd}$,

即 $1000d+100c+10b+a=4(1000a+100b+10c+d)$,

整理,得 $1333a=2(166d+10c-65b).$

$\therefore \quad a$ 是偶数.

又 $\because \quad 4a\leqslant d<9$,

$\therefore \quad a=2,d=8.$

$\therefore \quad 2c=13b+1.$

$\therefore \quad b$ 是奇数,且 $13b+1\leqslant 18$,

$\therefore \quad b=1,c=7.$

故 2178 即为所求.

**例 5** 试求一个四位数$\overline{xxyy}$,使它恰好等于两个相同正整数的乘积.

**解**:恰好等于两个相同正整数的乘积的整数称为完全平方数,根据整数的十进制表示方法得

$$\overline{xxyy}=11(100x+y).$$

可知所求的数是 11 的倍数,又由完全平方数的特点,$100x+y$ 也应为 11 的倍数,从而$\overline{xxyy}$必为 121 的倍数,先从 1100 到 9999 中找出 121 的倍数,共有 73 个,即 $121\times 10,121\times 11,121$

$\times 12,\cdots,121\times 81,121\times 82$，再由$\overline{xxyy}=121k$是完全平方数可知，$k$也为完全平方数，只能取16，25，36，49，64和81. 经验算所求的四位数为$7744=121\times 64$.

**例 6** 若$a^2$的十位数可取1，3，5，7，9，则$a$的个位数(　　)

(A)必为4　　(B)必为6

(C)或为4或为6　　(D)2，4，6，8均可

**解**：设$a=10b+c$，只有$c=4,6$时，$c^2$的十位数才是奇数，而$a^2=(10b+c)^2=20(5b^2+bc)+c^2$，可见，$a^2$的十位数是$c^2$的十位数加上一个偶数，故当$a^2$的十位数取奇数时，只有$c=4,6$，故选(C).

**例 7** 已知$7^{24}-1$可被40至50之间的两个整数整除，这两个整数是(　　)

(A)41，48　　(B)45，47

(C)43，48　　(D)41，47

**解**：
$$\begin{aligned}7^{24}-1&=(7^{12}+1)(7^{12}-1)\\&=(7^{12}+1)(7^6+1)(7^6-1)\\&=(7^{12}+1)(7^6+1)(7^3+1)(7^3-1),\end{aligned}$$

而　$7^3+1=(7+1)(7^2-7+1)=8\times 43$,

$7^3-1=(7-1)(7^2+7+1)=6\times 57$,

∴　$7^{24}-1$可被43与$6\times 8=48$整除，故应选(C).

**例 8** 一个两位数之间插入一个一位数(包括0)，就变成一个三位数．例如72中间插入6后就成了762. 有些两位数中间插入某个一位数后变成的三位数，是原来两位数的9倍，这样的两位数有(　　)

(A)1个　　(B)4个

(C)10个　　(D)超过10个

**解法 1**：因三位数是两位数的9倍，所以三位数与两位数之和应是两位数的10倍．因此，这个两位数的个位数字只能是0

和 5. 又因插入的一位数应小于两位数的个位数字(否则,设两位数为$\overline{ac}$,插入的一位数为 $b$ ,若 $b\geqslant c$,则$\overline{abc}\geqslant\overline{ac}>9\times\overline{ac}$,矛盾),即两位数的个位数字只能是 5. 插入的个位数只能是 0,1,2,3,4. 结合被 9 整除的特征,只有 0,1,2,3 符合,其对应的两位数是 45,35,25,15,共 4 个. 故应选(B).

**解法** 2:设两位数为$\overline{ac}$,中间插入的一位数为 $b$,其中 $0<a<9$,$0\leqslant b\leqslant 9$,$0\leqslant c\leqslant 9$,则

$$\overline{abc}=9\,\overline{ac},$$

即　$5(a+b)=4c$.

∴　$5\mid c$,显然,$c\neq 0$,

∴　$c=5$,$a+b=4$.

解得　$\begin{cases}a=1,\\b=3;\end{cases}$或$\begin{cases}a=2,\\b=2;\end{cases}$或$\begin{cases}a=3,\\b=1;\end{cases}$或$\begin{cases}a=4,\\b=0.\end{cases}$

∴　$\overline{ac}=15,25,35,45$,选(B).

**例** 9　$n$ 是一个两位数,它的数字之和为 $a$,当 $n$ 分别乘以 3,5,7,9 以后得到 4 个乘积. 如果其每一个积的数字之和仍为 $a$,那么这样的两位数 $n$ 有(　　)

(A)3 个　(B)5 个　(C)7 个　(D)9 个

**解**:因 $9n$ 的数字和一定能被 9 整除,即 $a$ 能被 9 整除,从而 $n$ 能被 9 整除. 所以两位数 $n$ 只可能是 18,27,36,45,63,72,81,90,99. 易知 27,54,63,72 和 81 不满足条件(可以分别乘以 7,7,3,9,9 来检验). 而 18,36,45,90,99 经检验均满足条件. 故应选(B).

**例** 10　定义:如果 $n$ 个不同的正整数,对其中的任意两个数,这两数的积能被这两数的和整除,那么叫这组数为 $n$ 个数的祖冲之数组. 例如,60,120,180 这三个数就构成一个三个数的祖冲之数组.(因$(60\times 120)\div(60+120)$,$(60\times 180)\div(60+180)$,$(120\times 180)\div(120+180)$都是整数). 请你写出一组四个数的祖冲之数组.

**解**:受例子的启发,可设四个正整数为 $a,2a,3a,4a$,由定义知 $\frac{2a^2}{a+2a}=\frac{2}{3}a$ 为整数,由此可知 $3|a$,同理,$5|a,4|a,7|a$,即 $a$ 应为 3,4,5,7 的倍数,∴ $a_{最小}=3\times4\times5\times7=420$. 故符合要求的祖冲之数组为(420,840,1260,1680).

**说明**:本题的答案不是唯一的,例如(840,1680,2520,3360)也是一组四个数的祖冲之数组.

**例** 11　试求出所有这样的正整数 $n$,使得 $n^3+3$ 可被 $n+3$ 整除.

解:∵ $n^3+3=(n^3+3^3)-24$
$=(n+3)(n^2-3n+9)-24$,

∴ $(n+3)|24$,

∴ $n$ 可为 1、3、5、9 或 21.

**练一练**

(1)使 $n^3+100$ 能被 $n+10$ 整除的正整数 $n$ 的最大值是多少?

(2)设 $n^3+p$ 能被 $n+q$ 整除($n,p,q$ 是正整数),当 $n$ 最大时,相应的 $p$ 和 $q$ 的值是(　　)

(A) $p=100,q=10$　　(B) $p=500,q=120$

(C) $p=50,q=12$　　(C) $p=300,q=15$

**答案**:(1)$-890$;(2)D.

**例** 12　求证:和数 $1\times2\times3\times\cdots\times2000\times2001+2002\times2003\times\cdots\times4001\times4002$ 可被 4003 整除.

**证明**:∵ $2002\times2003\times\cdots\times4001\times4002$
$=(4003-2001)(4003-2000)(4003-1999)\cdots(4003-2)(4003-1)$
$=4003$ 的倍数 $-1\times2\times3\times\cdots\times2000\times2001$,

∴ 所给出的和数等于 4003 的倍数.

故所给和数可被 4003 整除.

**练一练**

求证：$1\times3\times5\times\cdots\times1983\times1985+2\times4\times6\times\cdots\times1984\times1986$ 被 1987 整除．

提示：$2\times4\times6\times\cdots\times1984\times1986$

$=(1987-1985)\times(1987-1983)\times\cdots\times(1987-3)\times(1987-1)$.

**例 13**　圆上有 9 个数字，已知从某一位起把这些数字按顺时针方向记下，得到一个 9 位数并且能被 27 整除，求证：如果从任何一位起把这些数字按顺时针方向记下，那么所得的一个 9 位数也能被 27 整除．

**证明**：假设从某位开始按顺时针方向读起，所得到的数

$$\overline{a_1a_2a_3\cdots a_9}=a_1\cdot10^8+a_2\cdot10^7+\cdots+a_8\cdot10+a_9$$

能被 27 整除．为了证明所提出的结论，显然只要证明：如果从相邻的一位读起所得到的数

$$\overline{a_2a_3a_4\cdots a_9a_1}=a_2\cdot10^8+a_3\cdot10^7+\cdots+a_9\cdot10+a_1$$

也能被 27 整除．现在来研究

$$10\cdot\overline{a_1a_2\cdots a_9}-\overline{a_2a_3\cdots a_9a_1}$$

$=a_1\cdot10^9+a_2\cdot10^8+\cdots+a_8\cdot10^2+a_9\cdot10-(a_2\cdot10^8+a_3\cdot10^7+\cdots+a_9\cdot10+a_1)$

$=a_1\cdot10^9-a_1$

$=(10^9-1)a_1$

$=(1000^3-1)a_1$.

$\because\quad 1000^3-1=(1000-1)(1000^2+1000+1)$

$\qquad\qquad=999\times(1000^2+1000+1)$,

而　$27\mid999$,

$\therefore\quad 27\mid(1000^3-1)$.

故 $\overline{a_2a_3\cdots a_9a_1}$ 能被 27 整除．

**例 14**　求证：对任何正整数 $n$，都有 $120\mid(n^5-5n^3+4n)$.

**证明**：$n^5-5n^3+4n$

$=n(n^4-5n^2+4)$

$=n(n^2-1)(n^2-4)$

$=(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2).$

$n=1,2$ 时,原式为 0,结论显然成立.

$n\geqslant 3$ 时,原式是 5 个连续正整数之积.

因为任意 5 个连续整数中都有一个数是 5 的倍数,所以 $n^5-5n^3+4n$ 可被 5 整除. 又因为任意三个连续整数中都有一个数是 3 的倍数,所以 $n^5-5n^3+4n$ 又可被 3 整除.

注意到任意五个连续整数中,至少有两个偶数,这两个偶数是相邻偶数,即这两个偶数中,至少有一个偶数是 4 的倍数. 因此 $n^5-5n^3+4n$ 又可被 8 整除.

因为 5,3,8 互质,所以$(5\times3\times8=)120$ 整除 $n^5-5n^3+4n$.

**练一练**

(1)求证:任意四个连续整数之积可被 24 整除.

(2)求证:任意六个连续整数之积可被 720 整除.

**试一试**

请读者由此规纳概括出一般性结论.

**例 15** 设 $n$ 是任意正整数,求证:$\frac{n^5}{5}+\frac{n^3}{3}+\frac{7n}{15}$是整数.

**证明:** $N=\frac{n^5}{5}+\frac{n^3}{3}+\frac{7n}{15}$

$$=\frac{n^5-5n^3+4n}{5}+\frac{5n^3}{5}-\frac{4n}{5}+\frac{n^3-n}{3}+\frac{n}{3}+\frac{7n}{15}$$

$$=n^3+\frac{n(n^2-1)(n^2-4)}{5}+\frac{n(n^2-1)}{3}$$

$$=n^3+\frac{(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)}{5}+\frac{(n-1)n(n+1)}{3}.$$

$\because$ $5|(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2),3|(n-1)n(n+1),$

∴　$N$ 是三个整数之和，

即　$N$ 是整数．

**例 16**　某商场向顾客发放 9999 张购物券，每张购物券上印有一个四位数的号码，从 0001 到 9999 号．如果号码的前两位数字之和等于后两位数字之和，则称这张购物券为“幸运券”．例如号码 0734，因 $0+7=3+4$，所以这个号码的购物券是幸运券．试证：这个商场所发的购物券中，所有幸运券的号码之和能被 101 整除．

**证明**：显然，号码为 9999 的是幸运券，除这张幸运券外，如果某个号码 $n$ 是幸运券，那么号码为 $m=9999-n$ 的购物券也是幸运券，由于 9999 是奇数，所以 $m\neq n$.

由于 $m+n=9999$，相加时不出现进位，这就是说，除去号码是 9999 这张幸运券外，其余所有幸运券可全部两两配对，而每一对两个号码之和均为 9999，即所有幸运券号码之和是 9999 的倍数．而 $9999=101\times 99$，所以，所有幸运券的号码之和能被 101 整除.

**例 17**　已知三个连续偶数的乘积是$\overline{8abcd2}$，试求这三个偶数．

**解**：由于偶数的个位数字必是偶数，故三个连续偶数的个位数字只能取 0，2，4，6，8 这五个数中连续的三个，已知六位数的个位数字是 2，因此，这三个相邻的偶数的个位数字只能取 4，6，8，因为 $100\times 100\times 100=1000000>\overline{8abcd2}$，说明所求的三个偶数都是两位数，经过估算，可知 94，96，98 符合要求．

**例 18**　证明：空间中不可能有这样的多面体存在，它们有奇数个面，每个面又都有奇数条边．

**证明**：设有 $n$ 个面，$n$ 为奇数，而每个面又有奇数条边为 $s_1$，$s_2$，…，$s_n$，总边数为 $s$，则 $s=\dfrac{s_1+s_2++s_n}{2}$.

∵　奇数个奇数之和为奇数，

$\therefore\quad 2\nmid(s_1+s_2+\cdots+s_n)$，

而 $s$ 是整数， $\therefore$ 矛盾．

故原命题成立．

**例 19** 求证：不存在这样边长为整数的等腰三角形，它的周长等于 2003 而面积为整数．

**证明**：假设存在这样的三角形，且底边和腰长分别为正整数 $a$ 和 $b$，则面积

$$S_{\triangle}=\frac{1}{4}a\sqrt{4b^2-a^2},$$

但 $a+2b=2003$ 是奇数，故 $a$ 为奇数，则 $4b^2-a^2$ 也是奇数，那么 $a\sqrt{4b^2-a^2}$ 是奇数或非整数，故 $S_{\triangle}$ 不可能为整数．故不存在这样的三角形．

**例 20** 沿江有 $A_1,A_2,\cdots,A_6$ 六个码头，相邻两个码头间的距离相等．早晨有甲、乙两船从 $A_1$ 出发，各自在这些码头间多次往返送货物．傍晚，甲船停泊在 $A_6$ 码头，而乙船返回 $A_1$ 码头．求证：两船的航程不等．（假定在两码头间航行时，中途不改变航向．）

**证明**：六个码头 $A_1$ 到 $A_6$ 把这段水路分成 5 小段，设每段的长为 $a$. 从 $A_1$ 出发再返回到 $A_1$，则往返每小段水路的次数总是相等的，因此，乙船的航程是 $a$ 的偶数倍；甲船的航行是 $A_1$ 到 $A_6$ 再加上各码头之间的往返路程，即 $5a$ 加上 $a$ 的偶数倍，这是 $a$ 的奇数倍．从而两船的航程不等．

**例 21** 将 $0,1,2,\cdots,n$ 这 $n+1$ 个数取 $n$ 个数并适当排列 $a_1,a_2,\cdots,a_n$，使得 $|a_1-a_2|,|a_2-a_3|,\cdots,|a_n-a_1|$ 恰为 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列，称为 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的一个“愉快排列”. 求证：若存在 $n$ 个数的“愉快排列”，则 $n=4k$ 或 $4k+3$（$k$ 是整数）.

**证明**：若存在 $n$ 个数的一个愉快排列 $a_1,a_2,\cdots,a_n$，则 $|a_1-a_2|$，$|a_3-a_4|,\cdots,|a_n-a_1|$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列，故 $1+2+\cdots+n=|a_1-a_2|+|a_2-a_3|+\cdots+|a_n-a_1|$ 与 $a_1-a_2+a_2-a_3+\cdots+a_n-a_1$

有相同的奇偶性,即 $1+2+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$ 是偶数. 从而 $n(n+1)$ 必能被4整除. 但 $n$ 和 $n+1$ 中有且仅有一个偶数. 当 $n$ 为偶数时, $n$ 必能被4整除,即 $n=4k$;当 $n+1$ 为偶数时, $n+1$ 必能被4整除,即 $n+1=4(k+1)$,所以 $n=4k+3$.

**例22** 如图1—10,给定两张 $3\times3$ 方格纸,并且在每一方格内填上"+","—"号. 现在对方格纸中任何一行或一列作全部变号的操作,问可否经过若干次操作,使图①变成图②?

| | | |
|---|---|---|
| + | + | — |
| + | + | — |
| — | — | + |

①

| | | |
|---|---|---|
| — | — | + |
| + | — | — |
| — | — | + |

②

图1—10

**解法1**:不能. 假设图①在第一、二、三行经过 $m_1,m_2,m_3$ 次操作,而第一、二、三列经过 $n_1,n_2,n_3$ 次操作变成图②. 由于图①和图②左上角符号相反,而从"+"变到"—"要进行奇数次变号,故 $m_1+n_1$ 是奇数. 同理, $m_2+n_1$ 是偶数, $m_1+n_2$, $m_2+n_2$ 都是奇数. 这样 $(m_1+n_1)+(m_1+n_2)+(m_2+n_1)+(m_2+n_2)$ 是奇数. 但这个和又等于 $2(m_1+m_2+n_1+n_2)$,是偶数,矛盾.

**解法2**:考虑图①中左上角 $2\times2$ 小块(全是"+"号). 每次操作是把一行或一列同时变号,所以这个小块中每次都改变偶数个符号(2个或0个),故它永远有偶数个"+"号. 这样,如果图①能变成图②,则图②左上角 $2\times2$ 小块也应有偶数个"+"号. 但图②中的这一小块中有奇数个"+"号(1个). 所以,图①不能变成图②.

**例23** 设有一张 $8\times8$ 的方格表,在表中任意填上64个非负整数(每格一数). 允许从表中任选一个 $3\times3$ 或 $4\times4$ 的子方

格表，并将这个子方格表中的 9 个或 16 个数都加上 1，这称为进行了一次操作．问是否可经过有限次操作后，一定能把表中的 64 个数全部变成 10 的倍数？证明你的结论．

**解**：不一定能．考虑如图 1—11 所示的 $8\times 8$ 方格表中带阴影的 20 个方格中的数，易知，无论取哪个 $3\times 3$ 或 $4\times 4$ 的子方格表，这个子方格表总有 2 或 4 或 6 个带阴影的小方格．这就是说，每进行一次操作，带阴影的 20 个方格中的 20 个数之和增加一个偶数．令 $S$ 是带阴影方格的 20 个数之和，若开始填表时，使 $S$ 为奇数，则无论进行多少次操作，$S$ 仍为奇数，但当每个方格中的数是 10 的倍数时，$S$ 应为偶数，这是不可能的．也就是说，在这种填法下，永远不能把表中 64 个数全变为 10 的倍数．

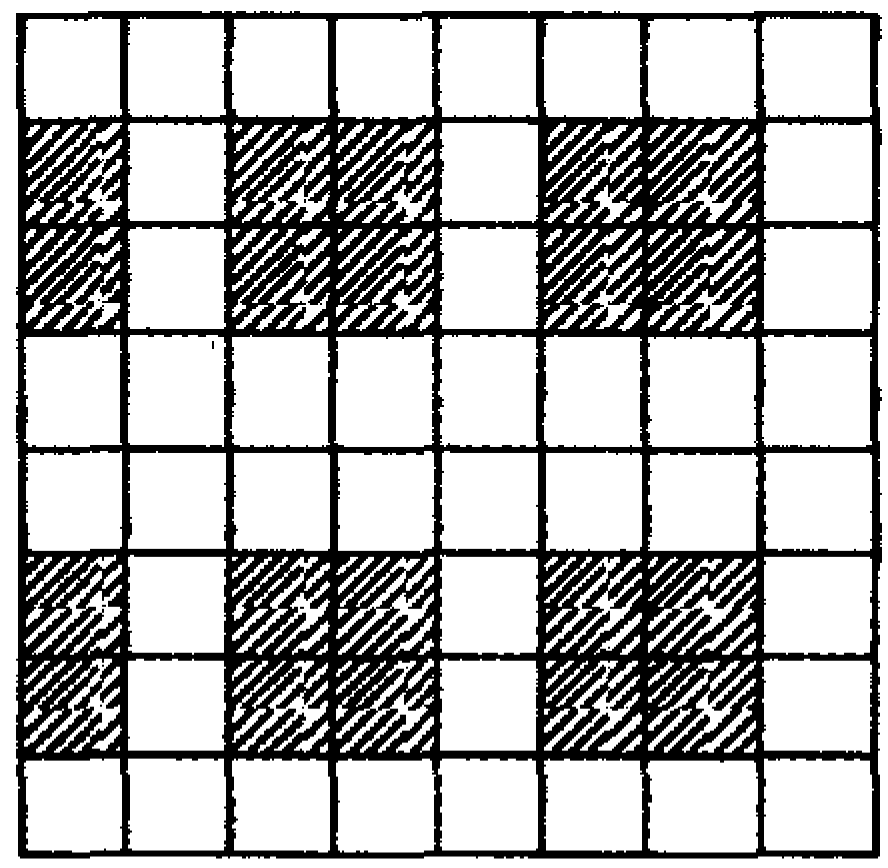


图 1—11

**试一试**

染色的方式不是唯一的，还有其他方式，读者不妨一试．

**例 24** 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n; y_1, y_2, \cdots, y_n; z_1, z_2, \cdots, z_n$ 都是 $+1$ 或 $-1$，且

$$x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n=0,$$
$$y_1z_1+y_2z_2+\cdots+y_nz_n=0,$$
$$z_1x_1+z_2x_2+\cdots+z_nx_n=0.$$

求证：$4\mid n$.

**证明**：由于每个 $x_i, y_i$ 均为 $+1$ 或 $-1$，从而 $x_1y_1, x_2y_2, \cdots, x_ny_n$ 也只能取 $+1$ 或 $-1$，而这样的 $n$ 项之和等于 0，则取 $+1$ 或 $-1$ 的个数必相等，因而 $n$ 必是偶数，可设 $n=2m$，即 $x_1y_1, x_2y_2, \cdots, x_ny_n$ 中有 $m$ 个 $-1$. 同样 $y_1z_1, y_2z_2, \cdots y_nz_n$ 和 $z_1x_1, z_2x_2, \cdots z_ny_n$ 中也有 $m$ 个 $-1$. 下面证 $m$ 也是偶数．

由 $(x_1y_1)(x_2y_2)\cdots(x_ny_n)=(-1)^m$,

$$(y_1z_1)(y_2z_2)\cdots(y_nz_n)=(-1)^m,$$
$$(z_1x_1)(z_2x_2)\cdots(z_nx_n)=(-1)^m,$$

三式相乘，得

$$1=(-1)^{3m}.$$

从而 $3m$ 是偶数，即 $m$ 为偶数．故 $4|n$.

**例** 25　假设 $a,b,c,d$ 是整数，且数 $ac,bc+ad,bd$ 都能被某整数 $u$ 整除．求证：数 $bc$ 和 $ad$ 也都能被 $u$ 整除．

**证明**：将恒等式

$$(bc-ad)^2=(bc+ad)^2-4abcd$$

两边除以 $u^2$，得

$$\left(\frac{bc-ad}{u}\right)^2=\left(\frac{bc+ad}{u}\right)^2-4\,\frac{ac}{u}\cdot\frac{bd}{u}. \tag{①}$$

上式右端是整数，故左端 $\frac{bc-ad}{u}$ 应是整数．

由关系式①，整数

$$s=\frac{bc+ad}{u},\quad t=\frac{bc-ad}{u}$$

的平方差等于偶数．因此，数 $s$ 与 $t$ 或者同为偶数或者同为奇数，不论哪种情形

$$\frac{bc}{u}=\frac{s+t}{2}\text{和}\frac{ad}{u}=\frac{s-t}{2}$$

都是整数，即数 $bc$ 和 $ad$ 都能被 $u$ 整除．

**例** 26　已知质数 $p$ 和 $q$ 满足关系式 $3p+5q=31$，则 $\frac{p}{3q+1}$ 的值是________．

**解**：由 $3p+5q=31$ 知，$3p$ 和 $5q$ 必一奇一偶．

若 $p=2$，则 $q=5$，故 $\frac{p}{3q+1}=\frac{1}{8}$；

若 $q=2$，则 $q=7$，故 $\frac{p}{3q+1}=1$.

**例** 27　已知 $a,b$ 是任意两个大于 3 的质数，那么 $a^2-1$ 与

$b^2-1$ 的最大公约数的最小值是________.

**解**:由于 $a$ 是大于 3 的质数,故 $a-1$ 与 $a+1$ 是两个相邻的偶数,且其中有一个是 3 的倍数,故 $24|(a^2-1)$. 同理,$24|(b^2-1)$. 又当 $a=b=5$ 时,$a^2-1=b^2-1=24$,故最大公约数的最小值的 24.

**例** 28　$p$ 是质数,设 $q=4^p+p^4+4$ 也是质数,则 $q$ 为________.

**解**:因为 $q=4(4^{p-1}+1)+p^4$ 是质数,故 $p\neq2$,即 $p$ 为大于 2 的奇质数.

$p=3$ 时,$q=4(4^2+1)+3^4=149$(质数),

$p=5,7,11\cdots$等均不合题意,故 $q=149$.

**例** 29　假设 $p$ 是大于 2 的质数,那么把$\frac{2}{p}$表示成两个不同的单位分数之和有(　　)种方法(加数相同只算一种).

(A)0　　(B)1　　(C)3　　(D)4

**解**:$p$ 是奇质数,且$\frac{1}{p}=\frac{1}{p+1}+\frac{1}{p(p+1)}$,

即　$\frac{2}{p}=\frac{1}{\frac{p+1}{2}}+\frac{1}{\frac{p(p+1)}{2}}$是唯一的一种,故选(B).

**例** 30　$a$ 与 $b$ 是两个质数($a>b$),并且 $a+b$ 与 $a-b$ 也都是质数. 试确定 $19a+97b$ 之值.

**解**:由 $a+b$ 与 $a-b$ 奇偶性相同,且均为质数,可知 $a+b$ 与 $a-b$ 都是奇质数. 又 $a$ 与 $b$ 也都是质数,$a$ 与 $b$ 必一个奇数一个偶数. 所以 $a,b$ 中较小者为偶质数 2,即 $b=2$,又 $a-2>2$,所以 $a>4$. 考虑到 $a-2$、$a$、$a+2$ 被 3 除的余数彼此不同,其中必有一个是被 3 整除的,但它又是质数,所以必有一个是 3. 只能 $a-2=3$,$a=5$. 于是

$$19a+97b=19\times5+97\times2=289.$$

**例** 31　设 $p$ 是大于 5 的质数,求证:$240|(p^4-1)$.

**证明**：由于 $240=2^4\times3\times5$，因此只须分别验证 $2^4\mid(p^4-1)$，$3\mid(p^4-1)$，$5\mid(p^4-1)$.

∵　$p^4-1=(p-1)(p+1)(p^2+1)$，

且　质数 $p>5$，

∴　$p$ 为奇数.

因为 $p^2+1$ 是 2 的倍数，而 $p-1$ 和 $p+1$ 是相邻偶数，故其中的一个是 2 的倍数，另一个是 4 的倍数，从而 $2^4\mid(p^4-1)$.

因为 $p$ 是质数，故 $3\nmid p$. 于是 $p$ 被 3 除余 1 或 2，易证 $3\mid(p^4-1)$.（请读者写出证明过程.）

因为质数 $p>5$，所以 $p=5q+1,5q+2,5q+3,5q+4$，易证 $5\mid(p^4-1)$.（请读者写出证明过程.）

综上所述知 $240\mid(p^4-1)$.

**例 32**　对正整数 $x,y$，称 $(x,y)$ 为一个数组，此外还规定当 $x\neq y$ 时，数组 $(x,y)$ 与 $(y,x)$ 是不同的数组. 例如，$(1,2)$ 和 $(2,1)$ 是不同的数组. 如果正整数 $x,y$ 的最小公倍数是 30，求这样的数组 $(x,y)$ 的个数.

**解**：因为 $x,y$ 的最小公倍数是 30，所以 $x,y$ 均为 30 的约数，又 $30=2\times3\times5$.

(1)若 $x=2\times3\times5$，则满足题意的 $y$ 是 30 的任一约数，这样的 $y$ 有 $(1+1)\times(1+1)\times(1+1)=8$ 个，这时数组 $(x,y)$ 有 8 个.

(2)若 $x$ 为 30 的 2 个质因数的乘积时，这样的 $x$ 有 3 个，其对应的 $y$ 为 30 的另一个质因数与 $x$ 的约数的乘积，这样的 $y$ 有 $(1+1)\times(1+1)=4$ 个，这时数组 $(x,y)$ 有 $3\times4=12$ 个.

(3)若 $x$ 为 30 的质因数时，这样的 $x$ 有 3 个，其对应的 $y$ 为 30 的另两个质因数的乘积或 30，这样的 $y$ 有 2 个，这时数组 $(x,y)$ 有 $3\times2=6$ 个.

(4)若 $x=1$，其对应的 $y=30$，这时数组 $(x,y)$ 有 1 个.

所以，这样的数组 $(x,y)$ 共有：

$8+12+6+1=27$ 个．

**例** 33　一个大于 1 的正整数，如果它恰好等于其不同真因子（除 1 及本身以外的因子）的积，那么称它为“好的”．求前十个“好的”正整数的和．

**解**：设正整数 $n$ 的不同的真因子依递增顺序排列，依次是 $d_1, d_2, \cdots, d_k$，则必有

$$1 \cdot n = d_1 \cdot d_k = d_2 \cdot d_{k-1} = \cdots.$$

若 $n$ 是“好的”，则又应有

$$1 \cdot n = d_1 \cdot d_2 \cdots d_k.$$

$$\therefore \quad d_1 \cdot d_k = d_1 d_2 \cdots d_k.$$

因此，$k$ 只能是 2．显然，$d_1$ 必须为质数，否则，若 $d_1$ 是合数，则 $d_1$ 的质因数 $p$ 必在上面的因数递增序列中出现，且在 $d_1$ 之前，这是不可能的．同理 $d_2$ 也必须是质数或 $d_1{}^2$．所以，$n$ 只能是两个不同质数之积，或一质数的立方．由此，可以求得前十个“好的”正整数：6，8，10，14，15，21，22，26，27，33．它们的和是 182．

## §1.9　水平测试题一

1. 把一个两位数的两个数字互换，得到一个新数，它与原来的数相加，所得的和恰好等于某个正整数的平方．则和数是________，最大两位数是________．

2. 一个三位数被它的各位数字之和整除，那么所得的商最小是________，最大是________．

3. $a,b,c$ 都是正整数，且满足 $ab+bc=3984$，$ac+bc=1993$，则 $abc$ 的最大值是________．

4. 用 1，2，3，4，5，6，7，8 这八个数字组成两个四位数，在它们的乘积中最大奇数是________，最大偶数是________．

5. 一个完全平方数 $n^2$（$n$ 是大于 1 的正整数），至多可以表示成________个不同的正奇数之和．

6. 一个四位数能被 9 整除，去掉末位数后得到的三位数是 4 的倍数，则这样的四位数中最大的一个，它的末位数是________．

7. 用 1，3，4，5，7，8 这六个数组成的六位数中，能被 11 整除的最大的数是________．

8. 有一个 11 位数，从左到右，前 $k$ 位数能被 $k$ 整除（$k=1,2,3,\cdots,11$），这样的最小 11 位数是________．

9. 在 $1,2,3,\cdots,n$ 这 $n$ 个正整数中，已知共有 $p$ 个质数，$q$ 个合数，$k$ 个奇数，$m$ 个偶数，则 $(q-m)+(q-k)=$________．

10. 满足方程组 $\begin{cases} ab+bc=44, \\ ac+bc=23 \end{cases}$ 的正整数组 $(a,b,c)$ 的组数是________．

11. 直角三角形有一条直角边的长是质数 $n$，另两条边长是某两个正整数，那么它的周长是________．

12. 已知正整数 $m,n$ 满足 $1^2+9^2+9^2+2^2+m^2=n^2$，则 $n$

$=$_________.

13.(1)已知三个连续正整数的最小公倍数是 660，求这三个数；

(2)已知 $a,b$ 的最大公约数是 12，最小公倍数是 72，并且 $a<b$，求 $a,b$.

14. 已知锐角$\triangle ABC$中，三个内角的度数都是质数，求证：$\triangle ABC$必是等腰三角形．问其中最大角是多少度？

15. 已知 $m,n$ 都是质数，方程 $x^2-mx+n=0$ 有两个正整数根 $k,t$，求 $m^n+n^m+k^t+t^k$ 的值．

16. 若 $n$ 小于 50 的正整数，求使代数式 $4n+5$ 和 $7n+6$ 的值有大于 1 的公约数的所有 $n$ 的值．

17. 已知 $n$ 是一个 1997 位的正整数，$n$ 被 9 整除，$n$ 的各位数字之和为 $p$，$p$ 的各位数字之和为 $q$，$q$ 的各位数字之和是 $r$，求 $r$ 的值．

18. 1，2，3，4，5，6 每个使用一次组成一个六位数$\overline{abcdef}$，使得三位数$\overline{abc}$，$\overline{bcd}$，$\overline{cde}$，$\overline{def}$能依次被 4，5，3，11 整除，求这个六位数．

19. 把 27 个大小相同的小正方体蛋糕堆成一个正方体，一条小虫从中心蛋糕内出发，能否从内部不重复地穿过所有小正方体蛋糕？证明你的结论．

20. 有 40 个小孩，每个小孩胸前号码数分别是 1，2，…，40，请你挑选出若干个小孩围成一圈，使任意相邻两个小孩胸前号码数之积都小于 100，你最多能挑选出多少个小孩？

# 第2章 同　余

我们在解决一些有关整数的问题时，并不关心具体的数字是多少，而是关心被某个整数所除而得到的余数是多少．例如，2004年的元旦是星期四，2005年的元旦是星期几？因为2004年全年共有366天，而366除以7的余数是2，所以2005年的元旦是星期六，再如，今天是星期六，101010天后是星期几？这也是同余的问题．

我国古代对同余问题有比较深入地研究，其中比较著明的有《孙子算经》中的“物不知数”问题，秦九韶的“大衍求一术”的解同余方程的方法，以及中国剩余定理．其实，有关同余的记载最早的是“韩信点兵”的故事．据说韩信在点兵的时候，为了军事保密，不让敌人知道自己的兵力，先让士兵从1到3报数，然后记住最后一个士兵所报的数；再让士兵从1到5报数，也记住最后一个士兵所报的数；最后让士兵从1到7报数，又记下最后一个士兵所报之数．这样，他就很快算出了自己士兵的总人数，而敌人却无法弄清他的兵力．想知道韩信是怎样算出自己士兵的人数吗？请看后面的解同余方程．

然而，创立同余论的并不是我国古代的数学家，而是大数学家高斯．高斯最早使用了“同余”的概念，并创立了同余理论. 下面我们就同余论作一个简单的介绍．

# §2.1 同余的概念和性质

## 一、同余的概念

顾各思义，同余就是余数相同，是指被同一个正整数所除，得到的余数相同．

**定义**：设 $a,b$ 是两个整数，如果 $a$ 和 $b$ 被正整数 $m$ 除所得余数相同，则称 $a$ 与 $b$ 对于模 $m$ 同余．记作：

$$a\equiv b(\mathrm{mod}\ m),$$

否则，就称 $a$ 与 $b$ 对于模 $m$ 不同余，记作 $a\not\equiv b(\mathrm{mod}\ m)$.

根据定义，$a$ 与 $b$ 是否同余，不仅与 $a$、$b$ 有关，还与模 $m$ 有关．同一对数 $a$ 和 $b$，对于模 $m$ 同余，而对于模 $n$ 也许就不同余．例如，$5\equiv 8(\mathrm{mod}\ 3)$，而 $5\not\equiv 8(\mathrm{mod}\ 4)$. 另外，根据同余的定义，显然有以下几种关系是成立 的：

(1) $a\equiv a(\mathrm{mod}\ m)$

(2) $a\equiv b(\mathrm{mod}\ m)\Leftrightarrow b\equiv a(\mathrm{mod}\ m)$

(3) $\left.\begin{array}{l}a\equiv b(\mathrm{mod}\ n)\\ b\equiv c(\mathrm{mod}\ m)\end{array}\right\}\Rightarrow a\equiv c(\mathrm{mod}\ m)$

由此可见，同余是一种等价关系，以上这三条分别叫做同余的反射性，对称性和传递性，而等式也具有这几条性质．想一想，等式的其它性质，哪些同余式也具有．

**例 1**　如果 $a\equiv b(\mathrm{mod}\ m)$，以下命题正确的有哪些？请说明理由？

(1) $m|a-b$　　　(2) $a=b+mt$

(3) $a=k_1m+r_1, b=k_2m+r_2\quad(0\leqslant r_1, r_2<m)\Leftrightarrow r_1=r_2$

**解**：(1) 因 $a\equiv b(\mathrm{mod}\ m)$，所以可得 $a=k_1m+r, b=k_2m+r$. 那么 $a-b=(k_1-k_2)m$，由于 $k_1-k_2$ 是整数，因此 $m|a-b$ 是正确的．

(2)根据(1)可得 $a-b=mt$，即 $a=b+mt$

(3)根据(1)可得，$m|r_1-r_2$，又因为 $0\leqslant|r_1-r_2|<m$，所以 $|r_1-r_2|=0$，故 $r_1=r_2$.

**说明**：可以进一步分析，由本题的(1)、(2)、(3)条件中任何一种关系也可以得到 $a\equiv b(\mathrm{mod}\ m)$，这一点留给同学们自己去探求．因此，$a\equiv b(\mathrm{mod}\ m)$与本题的三条中任何一种关系都是等价的．$a$ 同余于 $b$ 模 $m$ 也可以定义为"$m|a-b$"或"$a=b+mt$"．有时用这两个定 义来解决同余问题，反而比前面的定义要方便一些．

**例 2**　判断正误，并说明理同．

(1)如果 $a\equiv b(\mathrm{mod}\ m)$那么 $ka\equiv kb(\mathrm{mod}\ m)$

(2)如果 $a\equiv b(\mathrm{mod}\ m)$，$c$ 是整数，那么 $a\pm c\equiv b\pm c(\mathrm{mod}\ m)$.

(3)如果 $a_1\equiv b_1(\mathrm{mod}\ m)$，$a_2\equiv b_2(\mathrm{mod}\ m)$，那么 $a_1\pm a_2\equiv b_1\pm b_2(\mathrm{mod}\ m)$，$a_1a_2\equiv b_1b_2(\mathrm{mod}\ m)$.

(4)如果 $3a\equiv 3b(\mathrm{mod}\ 6)$，那么 $a\equiv b(\mathrm{mod}\ 6)$

**解**：(1)$\because a\equiv b(\mathrm{mod}\ m)$.

$\therefore m|a-b$.

$\therefore m|k(a-b)$　即 $m|(ka-kb)$

$\therefore ka\equiv kb(\mathrm{mod}\ m)$　(1)成正确．

(2)$\because a\equiv b(\mathrm{mod}\ m)$.

$\therefore m|a-b$

又因为 $c$ 是整数，所以 $m|a-c-b+c$，即 $m|(a-c)-(b-c)$即 $a-c\equiv b-c(\mathrm{mod}\ m)$. 同理可得，$a+c\equiv b+c(\mathrm{mod}\ m)$

(3)仿照上面的两个小题的方汪，可以判定这个命题也是正确的．

(4)显然 $6\equiv 12(\mathrm{mod}\ 6)$，而 $2\not\equiv 4(\mathrm{mod}\ 6)$. 因此，这个命题不正确．

**说明**：(3)的结论可以得到同余的另一条性质，即 $a\equiv b(\mathrm{mod}\ m)\Rightarrow a^n\equiv b^n(\mathrm{mod}\ m)$

此题说明两个同余式能够象等式一样进行加、减、乘、乘方，但同余式两边却不能除以同一数．那么，同余式的两边在什么情况下可以同除以一个数呢？我们先看下面的例题．

**例** 3　由下面的哪些同余式可以得到同余式 $a\equiv b\pmod 5$.

①$3a\equiv 3b\pmod 5$　②$10a\equiv 10b\pmod 5$

③$6a\equiv 6b\pmod{10}$　④$10a\equiv 10b\pmod{20}$

**解**：①因 $3a\equiv 3b\pmod 5$，所以 $5\mid 3(a-b)$，而 $5\nmid 3$，因此 $5\mid a-b$，故 $a\equiv b\pmod 5$.

②由 $10a\equiv 10b\pmod 5$ 可以得到 $5\mid 10(a-b)$，而 $5\mid 10$，因此 5 不一定整除 $a-b$，故 $a\equiv b\pmod 5$ 就不成立．

③由 $6a\equiv 6b\pmod{10}$ 可得 $10\mid 6(a-b)$. 而 $10=2\times 5$，$6=2\times 3$，因此 $5\mid a-b$，故 $a\equiv b\pmod 5$ 成立．

④由 $10a\equiv 10b\pmod{20}$ 可得到 $20\mid 10(a-b)$，而 $20=4\times 5$，$4\nmid 10$，因此 $5\nmid(a-b)$，故 $a\equiv b\pmod 5$ 不成立．

综上所述，由 $3a\equiv 3b\pmod 5$ 或 $6a\equiv 6b\pmod{10}$ 都可以得到 $a\equiv b\pmod 5$.

**说明**：在①中，因为 $(3,5)=1$，因此由 $5\mid 3(a-b)$ 一定可以得到 $5\mid a-b$，进而得到 $a\equiv b\pmod 5$. 一般地，如果 $(k,m)=1$，$ka\equiv kb\pmod m$，那么 $a\equiv b\pmod m$.

在③中，因 $(6,10)=2$，因此由 $10\mid 6(a-b)$ 一定可以得到 $5\mid a-b$，进而得到 $a\equiv b\pmod 5$，一般地，如果 $(k,m)=d$，$ka\equiv kb\pmod m$，那么 $a\equiv b\pmod{\frac{m}{d}}$.

由以上几个例题可以发现同余式与等式的性质具有许多可以类比的地方．但是，同余式与等式具有本质的区别，因此它还具有一些等式所不具有的性质．

**例** 4　如果 $a\equiv b\pmod{12}$ 且 $a\equiv b\pmod 8$，那么以下同余式一定成立的是哪些？

①$a\equiv b\pmod 4$　②$a\equiv b\pmod{24}$

③$a\equiv b\ (\mathrm{mod}\ 20)$　④$a\equiv b\ (\mathrm{mod}\ 48)$

**解**:正确的有①和②

①由题中的条件可得 $12\mid a-b$,又因 $4\mid 12$,所以 $4\mid a-b$,故 $a\equiv b\ (\mathrm{mod}\ 4)$.

②因 $12\mid a-b$,$8\mid a-b$,所以 $a-b$ 是 12 和 8 的公倍数,又因为 $[8,12]=24$,因此 $a-b$ 必是 24 的倍数,即 $24\mid a-b$. 故 $a\equiv b\ (\mathrm{mod}\ 24)$

③显然,当 $a=26$,$b=2$ 时满足条件 $a\equiv b\ (\mathrm{mod}\ 12)$ 和 $a\equiv b\ (\mathrm{mod}\ 8)$,但却不满足 $a\equiv b\ (\mathrm{mod}\ 20)$

④同③. 用 $a=26$,$b=2$ 验证即可.

**说明**:

(1)一般地,若 $a\equiv b\ (\mathrm{mod}\ m)$且 $n\mid m$,那么 $a\equiv b\ (\mathrm{mod}\ n)$.

(2)若 $a\equiv b\ (\mathrm{mod}\ m)$,$a\equiv b\ (\mathrm{mod}\ n)$,那么 $a\equiv b\ (\mathrm{mod}\ [m,n])$. 它的一个特殊情况就是:

如果 $a\equiv b\ (\mathrm{mod}\ m)$,$a\equiv b\ (\mathrm{mod}\ n)$且$(m,n)=1$,那么 $a\equiv b\ (\mathrm{mod}\ mn)$.

前面,我们把同余式和等式相类比,以例题的形式给出了同余式的性质,为了让大家更容易掌握这些性质,有的还举出了反例. 同学们应熟练掌握这些性质. 下面把这些性质做一个简单的归纳,以方便同学们运用这些性质.

1. 同余定义的等价形式

①$a\equiv b\ (\mathrm{mod}\ m)\Leftrightarrow m\mid a-b$;

②$a\equiv b\ (\mathrm{mod}\ m)\Leftrightarrow a=b+mt$.

2. 同余式的同加、同乘性

如果 $a_1\equiv b_1(\mathrm{mod}\ m)$,$a_2\equiv b_2(\mathrm{mod}\ m)$那么

(1)$a_1\pm a_2\equiv b_1\pm b_2(\mathrm{mod}\ m)$

(2)$ka_1\equiv kb_1(\mathrm{mod}\ m)(k\in Z)$

(3)$a_1a_2\equiv b_1b_2(\mathrm{mod}\ m)$

(4)$a_1{}^n\equiv b_1{}^n(\mathrm{mod}\ m)$ ($n$ 是整数).

3. 如果$(k, m)=d$，$ka\equiv kb \pmod{m}$，那么 $a\equiv b \pmod{\frac{m}{d}}$.

这条性质的直接推论就是：

如果$(k,m)=1$，$ka\equiv kb \pmod{m}$，那么 $a\equiv b \pmod{m}$.

4. 如果 $a\equiv b \pmod{m}$且 $n|m$，那么 $a\equiv b \pmod{n}$.

5. 如果 $a\equiv b \pmod{m}$，$a\equiv b \pmod{n}$，那么 $a\equiv b \pmod{[m,n]}$.

这条性质的一个推论就是：

如果 $a\equiv b \pmod{m}$，$a\equiv b \pmod{n}$且$(m,n)=1$，那么 $a\equiv b \pmod{mn}$.

前两条性质是整除的简单性质用同余符号来表示，后几条性质是同余式与等式不同的性质．下面我进一步探讨同余式的应用，同学们可以与第一章的整除性相比较，体会二者的区别与联系．

**例** 5　(1)求 $1999^{2002}$除以 9 的余数．

(2)求 $10^{10}$除以 7 的余数．

**解**：(1)$\because 9|1999-1000$

$\therefore 1999\equiv 1000\equiv 1 \pmod{9}$

$\therefore 1999^{2000}\equiv 1^{2002}\equiv 1 \pmod{9}$

$\therefore 1999^{2002}$除以 9 的余数是 1.

(2)$\because 10\equiv 3 \pmod{7}$

$\therefore 10^{3}\equiv 3^{3}\equiv -1 \pmod{7}$

$\therefore 10^{6}\equiv (-1)^{2}\equiv 1 \pmod{7}$

$\therefore 10^{10}\equiv 10^{4} \pmod{7}$

又$\because 10^{2}\equiv 9\equiv 2 \pmod{7}$

$\therefore 10^{10}\equiv 10^{4}\equiv 2^{2}\equiv 4 \pmod{7}$

所以 $10^{10}$除以 7 的余数是 4.

**说明**：求较大数的余数时，可先设法找到与$\pm 1$同余的数，然后利用同余式的性质，求出所求数的余数．

**例 6**　　求 $145^{89}+3^{2002}$除以 13 的余数．

**解**：$\because 145\equiv 2 \pmod{13}$

$\therefore 145^6\equiv 2^6\equiv -1 \pmod{13}$

$\therefore (145^6)^{14}\equiv(-1)^{14}\equiv 1 \pmod{13}$即 $145^{84}\equiv 1 \pmod{13}$

又$\because 145^5\equiv 2^5\equiv 6 \pmod{13}$

所以 $145^{89}\equiv 145^{84}\cdot 145^5\equiv 6\times 1\equiv 6 \pmod{13}$

又$\because 3^3\equiv 1 \pmod{13}$

$\therefore (3^3)^{667}\equiv 3^{2001}\equiv 1 \pmod{13}$

$\therefore 3^{2002}\equiv 3 \pmod{13}$

所以，$145^{89}+3^{2002}\equiv 6+3\equiv 9 \pmod{13}$

即 $145^{89}+3^{2002}$除以 13 的余数是 9.

**练一练**

1.(1)求 $9^{2000}$除以 7 的余数．

(2)求 $257^{33}+46$ 除以 50 的余数.

2. 今天是星期二，再过 $222^{333}$天之后是星期几？

**例 7.** 求 $2003^{2002}$的末位数字．

**分析**：此题就是求 $2003^{2002}$除以 10 的余数．

解：$\because 2003\equiv 3 \pmod{10}$

$\therefore 2003^4\equiv 3^4\equiv 1 \pmod{10}$

$$\begin{aligned}\therefore 2003^{2002}&\equiv(2003^4)^{500}\cdot 2003^3\\&\equiv 1^{500}\cdot 3^3\\&\equiv 27\\&\equiv 7 \pmod{10}\end{aligned}$$

$\therefore 2002^{2002}$的末位数字是 7.

**说明**：对于十进制的整数 $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}$ 有如下性质：$\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}\equiv a_0 \pmod{10}$.

**想一想**

怎样求一个十进制的整数的末两位数？末三位数？并求 $7^{2002}$的末两位数．

**例** 8　求 $1998^{2002}$ 的十位数字.

**分析**:此题可以通过 $1998^{2002}$ 的末两位数来求解,与前面的方法类似.

**解**:∵ $1998 \equiv 98 \equiv -2 \pmod{100}$

$$\therefore 1998^{2002} \equiv (-2)^{2002} \equiv 2^{2002} \equiv 4^{1001} \pmod{100}$$

因为 $4 \equiv 4 \pmod{100}$　$4^2 \equiv 16 \pmod{100}$

$4^3 \equiv 64 \pmod{100}$ $4^4 \equiv 56 \pmod{100}$

$4^5 \equiv 24 \pmod{100}$, $4^6 \equiv 96 \pmod{100}$

$4^7 \equiv 84 \pmod{100}$, $4^8 \equiv 36 \pmod{100}$

$4^9 \equiv 44 \pmod{100}$ $4^{10} \equiv 76 \pmod{100}$

$4^{11} \equiv 4 \pmod{100}$　…

所以 $4^n$ 除以 100 的余数是以 4、16、64、56、24、96、84、36、44、76 周期性出现的. 因 $4^{1001} = 4^{10 \times 100 + 1}$,所以 $4^{1001} \equiv 4 \pmod{100}$. 因此 $1998^{2002} \equiv 4 \pmod{100}$. 故 $1998^{2002}$ 的十位数字是 0.

**说明**:正整数幂的末位数、末两位数、末三位数都具有周期性.

## 二、同余在整除中的应用

整除问题,实际上就是余数为 0 的问题. 有时运用同余符号解整除问题,要比运用整除符号方便得多.

**例** 9　求证 $2^{2000}+1$ 不能被 7 整数.

**分析**:只需证明 $2^{2000} \not\equiv -1 \pmod{7}$ 即可.

**证明**:∵ $2^6 \equiv 1 \pmod{7}$

$$\therefore 2^{2000} \equiv (2^6)^{333} \cdot 2^2 \equiv 1 \cdot 2^2 \equiv 4 \pmod{7}$$

$\therefore 2^{2000}+1 = 5 \pmod{7}$

所以 $7 \nmid 2^{2000}+1$.

**例** 10　已知 $n$ 是正整数,证明 $48 \mid 7^{2n}-2352n-1$

**证明**:∵ $48 = 3 \times 16$, $(3,16)=1$

∴只需证明 $3 \mid 7^{2n}-2352n-1$ 且 $16 \mid 7^{2n}-2352n-1$ 即可

∵ $7 \equiv 1 \pmod{3}$　$2352 \equiv 0 \pmod{3}$

$\therefore 7^{2n}-2352n-1\equiv 1^{2n}-2352\times 0-1\equiv 0 \pmod 3$

$\therefore 3 \mid 7^{2n}-2352n-1$

又 $\because 2352=16\times 147$　$\therefore 2352\equiv 0 \pmod{16}$

$\therefore 7^{2n}-2352n-1\equiv 49^{n}-1\equiv 1^{n}-1\equiv 0 \pmod{16}$

$\therefore 16 \mid 7^{2n}-2352n-1$

所以 $48 \mid 7^{2n}-2352n-1$.

**说明**:当模很大时,可以用本题的方法把问题化为较小的模来求解.请同学们用这个方法重解例 8.

**例 11**　若 $m$、$n$ 都是正整数,且 $10 \mid 1987^{m}+1$

求证:$10 \mid 1987^{m+4n}+1$.

**分析**:因 $10=2\times 5$,$(2,5)=1$,所以只须证明 $2 \mid 1987^{m+4n}+1$,$5 \mid ^{m+4n}+1$

**证明**:$\because 1987\equiv 1 \pmod 2$

$\therefore 1987^{m+4n}+1\equiv 1^{m+4n}+1\equiv 2\equiv 0 \pmod 2$

$\therefore 2 \mid 1987^{m+4n}+1$

又 $\because 10=2\times 5$,$10 \mid 1987^{m}+1$

$\therefore 5 \mid 1987^{m}+1$　即 $1987^{m}\equiv -1 \pmod 5$

$$\begin{aligned}\therefore 1987^{m+4n}+1 &\equiv (-1)\cdot 1987^{4n}+1\\ &\equiv (-1)\cdot 2^{4n}+1\\ &\equiv 1-16^{n}\\ &\equiv 1-1^{n}\\ &\equiv 0 \pmod 5\end{aligned}$$

即 $5 \mid 1987^{m+4n}+1$

所以 $10 \mid 1987^{m+4n}+1$.

**例 12**　已知 $n$ 是任意的正整数,且 $m \mid 7^{n}+12n-1$,求正整数 $m$ 的最大值.

**解**:设 $a_n=7^{n}+12n-1$. 那么

$$a_1=7+12-1=18, a_2=7^2+24-1=72$$

$\therefore (a_1,a_2)=(18,72)=18$

$\therefore m \leqslant 18$.

下面证明对任何正整数 $n$，都有 $18 \mid 7^n+12n-1$

又因为 $18=2\times 9$，所以只须证明 $2 \mid 7^n+12n-1, 9 \mid 7^n+12n-1$ 即可.

$\because 7\equiv 1 \pmod 2$

$\therefore 7^n+12n-1\equiv 1^n+0-1\equiv 0 \pmod 2$

即 $2 \mid 7^n+12n-1$

对 $n$ 进行分类讨论.

(ⅰ)若 $n\equiv 0 \pmod 3$　则 $n=3k$（$k$ 为正整数）.

$$\begin{aligned}7^n+12n-1 &\equiv 7^{3k}+36k+1\equiv(-2)^{3k}+0-1\\ &\equiv(-8)^k-1\\ &\equiv 1^k-1\\ &\equiv 0 \pmod 9\end{aligned}$$

(ⅱ)若 $n\equiv 1 \pmod 3$，则 $n=3k+1$（$k$ 为非负整数）.

$$\begin{aligned}7^n+12n-1 &\equiv 7^{3k}\cdot 7+36k+12-1\\ &\equiv 7+12-1\equiv 0 \pmod 9\end{aligned}$$

(ⅲ)若 $n\equiv 2 \pmod 3$，则 $n=3k+2$（$k$ 为非负整数）

$$\begin{aligned}7^n+12n-1 &\equiv 7^{3k}\cdot 7^2+36k+24-1\\ &\equiv 7^2+24-1\equiv 0 \pmod 9\end{aligned}$$

因此，对一切自然数 $n$，都有 $9 \mid 7^n+12n-1$.

综上所述，$18 \mid 7^n+12n-1$. 因此 $m$ 的最大值为 18.

## 三、费尔马小定理

法国数学家费尔马在 1640 年提出了一个有关整数幂余数的定理，在解决许多关于某个整数幂除以某个整数的余数问题时非常方便有用．在介绍这个定理之前，我们先来看一些具体的同余式，请同学们注意观察，发现这些同余式符合什么规律．

$3\equiv 1 \pmod 2, 5\equiv 1 \pmod 2, 7\equiv 1 \pmod 2 \cdots$

$2^2\equiv 1 \pmod 3, 4^2\equiv 1 \pmod 3, 5^2\equiv 1 \pmod 3 \cdots$

$2^4\equiv1 \pmod 5$，$3^4\equiv1 \pmod 5$，$4^4\equiv1 \pmod 5$

$2^6\equiv(2^3)^2\equiv1 \pmod 7$，$3^6\equiv(3^3)^2\equiv1 \pmod 7$，$4^6\equiv(4^3)^2\equiv1 \pmod 7$ …

这些同余式都符合同一个规律，这个规律就是费尔马小定理．

**费尔小定理**　如果 $p$ 是质数，$(a,p)=1$，那么 $a^{p-1}\equiv1 \pmod p$．

由于这个定理的证明要用到完全剩余系的一些性质，因此定理的证明放在后面学完完全剩余系之后，这里只是举例说明这个定理的应用．

**例 13**　用费尔马小定理重解例 6：求 $145^{89}+3^{2002}$ 除以 13 的余数．

**解**：因 13 是质数，且 $(145,13)=1$，$(3,13)=1$

由费尔马小定理得．

$$145^{12}\equiv1 \pmod{89},\ 3^{12}\equiv \pmod{89}$$

$\therefore 145^{89}\equiv(145^{12})^7\cdot145^5\equiv145^5 \pmod{13}$

$3^{2002}\equiv(3^{12})^{166}\cdot3^{10}\equiv3^{10} \pmod{13}$

又$\because 145\equiv2 \pmod{13}$，$3^3\equiv1 \pmod{13}$

$\therefore 145^5\equiv2^5\equiv6 \pmod{13}$，$3^{10}\equiv(3^3)^3 3\equiv3 \pmod{13}$

所以，$145^{89}+3^{2002}\equiv6+3\equiv9 \pmod{13}$．

即 $145^{89}+3^{2002}$ 除以 13 的余数是 9．

**例 14**　设 $p$ 是质数，且 $p\neq2$．

求证：$1^p+2^p+3^p+\cdots+(p-1)^p\equiv0 \pmod p$．

**证明**：由于 $p$ 是质数且 $p\neq2$，所以对任意正整数 $n<p$，都有 $(n,p)=1$．根据费尔马小定理得，

$$n^{p-1}\equiv1 \pmod p$$

于是 $n^p\equiv n \pmod p$　$(n=1,2,3,\cdots,p-1)$

因此 $1^p+2^p+3^p+\cdots+(p-1)^p\equiv1+2+3+\cdots+(p-1) \pmod p$

$$\equiv\frac{p(p-1)}{2} \pmod p$$

由于 $p$ 是不等于 2 的质数，所以 $\frac{p-1}{2}$ 是整数．

故$\frac{p(p-1)}{2}\equiv 0(\mathrm{mod}\ p)$

所以 $1^p+2^p+\cdots+(p-1)^p\equiv 0(\mathrm{mod}\ p)$

**说明**:①费尔马小定理也可以写成另外一种形式:如果 $p$ 是质数,对任意正整数 $a$,都有 $a^p\equiv a(\mathrm{mod}\ p)$.

这是因为当 $p\nmid a$ 时,$(p,a)=1$,有 $a^{p-1}\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ p)$故 $a^p\equiv a\ (\mathrm{mod}\ p)$;当 $p|a$ 时,显然有 $p|a^p-a$,即 $a^p\equiv a\ (\mathrm{mod}\ p)$.

②费尔马小定理的逆定理不成立.也就是说,当 $a^{p-1}\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ p)$时,$p$ 不一定是质数.例如 $5^3\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 4)$,且$(5,4)=1$,但 4 不是质数.

**例 15** 求证:对任意整数 $a$、$b$,$ab(a^4-b^4)$都能被 30 整除.

**分析**:因为 $30=2\times 3\times 5$,所以只需证明 $2|ab(a^4-b^4)$,$3|ab(a^4-b^4)$,$5|ab(a^4-b^4)$.因为 2,3,5 都是质数,所以可以考虑用费尔马小定理.

**证明**:因为 $30=2\times 3\times 5$,所以只需证明 2,3,5 都能整除 $ab(a^4-b^4)$即可.

因 2 是质数,根据费尔马小定理得,$a^2\equiv a\ (\mathrm{mod}\ 2)$ $b^2\equiv b\ (\mathrm{mod}\ 2)$.所以

$$a^4\equiv(a^2)^2\equiv a^2\equiv a\ (\mathrm{mod}\ 2)$$

$$b^4\equiv(b^2)^2\equiv b^2\equiv b\ (\mathrm{mod}\ 2)$$

$$\therefore ab(a^4-b^4)\equiv ab(a-b)=a^2b-ab^2\equiv ab-ab\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 2).$$

即 $2|ab(a^4-b^4)$.

又因为 3 也是质数,根据费尔马小定理得 $a^3\equiv a\ (\mathrm{mod}\ 3)$,$b^3\equiv b\ (\mathrm{mod}\ 3)$

$$\begin{aligned}\therefore ab(a^4-b^4)&\equiv ab(a^2-b^2)\quad(\mathrm{mod}\ 3)\\&\equiv a^3b-ab^3\quad(\mathrm{mod}\ 3)\\&\equiv ab-ab\quad(\mathrm{mod}\ 3)\\&\equiv 0(\mathrm{mod}\ 3)\end{aligned}$$

即 $3|ab(a^4-b^4)$.

又因为 5 也是质数，根据费尔马小定理得 $a^5\equiv a \pmod 5$，$b^5\equiv b \pmod 5$

$\therefore \quad ab(a^4-b^4)=a^5b-ab^5\equiv ab-ab=0 \pmod 5$

即 $5\mid ab(a^4-b^4)$.

综上所述，$30\mid ab(a^4-b^4)$. 原命题成立．

**例 16** 证明：对任意自然数 $n>1$，$2^n-1$ 都不能被 $n$ 整除．

**证明：**若 $n$ 为偶数，$2^n-1$ 必是奇数，则 $n\nmid 2^n-1$.

若 $n$ 为奇数，且 $n>1$，假设 $n\mid 2^n-1$.

设 $p$ 为 $n$ 的最小质因数，则 $2^n\equiv 1 \pmod p$. 再设 $r$ 是满足 $2^x\equiv 1 \pmod p$ 的最小正整数．即 $2^r\equiv 1 \pmod p$. 若 $r\nmid x$，可设 $x=kr+q, o<q<r$. 那么

$$2^x\equiv 2^{kr+q}\equiv (2^r)^k\cdot 2^q\equiv 2^q\equiv 1 \pmod p$$

这与 $r$ 的最小性矛盾．因此 $r\mid x$. 又因 $2^n\equiv 1 \pmod p$，所以 $r\mid n$.

根据费尔写小定理得 $2^{p-1}\equiv 1 \pmod p$，因此 $r\mid p-1$.

由 $r\mid n, r\mid p-1$ 知 $r$ 是 $n$ 的小于 $p$ 的正约数，故 $r=1$，得 $p\mid 2-1$，即 $p\mid 1$，矛盾．假设不成立，即 $n\mid 2^n-1$.

综上所述，对任意自然数 $n>1$，$2^n-1$ 都不能被 $n$ 整除．

## 习题 3.1

### A 组

1. 填空题

(1) $2^{2001}$ 除以 9 余数是____．

$19^{1996}$ 除以 17 的余数是____．

$2^{999}$ 的末两位数是____．

(2) 若 $a$ 除以 5 余数是 1，$b$ 除以 5 的余数是 4，$3a>b$，$3a-b$ 除以 5 的余数是____．

(3) 若 $2^n+1$ 能被 3 整除，则 $n$ 是____数．

2. 求证：

(1)$8|3^{2n}+7$　　　(2)$17|19^{1000}-1$

(3)$13|25^{2001}+14^{2001}$

## B　组

1. 求 $9^{9^9}$ 除以 7 的余数．
2. 求证：$7|2222^{5555}+5555^{2222}$.
3. 求$(257^{33}+46)^{26}$除以 50 的余数．
4. 求证：$3^{1980}+4^{1981}$能被 5 整除．
5. 求证：$1^{2001}+2^{2001}+3^{2001}+\cdots+n^{2001}$不能被 $n+2$ 整除.
6. 已知 $p,q$ 是两上不同的质数，求 $p^{q-1}+q^{p-1}$除以 $pq$ 的余数．

# §2.2　剩余类与完全平方数

## 一、剩余类

一个整数被 2 除时，余数只能是 0 或 1 两种可能，因此可以把所有的整数按照被 2 除的余数分成两类，一类是被 2 除余数为 0，另一类是被 2 除余数为 1. 也就是我们常说的偶数和奇数．同样的道理，一个整数被 3 除时，余数只能是 0，1 和 2 这三种可能的某一种，因此所有的整数按照被 3 除可以分成余数为 0，1 和 2 三类．

一般地，任何一个整数 $a$ 被一个非零的整数 $m$ 除，可以得到商 $q$ 和余数 $r$，即 $a=mq+r$. 这里的 $r$ 只能取 $0,1,2,\cdots,m-1$ 这 $m$ 个值．

全体整数可按对模 $m$ 是否同余分为若个两两不相交的集合，使得在同一个集合中的任意两个数对模 $m$ 一定同余，而属于不同集合中的两个数对模 $m$ 一定不同余．每一个这样的集合称为模 $m$ 的同余类，或模 $m$ 的剩余类．由模 $m$ 的每个同余类中取定一个数作为代表构成一组数，这组数就称为模 $m$ 的一个完全剩余系．

根据剩余类的概念，很容易得到以下几条有关剩余类的性质：

①每一个整数一定包含在而且仅包含在模 $m$ 的一个剩余类中．

②整数 $p$ 所属的模 $m$ 的剩余类中的每一个数都可以写成 $km+p$ 的形式，这里 $k$ 是整数．

用符号 $p \bmod m$ 表示 $p$ 所属的模 $m$ 的剩余类．这条性质写成数学表达式就是

$$p \bmod m=\{p+km\ (k\ 是整数)\}$$

③整数 $p$、$q$ 在模 $m$ 的同一个剩余类中的充要条件是 $p$、$q$ 对模 $m$ 同余.

这条性质用数学符号就可表示为:

$$p \bmod m = q \bmod m \Leftrightarrow p \equiv q \pmod m$$

实际上,同余式就是剩余类等式的一个特殊情况,是集合中的一个元素,前面有关同余的一些性质对剩余类仍然成立.

这条性质表明,对于模 $m$ 的两个剩余类要么相等,要么它们的交集为空集. 因此,模 $m$ 有且仅有 $m$ 个剩余类,它们是:

$0 \bmod m$, $1 \bmod m$, $2 \bmod m$, $\cdots (m-1) \bmod m$.

在解决一些有关模 $m$ 余数的问题时,我们就可以查看 $m$ 个数:$0,1,2,\cdots,m-1$,从而得相应的剩余类的情况,使问题变得异常简单,具体例子,请看后面的例题.

④在任意取定的 $m+1$ 个整数中,必有两个整数对模 $m$ 同余.

根据同余式的性质,我们很容易得到剩余系的其它一些性质:

⑤$m$ 个整数 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ 是模 $m$ 的一组完全剩余系的充要条件是 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ 中的任意两个数对模 $m$ 都不同余.

⑥如果 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ 是模 $m$ 的一组完全剩余系,那么对任意的整数 $c$,$x_1+c,x_2+c,\cdots x_m+c$ 也是模 $m$ 的一组完全剩余系.

⑦设 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 是 $m$ 个整数,如果 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ 是模 $m$ 的一组完全剩余系,那么 $x_1+k_1m$, $x_2+k_2m,\cdots,x_m+k_1m$ 也是模 $m$ 的一组完全剩余系.

**思考:**

如果 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ 是模 $m$ 的一组完全剩余系,那么 $kx_1$,$kx_2,\cdots,kx_m$ 是模 $m$ 的一组完全剩余系吗?

我们在处理一些有关同余问题时,就可以选取一个恰当的模 $m$ 的完全剩余系,进行分类讨论即可.

**例** 1. 求证：一定存在整数 $n$，使 $4n^2+27n-12$ 能被 5 整除，并求出这些数．

**分析**：可以选模 5 的一个完全剩余系逐个验算．只要数 $a$ 使 $4a^2+27a-12$ 能被 15 整除，那么剩余类 $a \bmod 5$ 中的任何一个整数也满足条件．

**解**：取模 5 的一个完全剩余系 0,1,2,3,4 直接计算可知，3 和 4 满足条件．所以使 $4n^2+27-12$ 能被 5 整除的所有的整数是 $n\equiv 3 \pmod 5$ 和 $n\equiv 4 \pmod 5$.

**例** 2　$m$、$p$、$n$ 为自然数．

求证：$3 \mid n^p(n^{2m}+2)$

**分析**：对 $n$ 按模 3 进行分类讨论．

**证明**：(1) 当 $n\equiv 0 \pmod 3$ 时．

$$n^p\equiv 0 \pmod 3$$

$$\therefore n^p(n^{2m}+2)\equiv 0 \pmod 3$$

(2) 当 $n\equiv 1 \pmod 3$ 时．

$$n^p\equiv 1 \pmod 3 \qquad n^{2m}\equiv 1^{2m}\equiv 1 \pmod 3$$

$$\therefore n^p(n^{2m}+2)\equiv 1\cdot(1+2)\equiv 3\equiv 0 \pmod 3$$

(3) 当 $n\equiv 2 \pmod 3$ 时．

$$n^p\equiv 2^p \pmod 3 \qquad n^{2m}\equiv (n^2)^m\equiv 4^m\equiv 1^m\equiv 1 \pmod 3$$

$$\therefore n^p(n^{2m}+2)\equiv 2^p(1+2)\equiv 2^p\cdot 0\equiv 0 \pmod 3$$

所以，对一切自然数 $n$，都有 $3 \mid n^p(n^{2m}+2)$.

## 二、完全平方数

若 $a$ 为整数，则 $a^2$ 叫做完全平方数．例如，1,4,9,16,…等. 下面我们利用同余式来研究完全平方数．

### 1. 完全平方数的一些常用性质

完全平方数的个位数字只能是 0,1,4,5,6,9.

**证明:** 若 $a\equiv 0 \pmod{10}$,则 $a^2\equiv 0 \pmod{10}$

若 $a\equiv 1 \pmod{10}$,则 $a^2\equiv 1 \pmod{10}$

若 $a\equiv 2 \pmod{10}$,则 $a^2\equiv 4 \pmod{10}$

若 $a\equiv 3 \pmod{10}$,则 $a^2\equiv 9 \pmod{10}$

若 $a\equiv 4 \pmod{10}$,则 $a^2\equiv 4^2\equiv 16\equiv 6 \pmod{10}$

若 $a\equiv 5 \pmod{10}$,则 $a^2\equiv 5^2\equiv 5 \pmod{10}$

若 $a\equiv 6 \pmod{10}$,则 $a^2\equiv 6^2\equiv 6 \pmod{10}$

若 $a\equiv 7 \pmod{10}$,则 $a^2\equiv 7^2\equiv 9 \pmod{10}$

若 $a\equiv 8 \pmod{10}$,则 $a^2\equiv 8^2\equiv 4 \pmod{10}$

若 $a\equiv 9 \pmod{10}$,则 $a^2\equiv 1 \pmod{10}$

综上所述,对任意的整数 $a$,必有

$$a^2\equiv 0,1,4,5,6,9 \pmod{10}$$

**说明:**

(1)这里我们选取模 10 的一个完全剩余系,对整数 $a$ 进行了分类讨论.这个方法也适用于完全平方数的其它的一些性质.请同学们运用这个方法证明完全平方数下面的一些性质.

(ⅱ)完全平方数的其它性质

① $a^2\equiv 0,1 \pmod{3}$

② $a^2\equiv 0,1 \pmod{4}$

③ $a^2\equiv 0,1,4 \pmod{5}$

④ $a^2\equiv 0,1,4 \pmod{8}$

(ⅲ)这些性质的逆命题不一定成立.

## 2. 非完全平方数的判定

具有以下性质的数一定是非完全平方数:

① 个位数字是 2,3,7,8 的数.

② $a\equiv 2 \pmod{3}$

③ $a\equiv 2,3 \pmod{4}$

④ $a\equiv 2,3 \pmod{5}$

⑤　$a \equiv 2,3,5,6,7 \pmod 8$.

**例 3**　　求证：$\underbrace{11\cdots1}_{n个1}$ 不是完全平方数．（$n \geqslant 2$）

**证明**：当 $n=2$ 时，11 不是完全平方数．

当 $n \geqslant 3$ 时．

$\underbrace{11\cdots1}_{n个1} = \underbrace{11\cdots1}_{n-2个1}00 + 11 \equiv 3 \pmod 4$

∴ $\underbrace{11\cdots1}_{n个1}$ 不是完全平方数．

**例 4**　　已知整数 $a,b,c$ 满足 $a^2+b^2=c^2$

求证：$a$、$b$、$c$ 中至少有一个能被 3 整数．

**分析**：取模 3 的完全剩余系来证明．

**证明**：若 $a \equiv 0$ 或 $b \equiv 0$，则命题得证．

若 $a \not\equiv 0$ 且 $b \not\equiv 0$，则只可能是 $a \equiv 1 \pmod 3$ 且 $b \equiv 1 \pmod 3$，$a \equiv 1 \pmod 3$ 且 $b \equiv 2 \pmod 3$ 或 $a \equiv 2 \pmod 3$ 且 $b \equiv 2 \pmod 3$

无论哪种情况，都得到 $a^2+b^2 \equiv 2 \pmod 3$．即

$$c^2 \equiv 2 \pmod 3.$$

显然这是不可能的．故 $a$、$b$ 中必有一个与 0 对模 3 同余．

所以，$a$、$b$、$c$ 中必有一个能被 3 整除．

## 习题 2.2

### A　组

1.(1)写出模 9 的一个完全剩余系，并且它的每个数都是奇数．

(2)写出模 9 的一个完全剩余系，并且它的每个数都是偶数．

2. 求证：$\underbrace{55\cdots5}_{99个5}6$ 不是完全平方数．

3. 设 $a$、$b$ 为整数，求证：关于 $x$ 的方程 $x^2+10ax+5b+3=0$

无整数解.

## B 组

1. 已知 $p>3$ 为质数,求证:$24\mid p^2-1$.

2. 求证:方程 $x^2-3y^2=17$ 无整数解.

3. 从 $1,2,\cdots,n$ 中任取 50 个不同的数,这 50 个数中必有两数之差等于 7,求 $n$ 的最大值.

# §2.3　简单的同余方程

《孙子算经》中的"物不知数"问题开创了一次同余式研究的先河，但遗憾的是没有上升到一套完整的计算程序和理论高度．南宋时期的数学家秦九韶在他的《数学九章》中提出了"大衍求一术"的数学方法，比较系统地论述一次同余方程组的解法的一般原理和一般程序．他的计算程序的核心是求一个数的多少倍除以另一数所得的余数为一．

对于 $n$ 次整系数多项式

$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$

$f(x)\equiv 0 \pmod m$ 就叫做模 $m$ 的同余方程．使同余方程成立的 $x$ 的值叫做同余方程的解．显然，若 $x=c$ 是同余方程 $f(x)\equiv 0 \pmod m$ 的一个解，则剩余类 $c \bmod m$ 中的每一个数都是这个方程的解．

## 一、一次同余方程

设 $m\nmid a$，则 $ax\equiv b \pmod m$ 叫做模 $m$ 的一次同余方程．

如果 $x=x_0$ 是方程 $ax\equiv b \pmod m$ 的一个解，那么 $x=km+x_0$ 也是这个方程的一个解．这是因为，如果 $ax_0\equiv b \pmod m$，那么一定有 $akm+ax_0\equiv b \pmod m$，即 $a(km+x_0)\equiv b \pmod m$．这说明如果 $x=x_0$ 是方程 $ax\equiv b \pmod m$ 的一个解，那么剩余类 $x_0 \bmod m$ 中的任何一个数也是这个方程的解，这些解都看作是相同的．把剩余类 $x_0 \bmod m$ 称为同余方程 $ax\equiv b \pmod m$ 的一个解．记作 $x\equiv x_0 \pmod m$

因此，我们在解同余方程的时候，只需在任意取定的模 $m$ 的一组完全剩余系中求解模 $m$ 的同余方程，就可获得这个方程的全部解．

**例 1**　解下列同余方程

(1)$3x\equiv 2 \pmod{6}$　　(2)$4x\equiv 6 \pmod{10}$

**解**:(1)当 $x\equiv 0 \pmod{6}$时,$3x\equiv 0 \pmod{6}$

当 $x\equiv 1 \pmod{6}$时,$3x\equiv 3 \pmod{6}$

当 $x\equiv 2 \pmod{6}$时,$3x\equiv 6\equiv 0 \pmod{6}$

当 $x\equiv 3 \pmod{6}$时,$3x\equiv 9\equiv 3 \pmod{6}$

当 $x\equiv 4 \pmod{6}$时,$3x\equiv 12\equiv 0 \pmod{6}$

当 $x\equiv 5 \pmod{6}$时,$3x\equiv 15\equiv 3 \pmod{6}$

所以方程 $3x\equiv 2 \pmod{6}$无解.

(2)与(1)小题类似,取模 10 的最小完全剩余系 0,1,2,3,…,9 直接计算可知,$x=4$ 和 $x=9$ 是方程的解.所以这个同余方程的解为

$$x\equiv 4 \pmod{10}\text{或 } x\equiv 9 \pmod{10}.$$

**说明**:

①解模 $m$ 的一次同余方程,可以取模 $m$ 的一个完全剩余系直接计算.这个方法也适用于其它的同余方程.

②模 $m$ 的一次同余方程 $ax\equiv b \pmod{m}$ $(m\nmid a)$有解的充要条件是$(a,m)\mid b$.

**练一练**

解下列同余方程.

(1)$4x\equiv 3 \pmod{7}$　　(2)$6x\equiv 8 \pmod{12}$

**例 2**　同余方程 $2x\equiv 6 \pmod{8}$的解和方程 $x\equiv 3 \pmod{4}$的解是否相同.说明理由.

**解**:设 $x=x_0$ 是方程 $2x\equiv 6 \pmod{8}$的一个解,那么

$$2x_0\equiv 6 \pmod{8}$$

$$\therefore 2x_0=8k+6, x_0=4k+3$$

$$\therefore x_0\equiv 3 \pmod{4}$$

即方程 $2x\equiv 6 \pmod{8}$的解必是方程 $x\equiv 3 \pmod{4}$的解.

反之,若 $x=x_0$ 是方程 $x\equiv 3 \pmod{4}$的一个解,那么

$$x_0\equiv 3 \pmod{4}$$

$\therefore x_0=4m+3$

$\therefore 2x_0=8m+6$. 故 $2x_0\equiv 6 \pmod 8$

即方程 $x\equiv 3 \pmod 4$的解必是方程 $2x\equiv 6 \pmod 8$的解.

所以,方程 $2x\equiv 6 \pmod 8$和 $x\equiv 3 \pmod 4$的解相同.

**说明**:若正整数 $d\mid(a,b,m)$,则方程 $ax\equiv b \pmod m$的解与方程 $\frac{a}{d}x\equiv\frac{b}{d}\left(\bmod \frac{m}{d}\right)$的解相同. 利用这条性质可以将较大模数的同余方程化为较小模数的同余方程.

**例3** 解同余方程 $38x\equiv -19 \pmod{95}$

**分析**:此题中的模95的剩余数太多,如果选定一个完全剩余系进行直接计算,运算量相当大,因此我们可以运用上题 的方法,将模化小一点.

**解**:$\because (38,19,95)=19$

$\therefore 38x\equiv -19 \pmod{95}$的解与 $2x\equiv -1 \pmod 5$的解完全相同,只需求解方程 $2x\equiv -1 \pmod 5$即可.

$\because 2x\equiv -1 \pmod 5$

$\therefore 2x\equiv 4 \pmod 5$

$\because x\equiv 2 \pmod 5$

$\therefore$原方程的解为 $x\equiv 2+5u$ $(u=0,1,2,3,\cdots 18) \pmod{95}$

**想一想**

如果$(a,b,m)$不易求得,而 $a,b,m$ 的绝对值都很大时,怎样解同余方程 $ax\equiv b \pmod m$.

**例4** 解同余方程 $987x\equiv 610 \pmod{1597}$

**解**:$\because 987x\equiv 610 \pmod{1597}$

$$\therefore 987x-1597x\equiv 610 \pmod{1597}$$

$$-610x\equiv 610 \pmod{1597}$$

$$x\equiv -1 \pmod{1597}$$

**练一练**

解下列同余方程.

(1)$26x\equiv 39 \pmod{117}$

(2)$49x\equiv 950 \pmod{999}$

## 二、一次同余方程组

**例 1**　我国南北朝时期有一部著名的算术著作《孙子算经》,其中有这样一个"物不知数"问题:"今有物不知其数,三三数之剩 2;五五数之剩 3;七七数之剩 2. 问物几何?"用现在化较通俗的数学语言可以这样叙述:"求一个数,使它被 3 除余 2;被 5 除余 3;被 7 除余 2."

**解**:设所求数为 $x$,则

$$\begin{cases} x\equiv 2 \pmod 3 & ① \\ x\equiv 3 \pmod 5 & ② \\ x\equiv 2 \pmod 7 & ③ \end{cases}$$

由①得 $x=3k+2,k=0,1,2,3\cdots$

代入②得. $3k+2\equiv 3 \pmod 5$

$\therefore 3k\equiv 1\equiv 1+5\equiv 6 \pmod 5$

$\therefore k\equiv 2 \pmod 5$. 即 $k=5n+2,n=0,1,2,\cdots$

$\therefore x=3(5n+2)+2=15n+8,n=0,1,2,3,\cdots$

代入③得.

$15n+8\equiv 2 \pmod 7$

$15n\equiv -6\equiv -6+21\equiv 15 \pmod 7$

$\therefore n\equiv 1 \pmod 7$　故 $n=7t+1,t=0,1,2,\cdots$

所以,$x=15(7t+1)+8=105t+23$. $t=0,1,2,3\cdots$所求数的最小值是 23.

**例 2**　请看一首欢庆国庆的诗:"十里长街闹盈盈,庆祝成就万象新. 国庆礼花破长空,新桥红灯胜繁星. 七七数时余两个,五个一数恰为零. 九数之时剩四盏,红灯几盏放光明."

**解**:设有 $x$ 盏红灯. 那么

$$\begin{cases} x\equiv 2 \pmod 7 & ① \\ x\equiv 0 \pmod 5 & ② \\ x\equiv 4 \pmod 9 & ③ \end{cases}$$

由①得　$x=7m+2,\ m=0,1,2,3,\cdots$

代入②得，

$7m+2\equiv 0 \pmod 5$

$7m\equiv -2\equiv -2+5\times 6\equiv 28 \pmod 5$

$\therefore m\equiv 4 \pmod 5$

$\therefore m=5n+4$　　$\therefore x=7(5n+4)+2=35n+30$

代入③得，

$35n+30\equiv 4 \pmod 9$

$35n\equiv -26\equiv -26+4\times 9\equiv 10 \pmod 9$

$\therefore 7n\equiv 2 \pmod 9$

$7n\equiv 2+6\times 9\equiv 56(\mathrm{mod})$

$n\equiv 8. \pmod 9$

$\therefore n=9k+8.$　$k=0,1,2,3,\cdots$

所以 $x=35(9k+8)+30=315k+310$，

$x_{\min}=310$

**答**:有 310 盏红灯．

以上两道例题实际上给同学们介绍了一种解一次同余方程的方法，这种方法简单易行，而且便于大家理解，但是这种方法的计算量较大，特别是当方程的个数较多时，运算相当繁杂，有没有一套比较简单的解法或计算公式呢?

让我们从“物不知数”问题谈起．其实，在《孙子算经》中就给出了这个问题的答案和解法，这个解法用算式表示就是：

$70\times 2+21\times 3+15\times 2-105\times 2=23.$

这也实际给出了这类同余方程组

$$\begin{cases} x\equiv b_1 \pmod 3 \\ x\equiv b_2 \pmod 5 \\ x\equiv b_3 \pmod 7 \end{cases}$$

的一般解：

$x=70b_1+21b_2+15b_3-105k$ （$k$ 是正整数）

后来的数学家又把这种解法编成了下面这首诗歌，以便于记忆：

三人同行七十(70)稀，

五树梅花廿一(21)支．

七子团圆正半月(15)，

除百零五(105)便得知．

《孙子算经》巧妙地解决了“物不知数”问题，但没有上升到一套完整的计算程序和理论高度，没有解决一般的一次同余方程的求解问题．南宋时期的数学家秦九韶在他的《数学九章》中提出了“大衍求一术”的数学方法，系统地论述了一次同余方程组解法的基本原理和一般程序．“求一”就是求一个数的多少倍除以另一个数，所得的余数是一、为了深刻地理解这一方法，我们再回头研究“物不知数”问题中的几个关键数字 71、21、15.

$70=2\times5\times7\equiv1 \pmod 3$

$21=3\times7\equiv1 \pmod 5$

$15=3\times5\equiv1 \pmod 7$

其中，70 是 5 和 7 的倍数，但被 3 除余 1，21 是 3 和 7 的倍数，但被 5 除余 1；15 是 3 和 5 的倍数，但被 7 除余 1. 任何一个一次同余方程组，只要类似地求出相应的关键数字，就可以得到这个一次同余方程组的解．秦九韶的“大衍求一术”的方法流传到西方，被称为“中国剩余定理”.

所以，我得到一般一次同余方程组的解法是：设 $p,q,r$ 是两面互质的正整数．同余方程组

$$\begin{cases} x\equiv a \pmod p \\ x\equiv b \pmod q \\ x\equiv c \pmod r \end{cases}$$

的解是

$$x\equiv Aa+Bb+Cc \pmod{pqr}$$

其中

$A\equiv 1 \pmod p$，$A\equiv 0 \pmod q$，$A\equiv 0 \pmod r$

$B\equiv 1 \pmod q$，$B\equiv 0 \pmod p$，$B\equiv 0 \pmod r$

$C\equiv 1 \pmod r$，$C\equiv 0 \pmod p$，$C\equiv 0 \pmod q$.

**练一练**

请用上述方法求解例2

为了便于大家理解，请对照以下解法

**解**：$a=2, b=0, c=4$

$p=7 \qquad q=5 \qquad r=9$

$\because qr=5\times 9=45$， $rp=9\times 7=63$， $pq=7\times 5=35$

$\therefore A=5\times 45\equiv 5\times 3\equiv 1 \pmod 7$

$B=2\times 63\equiv 2\times 3\equiv 1 \pmod 5$

$C=8\times 35\equiv 8\times 8\equiv 1 \pmod 9$

$\therefore x\equiv 5\times 45\times 2+2\times 63\times 0+8\times 35\times 4 \pmod{7\times 5\times 9}$

$\equiv 1570 \pmod{315}$

$\equiv 1570-315\times 4 \pmod{315}$

$\equiv 310 \pmod{315}$

所以 $x_{min}=310$.

故有310盏红灯.

下面我们介绍中国剩余定理：

中国剩余定理 设 $m_1, m_2, \cdots, m_k$ 是 $k$ 个两两互质的正整数，对任意整数 $a_1, a_2, \cdots, a_k$，则同余方程组.

$$\begin{cases} x \equiv a_1 \pmod{m_1} \\ x \equiv a_2 \pmod{m_2} \\ \cdots \\ x \equiv a_k \pmod{m_k} \end{cases}$$

有且只有一个解

$x \equiv M_1M_1^{-1}a_1 + M_2M_2^{-1}a_2 + \cdots + M_kM_k^{-1}a_k \pmod{m}$其中 $m = m_1m_2\cdots m_k$， $m = m_jM_j$ $(1 \leqslant j \leqslant k)$以及

$M_jM_j^{-1} \equiv 1 \pmod{m_j}$ $1 \leqslant j \leqslant k$.

这个定理本身比较复杂，证明也比较繁，关于证明过程，这里不作介绍，有兴趣的同学请自行阅读有关初等数论的著作. 只对定理本身作一些阐述，以帮助大家理解，我们用中国剩余定理再解“物不知数”问题.

$M_1 = 5 \times 7 = 35$， $M_2 = 3 \times 7 = 21$， $M_3 = 3 \times 5 = 15$

$35 \times 2 = 70 \equiv 1 \pmod{3}$

$21 \equiv 1 \pmod{5}$， $15 \equiv 1 \pmod{7}$

$\therefore M_1M_1^{-1} = 70$ $M_2M_2^{-1} = 21$ $M_3M_3^{-1} = 15$

$\therefore x \equiv 70 \times 2 + 21 \times 3 + 15 \times 2 \pmod{105}$

$\equiv 233 \equiv 23 \pmod{105}$

所以 $x$ 的最小值是 23.

下面举例说明中国剩余定理的运用.

**例 3** 解同余方程组.

$$\begin{cases} x \equiv 1 \pmod{5} \\ x \equiv -1 \pmod{7} \\ x \equiv -2 \pmod{11} \end{cases}$$

**解**：$m_1 = 5$， $m_2 = 7$， $m_3 = 11$

$\therefore M_1 = 7 \times 11 = 77$，$M_2 = 5 \times 11 = 55$，$M_3 = 5 \times 7 = 35$

$\because M_1 \equiv 7 \times 11 \equiv 2 \times 1 \equiv 2 \pmod{5}$，由 $1 \equiv M_1M_1^{-1} \equiv 2M^{-1}$ $\pmod{5}$得，可取 $M_1^{-1} = 3$

$\because M_2 \equiv 5 \times 11 \equiv 5 \times 4 \equiv 20 \equiv 6 \equiv -1$ ( mod

7)，由 $1\equiv M_2M_2^{-1}\equiv -M_2^{-1}\pmod 7$ 得，可取 $M_2^{-1}=6$

$\because M_3\equiv 35\equiv 2\pmod{11}$，由 $1\equiv M_3M_3^{-1}\equiv 2M_3^{-1}\pmod{11}$ 得，可取 $M_3^{-1}=6$

由中国剩余定理可知，原同余方程组的解为.

$$\begin{aligned} x&\equiv 77\times 3\times 1+55\times 6\times(-1)+35\times 6\times(-2)\pmod{5\times 7\times 11}\\ &\equiv -519\pmod{385}\\ &\equiv 251\pmod{385}. \end{aligned}$$

**例 4**　解同余方程组

$$\begin{cases} x\equiv 1\pmod 3\\ -x\equiv 1\pmod 5\\ -2x\equiv 3\pmod 7\\ -3x\equiv 6\pmod{11} \end{cases}$$

**分析**：这不是中国剩余定理的形，我们可以先将方程中的"系数"化为 1，再运用中国剩余定理求解.

**解**：原方程组与同余方程组.

$$\begin{cases} x\equiv 1\pmod 3\\ x\equiv -1\pmod 5\\ x\equiv 2\pmod 7\\ x\equiv -2\pmod{11} \end{cases}$$

的解相同.

$\therefore m_1=3,\quad m_2=5,\quad m_3=7,\quad m_4=11$

$\therefore M_1=5\times 7\times 11,\quad M_2=3\times 7\times 11$

$M_3=3\times 5\times 11\qquad M_4=3\times 5\times 7$

因 $M_1\equiv 2\times 1\times 2\equiv 4\equiv 1\pmod 3$，所以可取 $M_1^{-1}=1$

因 $M_2\equiv 3\times 2\times 1\equiv 6\equiv 1\pmod 5$，所以可取 $M_2^{-1}=1$

因 $M_3\equiv 3\times 5\times 4\equiv 60\equiv 4\pmod 7$，由 $1\equiv M_3M_3^{-1}\equiv 4M_3^{-1}\pmod 7$ 得，可取 $M_3^{-1}=2$

因 $M_4\equiv 3\times 5\times 7\equiv 105\equiv 6\pmod{11}$，由 $1\equiv M_4M_4^{-1}\equiv 6M_4^{-1}\pmod{11}$ 得，可取 $M_4^{-1}=2$.

根据中国剩余定理知，原方程组的得为

$$
\begin{aligned}
x &\equiv (5\times7\times11)\times1\times1+(3\times7\times11)\times1\times(-1)\\
&\quad+(3\times5\times11)\times2\times2+(3\times5\times7)\times2\times(-2)\pmod{3\times5\times7\times11}\\
&\equiv 385-231+660-420\pmod{1155}\\
&\equiv 394\pmod{1155}
\end{aligned}
$$

至此，我们完整地介绍了模两两互质的一次同余方程组的解法．归纳起来主要有两种解法．一种解法是根据同余的定义，逐步代入的方法．另一种方法根据定理的求解公式直接求解．这里的中国剩余定理与孙子解法的实质是相同的，因此这一定理又叫“孙子定理”或“孙子剩余定理”．根据同余的定义，逐个迭代解方程的过程中，关键是得到到形如“$x\equiv b\pmod m$”的同余方程．运用定理解同余方程，关键在“求一”．

**练一练**

解同余方程组：

(1) $\begin{cases} x\equiv2\pmod 3\\ x\equiv3\pmod 7\end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x\equiv1\pmod 3\\ 2x\equiv-1\pmod 5\\ x\equiv2\pmod 7\end{cases}$

## 三、可化为一次同余方程组的同余方程．

运用第一节中的同余式的式质

$$\begin{cases} a\equiv b\pmod{m_1}\\ a\equiv b\pmod{m_2}\end{cases}\Leftrightarrow a\equiv b(\bmod [m_1, m_2])$$

我们可以把一个同余方程转化为同余方程组来求解．特别是当模比较大的时候，可以通过对模进行因数分解，把这个同余方程转化为较小模的同余方程组．

**例 1**　解同余方程 $19x\equiv1\pmod{140}$

**解**：因 $140=4\times5\times7$，所以原方程等价于

$$\begin{cases} 19x\equiv 1 \pmod 4 & ① \\ 19x\equiv 1 \pmod 5 & ② \\ 19x\equiv 1 \pmod 7 & ③ \end{cases}$$

由①得，

$$\begin{aligned} 19x&\equiv 1+4\times 14\equiv 57 \pmod 5 \\ x&\equiv 3 \pmod 4 \end{aligned} \qquad ④$$

由②得，

$$\begin{aligned} 19x&\equiv 1+5\times 15\equiv 76 \pmod 5 \\ x&\equiv 4 \pmod 5 \end{aligned} \qquad ⑤$$

由③得，

$$\begin{aligned} 19x&\equiv 1+7\times 8\equiv 57 \pmod 7 \\ x&\equiv 3 \pmod 7 \end{aligned} \qquad ⑥$$

由④和⑥得，$x\equiv 3 \pmod{28}$

$$\therefore x=28k+3$$

代入⑤得，

$$28k+3\equiv 4 \pmod 5$$

$$28k\equiv 1\equiv 1+55\equiv 56 \pmod 5$$

$$k\equiv 2 \pmod 5$$

$$\therefore k=5n+2$$

所以，$x=28(5n+2)+3=10n+59$.

由此例可以得到模两两不既约的同余方程的另一个解法．

**例 2**　解同余方程组

$$\begin{cases} x\equiv 3 \pmod 8 \\ x\equiv 7 \pmod{20} \end{cases}$$

**解**：原同余方程组同解于

$$\begin{cases} x\equiv 3 \pmod 8 & ① \\ x\equiv 7 \pmod 4 & ② \\ x\equiv 7 \pmod 5 & ③ \end{cases}$$

由②得，$x\equiv 3 \pmod 4$

因此满足于方程①的 $x$ 必满足于方程②，因此这个同余方程组又同解于

$$\begin{cases} x\equiv 7 \pmod 4 \\ x\equiv 7 \pmod 5 \end{cases}$$

$$\therefore x\equiv 7 \pmod{20}$$

∴原方程组的解为 $x\equiv 7 \pmod{20}$.

## 四、简单的高次同余方程

**例 1** 解方程 $x^5-3x^2+2\equiv 0 \pmod 5$

**分析**：由于模 5 的完全剩余系的数较小，故我们可以取模 5 的一个完全剩余系进行直接计算.

**解**：取模 5 的一个完全剩余系 $\pm 2, \pm 1, 0$ 进行直接计算.

当 $x=2$ 时，$x^5-3x^2+2$

$$\equiv 2^5-3\times 2^2+2 \pmod 5$$

$$\equiv 2\not\equiv 0 \pmod 5$$

当 $x=-2$ 时，$x^5-3x^2+2$

$$\equiv (-2)^5-3\times(-2)^2+2 \pmod 5$$

$$\equiv -2\equiv 3\not\equiv 0 \pmod 5$$

当 $x=1$ 时，$x^5-3x^2+2$

$$\equiv 1^5-3\times 1^2+2 \pmod 5$$

$$\equiv 0 \pmod 5$$

当 $x=-1$ 时，$x^5-3x^2+2$

$$\equiv (-1)^5-3\times(-1)^2+2 \pmod 5$$

$$\equiv -2\equiv 3\not\equiv 0 \pmod 5$$

当 $x=0$ 时，$x^5-3x^2+2\equiv 2\not\equiv 0 \pmod 5$

所以，原方程的解为

$$x\equiv 1 \pmod 5$$

这种直接计算的方法简单易行，但当模非常大时却难以凑

效．因此当模很大时，就应寻求别的解法．由于当模不是质数而是合数时，我们可以将模因数分解，将同余方程转化为同余方程组，因此，为方便起见，我们只研究模为合数的简单的二次同余方程．

**例2** 解下列同余方程

(1) $x^2 \equiv 6 \pmod{18}$

(2) $x^2+2x-3 \equiv 0 \pmod{15}$

**解**：(1)因 $18=2\times 9$，所原方程可化为

$$\begin{cases} x^2 \equiv 6 \pmod 2 & ① \\ x^2 \equiv 6 \pmod 9 & ② \end{cases}$$

由①得，$x^2 \equiv 0 \pmod 2$

直接计算可知，这个方程的解为 $x \equiv 0 \pmod 2$

取模 9 的一个完全剩余系，直接计算，方程②无解．

所以原方程无解．

(2)原方程可化为

$$\begin{cases} x^2+2x-3 \equiv 0 \pmod 3 & ① \\ x^2+2x-3 \equiv 0 \pmod 5 & ② \end{cases}$$

方程①可化为

$x^2+2x \equiv 0 \pmod 3$

直接计算知它的解为．

$x \equiv 0,1 \pmod 3$

直接计算方程②，知它的解为．

$x \equiv 1,2 \pmod 5$

所以原方程的解转化为下列方程组的解．

① $\begin{cases} x \equiv 0 \pmod 3 \\ x \equiv 1 \pmod 5 \end{cases}$ 或 ② $\begin{cases} x \equiv 0 \pmod 3 \\ x \equiv 2 \pmod 5 \end{cases}$

③ $\begin{cases} x \equiv 1 \pmod 3 \\ x \equiv 1 \pmod 5 \end{cases}$ 或 ④ $\begin{cases} x \equiv 1 \pmod 3 \\ x \equiv 2 \pmod 5 \end{cases}$

解方程组①得．$x \equiv 6 \pmod{15}$

解方程组②得．$x\equiv 12 \pmod{15}$

解方程组③得．$x\equiv 1 \pmod{15}$

解方程组④得．$x\equiv 7 \pmod{15}$

所以，原方程组的解为

$$x\equiv 1,6,7,12 \pmod{15}.$$

## 习题 2.3

### A 组

1. 解下列同余方程．

(1)$4x\equiv 3 \pmod 5$　　(2)$4x\equiv 6 \pmod{10}$

(3)$3x\equiv 1 \pmod{10}$

2. 解下列同余方程组．

(1)$\begin{cases} x\equiv 4 \pmod 7 \\ x\equiv 3 \pmod{11} \end{cases}$　　(2)$\begin{cases} 10x\equiv 6 \pmod 8 \\ 3x\equiv 10 \pmod{17} \end{cases}$

3. 解下列同余方程．

(1)$5x\equiv 13 \pmod{72}$　(2)$17x\equiv 229 \pmod{1540}$

4. 求一组大于 7 的三个连续整数，使其分别为 7，8，9 的倍数．

### B 组

求一个最小的正整数 $n$，使它的$\frac{1}{2}$是完全平方数，它的$\frac{1}{3}$是一个整数的 3 次方，它的$\frac{1}{5}$是一个数的五次方．

## § 2.4　竞赛题选讲

**例 1**　若大于 3 的三个质数 $a$，$b$，$c$ 满足关

系$2a+5b=c$，试求最大的正整数 $n$，使 $n|a+b+c$.

**解**：$\because 2\times11+5\times5=47,\quad 11+5+47=63$

$2\times13+5\times7=61, 13+7+61=81$

$\therefore (a,b,c)=(11,5,47)$或$(13,7,61)$是满足条件的两组质数，且

$(a_1+b_1+c_1, a_2+b_2+c_2)=(63,81)=9$

所以 $n\leqslant 9$.

下面证明 $n$ 的最大值就是 9.

因为 $a+b+c=a+b+2a+5b=3(a+2b)$

又因为 $a,b$ 都是质数.

$\therefore a\not\equiv 0 \pmod 3,\quad b\not\equiv 0 \pmod 3$

$\therefore a\equiv 1,2 \pmod 3,\quad b\equiv 1,2 \pmod 3$

若 $a\not\equiv b \pmod 3$，则

① $\begin{cases} a\equiv 1 \pmod 3 \\ b\equiv 2 \pmod 3 \end{cases}$ 或② $\begin{cases} a\equiv 2 \pmod 3 \\ b\equiv 1 \pmod 3 \end{cases}$

由①得，$c=2a+5b\equiv 2+10\equiv 0 \pmod 3$

由②得，$c=4+5\equiv 0 \pmod 3$

这两种情况都与 $c$ 是质数矛盾，故 $a\equiv b \pmod 3$

$\therefore a+2b\equiv 3a\equiv 0 \pmod 3$

设 $a+2b=3k$，那么 $a+b+c=3(a+2b)=9k$，即 $9|a+b+c$

所以，$n$ 的最大值是 9.

**说明**：处理类似问题的方法通常是分三步来完成．第一步，找出满足题目条件的两组解 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 与 $b_1,b_2,\cdots,b_n$. 求出 $f(a_1,a_2,\cdots,a_n)$与 $f(b_1,b_2,\cdots,b_n)$的最大公约数 $d$，第二步求出小于或等于 $d$ 的 $n$ 的最大可能值 $n_0$. 第三步证明 $n$ 取 $n_0$ 时，满足条件即可.

**例 2**　试证：每个大于 6 的自然数 $n$ 都可表示为两个大于 1 且互质的自然数之和.

**证明**:对 $n$ 进行分类讨论.

(1)若 $n\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 4)$,设 $n\equiv 4k$ ($k>1$,$k$ 为整数)

$\therefore n=(2k-1)+(2k+1)$

若 $2k-1$ 与 $2k+1$ 有公因数 $d\geqslant 2$,那么

$$2k-1\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ d),\ 2k+1\equiv 0(\mathrm{mod}\ d)$$

两式相减,得

$$2\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ d)\quad 即\ d|2$$

$\therefore d=2$

$\therefore 2k-1=0\ (\mathrm{mod}\ 2)$, $2k+1\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 2)$矛盾. $2k-1$ 与 $2k+1$ 互质,命题成立.

(2)若 $n\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 4)$,则设 $n=4k+1$ ($k>1$,$k$ 是整数)

$\therefore n=4k+1=2k+(2k+1)$

因 $2k$ 与 $2k+1$ 必互质,所以命题成立.

(3)若 $n\equiv 2\ (\mathrm{mod}\ 4)$,则设 $n=4k+2$ ($k>1$,$k$ 为整数)

$\therefore n=4k+2=(2k-1)+(2k+3)$

若 $2k-1$ 与 $2k+3$ 有公因数 $d\geqslant 2$,那么

$$2k-1\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ d),\ 2k+3\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ d)$$

两式相减,得

$$4\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ d),\ 即\ d|4$$

$\therefore d=2$ 或 $d=4$

因此 $2k-1\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 2)$ $2k+3\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 2)$

或 $2k-1\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 4)$ $2k+3\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 4)$

这些都与 $2k-1$、$2k+3$ 均为奇数矛盾,故 $2k-1$ 与 $2k+3$ 互质,命题成立.

(4)若 $n\equiv 3\ (\mathrm{mod}\ 4)$,则设 $n=4k+3$,那么

$$n=4k+3=(2k+1)+(2k+2)$$

显然 $2k+1$ 与 $2k+2$ 互质,命题成立.

综上所述,对任意的自然数 $n$,当 $n>6$ 时,原命题都成立.

**例 3** $1^2, 2^2, 3^2, \cdots, 123456789^2$ 的和的个位数的数字是

______.

**分析**:个位数的问题就是模 10 的余数问题.

**解**:因对于任意正整数$\overline{a_1a_2\cdots a_n}$,必有

$$\overline{a_1a_2\cdots a_n}\equiv a_n \pmod{10}$$

$$\therefore (\overline{a_1a_2\cdots a_n})^2\equiv a_n{}^2 \pmod{10}$$

所以

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+123456789^2$$
$$\equiv(1^2+2^2+3^2+\cdots+9^2+0^2)\times 12345678$$
$$+(1^2+2^2+3^2+\cdots+9^2) \pmod{10}$$
$$\equiv(1+4+9+6+5+6+9+4+1+0)\times 12345678$$
$$+(1+4+9+6+5+6+9+4+1) \pmod{10}$$
$$\equiv 45\times 12345678+45 \pmod{10}$$
$$\equiv 45\equiv 5 \pmod{5}$$

即所求数字是 5.

**例 4**　能够找到这样的四个正整数,使得它们中任何两个数的积与 2002 的和是完全平方数吗? 若能够,请举出一例;若不能够,请说明理由.

**解**:假设存在正整数 $n_1,n_2,n_3,n_4$ 满足题目条件,那么

$$n_in_j+2002=m^2$$

($i,j=1,2,3,4$,$m$ 是正整数)

$\because 2002\equiv 2 \pmod 4$, $m^2\equiv 0$ 或 $1 \pmod 4$

$\therefore n_in_j\equiv 2$ 或 $3 \pmod 4$.

(1)若 $n_1,n_2,n_3,n_4$ 中有两个偶数,不妨设 $n_1,n_2$ 是偶数,则 $n_1n_2\equiv 0 \pmod 4$

$\therefore n_1n_2+2002\equiv 0+2\equiv 2 \pmod 4$

这与 $m^2\equiv 0$ 或 $1 \pmod 4$矛盾.

$\therefore n_1,n_2,n_3,n_4$,中至多有一个偶数,至少有三个奇数.

(2)在三个奇数中,模 4 的余数为 1 或 3,根据抽屉原则,必有两个奇数对模 4 同余,设为 $n_2,n_3$. 即

$n_2 \equiv n_3 \equiv 1$ 或 $3 \pmod 4$

$\therefore n_2 n_3 \equiv 1^2$ 或 $3^2 \equiv 1 \pmod 4$

这与 $n_i n_j \equiv 2$ 或 $3 \pmod 4$ 矛盾.

综上所述,不能找到这样的四个数,使得它们中任何两个数的积与 2002 的和都是完全平方数.

**例** 5　若 $\underbrace{20022002\cdots2002}_{n\text{个}2002}15$ 被 15 整除,则 $n$ 的最小值等于(　　)

(A)2　　(B)3　　(C)4　　(D)5

**解**:$\because 2002 \equiv 7 \pmod{15}$,　$100 \equiv 10 \pmod{15}$

$\therefore 200215 \equiv 200200 \equiv 70 \equiv 10 \pmod{15}$

$$2002200215 \equiv 7\times10^6+10 \equiv 7\times10^3+10 \equiv 7\times100+10$$
$$\equiv 7\times10+10 \equiv 80 \equiv 5 \pmod{15}$$

$$20022002200215 \equiv 7\times10^{10}+5 \equiv 7\times10^5+5$$
$$\equiv 7\times10+5$$
$$\equiv 75$$
$$\equiv 0 \pmod{15}$$

$\therefore$最小的 $n$ 是 3. 选(A)

**例** 6　一个正整数除以 5,7,9 及 11 的余数依次方 1,2,3,4. 求满足条件的最小的正整数.

**解**:设所求的正整数为 $x$,则

$$\begin{cases} x \equiv 1 \pmod 5 & ① \\ x \equiv 2 \pmod 7 & ② \\ x \equiv 3 \pmod 9 & ③ \\ x \equiv 4 \pmod{11} & ④ \end{cases}$$

由①得,$x=5k+1$　($k$ 为自然数)

代入②,得

$$5k+1 \equiv 2 \pmod 7$$

$$\therefore 5k \equiv 1 \equiv 1+49 \equiv 50 \pmod 7$$

$\therefore k \equiv 10 \equiv 3 \pmod 7$

设 $k=7m+3$　($m$ 为非负整数)

$\therefore x=5k+1=5(7m+3)+1=35m+16$

代入③，得

$35m+16 \equiv 3 \pmod 9$

$\therefore 35m \equiv -13 \equiv -13+18 \equiv 5 \pmod 9$

$\therefore 7m \equiv 1 \equiv 1+27 \equiv 28 \pmod 9$

$\therefore m \equiv 4 \pmod 9$

设 $m=9n+4$　($n$ 为非负整数)

代入④得，

$35(9n+4)+16 \equiv 4 \pmod{11}$

$\therefore 9\times 35n+156 \equiv 4 \pmod{11}$

$9\times 35n \equiv -152 \equiv -152+154 \equiv 2 \equiv 2+33 \equiv 35 \pmod{11}$

$\therefore 9n \equiv 1 \pmod{11}$

$\therefore 9n \equiv 1+44 \equiv 45 \pmod{11}$

$\therefore n \equiv 5 \pmod{11}$

$\therefore n=11p+5$　($p$ 为非负整数)

所以　$x=35\times 9(11p+5)+156=35\times 9\times 11p+1731$

故　$x_{\min}=1731$.

**例 7**　有一列数：1，3，4，7，11，18，……(从第三个数开始，每个数恰好是它前面相邻两数的和)．(1)第 1991 个数被 6 除的余数是几？．(2)把该数列按下述方法分组：(1)，(3，4)，(7，11，18)，……(第 $n$ 组含 $n$ 个数)．问第 1991 组的各数之和被 6 除余数是几？

**解**：(1)用 $a_n$ 表示这个数列中的第 $n$ 个数，那么

$a_1=1,\ a_2=3,\ a_3=4,\ a_4=7,\cdots,a_n=a_{n-2}+a_{n+1},\cdots$ 于是

$a_n \equiv a_{n-2}+a_{n-1} \pmod 6$

可以得到下表

| $a_n$ / $a_n \pmod 6$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ | $a_5$ | $a_6$ | $a_7$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_n$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ | $a_5$ | $a_6$ | $a_7$ |
| $a_n \pmod 6$ | 1 | 3 | 4 | 1 | 5 | 0 | 5 |
| $a_n$ | $a_8$ | $a_9$ | $a_{10}$ | $a_{11}$ | $a_{12}$ | $a_{13}$ | $a_{14}$ |
| $a_n \pmod 6$ | 5 | 4 | 3 | 1 | 4 | 5 | 3 |
| $a_n$ | $a_{15}$ | $a_{16}$ | $a_{17}$ | $a_{18}$ | $a_{19}$ | $a_{20}$ | $a_{21}$ |
| $a_n \pmod 6$ | 2 | 5 | 1 | 0 | 1 | 1 | 2 |
| $a_n$ | $a_{22}$ | $a_{23}$ | $a_{24}$ | $a_{25}$ | $a_{26}$ | $a_{27}$ | … |
| $a_n \pmod 6$ | 3 | 5 | 2 | 1 | 3 | 4 | … |

由此表可以发现，$a_n \pmod 6$ 是以 24 为循环的数列，而 $1991 \equiv 23 \pmod{24}$，所以 $a_{1991} \equiv a_{23} \equiv 5 \pmod 5$，即第 1991 个数被 6 除的余数是 5.

(2)设第 1991 组数的各数之和为 $S_{1991}$，

$$m=1+2+3+4\cdots+1990=\frac{1990\times(1+1990)}{2}=995\times1991$$

$$\because 995\equiv11 \pmod{24} \quad 1991\equiv23\equiv-1 \pmod{24}$$

$$\therefore m=995\times1991\equiv-11\equiv13 \pmod{24}$$

所以，$S_{1991}=a_{m+1}+a_{m+2}+\cdots+a_{m+1991}\equiv a_{14}+a_{15}+a_{16}+\cdots+a_{13+1991} \pmod 6$

因为 $1991\equiv23\equiv-1 \pmod{24}$，因此

$$\begin{aligned} S_{1991} &\equiv (a_1+a_2+a_3\cdots+a_{24})\times24-a_{13} \\ &\equiv (1+3+4+1+5+\cdots+5+2)\times24-5 \\ &\equiv 0\times24-5 \\ &\equiv 1 \pmod 6 \end{aligned}$$

即第 1991 组的各数之和被 6 除的余数是 1.

**例 8**　$N=\underbrace{19981998\cdots1998}_{1998个1998}$，那么 $N$ 被 11 除时商数的个位数字是______

**解**：$\because 1998\equiv 8 \pmod{11}, 10000\equiv 1 \pmod{11}$

$\therefore N=\underbrace{19981998\cdots1998}_{n个}\equiv 8\times 1998\equiv 8\times 8\equiv 64\equiv 9$ $\pmod{11}$

说明 $N$ 被 11 除时余数是 9，而 $N$ 的个位数字是 8，由于 $10+8-9=9$，所 $N$ 被 11 除时商的个位数字应是 9.

**例** 9　由 1,9,9,0 四个数码组成的所有可能的四位数中，任何一个这样的四位数与自然数 $n$ 的和被 7 除的余数都不是 1，将所有满足上述条件的 然数 $n$ 从小到大按如下排列

$$n_1<n_2<n_3<n_4<\cdots$$

$n_1\cdot n_2$ 的值

**解**：由 1,9,9,0 四个数码组成的四位数共有 9 个，它们是：9091,1990,1909,1099,9910,9901,9109,9190,9019

$9091\equiv 5 \pmod 7$，$1990\equiv 2 \pmod 7$，$1909\equiv 5 \pmod 7$

$1099\equiv 0 \pmod 7$，$9910\equiv 5 \pmod 7$，$9901\equiv 3 \pmod 7$

$9109\equiv 2 \pmod 7$，$9190\equiv 6 \pmod 7$，$9091\equiv 3 \pmod 7$

当 $n=1$ 时，$1099+1\equiv 0+1\equiv 1 \pmod 7$，故 $n\neq 1$

当 $n=2$ 时，$9190+2\equiv 6+2\equiv 1 \pmod 7$，故 $n\neq 2$

当 $n=3$ 时，$9091+3\equiv 5+3\equiv 1 \pmod 7$，故 $n\neq 3$

当 $n=4$ 时，$5+4\equiv 2 \pmod 7$，$2+4\equiv 6 \pmod 7$，$0+4\equiv 4 \pmod 7$，$3+4\equiv 0 \pmod 7$，$6+4\equiv 3 \pmod 7$，即 9 个四位数加 4 被 7 除的余数都 不是 1，故 $n_1=4$.

当 $n=5$ 时，$9901+5\equiv 3+5\equiv 1 \pmod 7$，故 $n\neq 5$.

当 $n=6$ 时，$1990+6\equiv 2+6\equiv 1 \pmod 7$，故 $n\neq 6$.

当 $n=7$ 时，$5+7\equiv 5 \pmod 7$，$2+7\equiv 2 \pmod 7$，$0+7\equiv 0 \pmod 7$，$3+7\equiv 3 \pmod 7$，$6+7\equiv 6 \pmod 7$ 所以 $n_2=7$

故 $n_1\cdot n_2=4\times 7=28$.

# §2.5 水平测试题二

1. 如果 $a,b$ 均为自然数，$a$ 除以 7 余 2，$b$ 除以 7 余 5，当 $a^2>3b$ 时，$a^2-3b$ 除以 7 的余数是（　　）

(A)1　　(B)3　　(C)4　　(D)6

2. 除以 7 余 5，除以 5 余 2，除以 3 余 1 的所有三位数的和是（　　）

(A)2574　　(B)3681　　(C)4249　　(D)4436

3. 正整数 $a$ 被 7 除，得余数为 4，则 $a^3+5$ 被 7 除，得到的余数是（　　）

(A)0　　(B)2　　(C)4　　(D)6

4. 设 $b=1^2-2^2+3^2-4^2+\cdots-1998^2+1989^2$，以 1991 除 $b$，所得的数为（　　）

(A)0　　(B)1　　(C)2　　(D)4

5. $2^{1000}$ 除以 13，余数是（　　）

(A)1　　(B)2　　(C)3　　(D)7

6. 一数被 10 除余 9；被 9 除余 8；被 8 除余 7；等等，直至被 2 除余 1，此数为（　　）

(A)59　　(B)419　　(C)1259　　(D)2519

7. 数 1059，1417 和 2312，每个数各除以 $d$，若余数都是 $r$，其中是 $d$ 是大于 1 的整数，那么 $d-r$ 等于（　　）

(A)1　　(B)15　　(C)179　　(D)$d-15$

8. 已知正整数 $n=1\times8+2\times8^2+3\times8^3+\cdots+7\times8^7$，那么下列说法正确的是（　　）

(A)$n$ 能被 7 整除而不能被 9 整除

(B)$n$ 能被 9 整除而不能被 7 整除

(C)$n$ 不能被 7 整除也不能被 9 整除

(D)$n$ 既能被 7 整除又能被 9 整除

9. $a,b$ 是自然数，并且 $123456789=(11111+a)(11111-b)$ 则(　　)

(A)$a+b$ 是奇数

(B)$a+b$ 是偶数但不一定是 4 的倍数

(C)$a+b$ 是 4 的倍数

(D)$a+b$ 是偶数但不是 4 的倍数

10. 除 200 余数是 8 的自然数的个数是(　　)

(A)7　　(B)8　　(C)9　　(D)10

11. 已知 $a,b$ 是整数，$a$ 除以 7 余 3，$b$ 除以 7 余 5，当 $a^2>4b$ 时，$a^2-4b$ 除以 7 的余数是______.

12. $2003^{2001}$ 除以 7 的余数是______.

13. 已知正整数 $m$ 满足 $123\equiv333\equiv718 \pmod{m}$，那么 $m$ 的最大值是______.

14. 已知 $S=1^2+2^2+3^2+\cdots+101^2$，则 $S$ 被 103 整除的余数是______.

15. 一个七位数 $\overline{2003\times\times\times}$ 能被 19 和 91 整除，那么这个七位数的后三位数是______.

16. 设 $a=1\times2002+2\times2002+3\times2002+\cdots+2002\times2002$，那么 $a$ 除以 9 的余数是______.

17. 一个两位数被 7 除余 1. 如果交换它的十位数字与个位数字的位置，所得的余数被 7 除也余 1，那么这样的两位数有______个，它们分别是____________.

18. $1^4+2^4+3^4+\cdots+2003^4$ 的个位数字是______.

19. 2002 个 1 与 2003 个 2 依次排成一个多位数，这个多位数被 11 除所得的余数为______.

20. 在下列 6 个数 5，6，12，14，23，29 中划去数______后，能使剩下的其中 3 个数的和为另外 2 个数的和的 2 倍.

21. 对任意正整数 $n$，定义 $n!=1\times2\times3\times4\times\cdots\times n$ 求 $91!$ 除以 $19^5$ 所得的最小正余数.

22. 求证：$105 \mid 15n^7+21n^5+35n^3+34n$.

23. 确定完全平方数的末尾所有可能的最长的一串非零重复数字的位数．并求出末尾是这样的最大序列的最小平方数．

24. 已知 $4444^{4444}$ 的各位数上的数字之和是 $A$，$A$ 的各位数上的数字之和是 $B$. 求 $B$ 的各位数上的数字的和．

# 第3章　不定方程

首先讨论一个实例．

某班为丰富学生课外活动内容，购买了象棋和军棋各若干副，共用去38元钱，已知象棋每副3元，军棋每副5元，问象棋和军棋各买了多少副？

设象棋买了 $x$ 副，军棋买了 $y$ 副，由题意得

$$3x+5y=38$$

这是一个含有两个未知数的方程，只要 $x$ 任取一个值，就可以计算出相应的 $y$ 的值．如 $x=5$ 时，$y=\frac{23}{5}\cdots$，这个方程的解是不定的．但是根据题意知，这个方程中的 $x,y$ 只可能取非负整数，即要求出方程 $3x+5y=38$ 的非负整数解．

像这类未知数的个数多于方程的个数的方程，它的解是不确定的，这样的方程叫不定方程．类似的方程组，叫不定方程组．

## §3.1　一次不定方程

### 一、二元一次不定方程

简单的不定方程是二元一次不定方程，比如，我们前面提到的 $3x+5y=38$，它的一般形式是 $ax+by=c$（$a,b,c$ 为整数，且 $a,b$ 不为0）．

**例1**　下面叙述中正确的有（　　）

①不定式方程 $2x+3y=0$ 的整数解可表示成

$\begin{cases}x=-3t,\\y=2t\end{cases}(t=0,\pm1,\pm2)$

②不定方程 $2x+4y=5$ 无整数解．

③不定方程 $2x+3y=1$ 无整数解．

(A)①②　(B)②③　(C)①③　(D)①②③

**解**:①由 $2x+3y=0$ 得，$x=-\dfrac{3}{2}y$，

∴当 $y$ 为 2 时的整数倍时，方程有整数解，

∴ $\begin{cases}x=-3t,\\y=2t\end{cases}$ $(t=0,\pm1,\pm2)$是方程的整数解．

②∵$2x+4y=2(x+2y)$，

∴　当 $x,y$ 为整数时，方程左边为偶数，而右边为整数，

∴　此方程不可能有整数解．

③通过观察可知，$x=2,y=-1$ 是方程的一组解，故此叙述不正确．

∴正确的叙述应为①②，选(A)．

**说明**:(1)方程 $ax+by=0$，如果 $a,b$ 互质，则其一切整数解可表示为$\begin{cases}x=-bt\\y=at\end{cases}$,$(t=0,\pm1,\pm2)$

如果 $a,b$ 不互质，设 $a=da_1,b=db_1,a_1,b_1$ 互质，则原方程同解于方程 $a_1x+b_1y=0$，且 $a_1,b_1$ 互质，则可仿上得方程的整数解．

(2)方程 $ax+by=c(c\neq0)$，如果 $a,b$ 的最大公约数不能整除 $c$，则方程无整数解；如果 $a,b$ 的最大公约数可以整除 $c$，则可将方程化简，问题转化为(3)的情况．

(3)方程 $ax+by=c(c\neq0)$，如果 $a,b$ 互质，则有整数解．

**例 2**　如果方程 $2x+3y=1$ 有一组整数解为$\begin{cases}x=-1,\\y=1,\end{cases}$则由此可得方程 $2x+3y=6$ 的一组整数解为__________．

**解**：由已知，得　$2\times(-1)+3\times1=1$，

$\therefore 6\times[2\times(-1)+3\times1]=6$，

$\therefore 2\times(-6)+3\times6=6$，

$\therefore \begin{cases}x=-6,\\y=6\end{cases}$是方程 $2x+3y=6$ 的一组整数解．

**说明**：如果整数 $a,b$ 互质，方程 $ax+by=1$ 有整数解，则方程 $ax+by=c$ 也有整数解．并且如设方程 $ax+by=1$ 的整数解为$\begin{cases}x=x_0,\\y=y_0,\end{cases}$则方程 $ax+by=c$ 的整数解为$\begin{cases}x=cx_0,\\y=cy_0.\end{cases}$

**例 3**　如果不定方程 $3x+5y=7$ 有一组整数解$\begin{cases}x=-21,\\y=14,\end{cases}$则不表示这个方程解的是（　　）

(A) $\begin{cases}x=-21+5k,\\y=14-3k\end{cases}$　　(B) $\begin{cases}x=-21-5k,\\y=14+3k\end{cases}$

(C) $\begin{cases}x=-21+10k,\\y=14-6k\end{cases}$　　(D) $\begin{cases}x=-21+3k\\y=14-5k\end{cases}$

其中，$k$ 为整数.

**解**：$\because$ $\begin{cases}x=-21,\\y=14\end{cases}$是方程的解，

$\therefore$　$3\times(-21)+5\times14=7$

而　$3\times5k+5\times(-3k)$

$=3\times(-5k)+5\times3k$

$=3\times10k+5\times(-6k)$

$=0$，

$\therefore$　(A)、(B)、(C)、皆表示原方程的解，选(D).

**说明**：如果 $a,b$ 互质，且方程 $ax+by=c$ 有一组解$\begin{cases}x=x_0,\\y=y_0,\end{cases}$则它的一切整数解可表示成$\begin{cases}x=x_0-bt,\\y=y_0+at\end{cases}$（$t$ 为任何整数），前者称为不定方程的特解，后者按不定方程的通解．

由例 2、例 3 可知，要求得不定方程 $ax+by=c$（$a$，$b$ 为互质整数）的通解，只需求得其一组特解；而求其特解又只需求得 $ax+by=1$ 的一组特解即可．因此，研究不定方程的特解就是解决不定方程问题的关键．

**例 4**　求方程 $13x+30y=4$ 的全部整数解．

**解**：$\because (13,30)=1$，

$\therefore$ 原方程有整数解．

再由原方程得　$x=\dfrac{4-30y}{13}$.

$\because x,y$ 是整数，

$\therefore \dfrac{4-30y}{13}$ 也必为整数，

$\therefore 4-30y$ 是 13 的倍数．

由观察可知，$y_0=1$ 是适合要求的一个值，相应地得到 $x_0=-2$.

$\therefore$ 原方程的全部整数解为 $\begin{cases} x=-2+30t, \\ y=1-13t \end{cases}$（其中 $t$ 为任意整数）.

**例 5**　求方程 $5x-3y=-7$ 的正整数解．

**解**：原方程可化为　$x=\dfrac{3y-7}{5}$.

经观察，$y_0=4$，$x_0=1$ 为方程的一组解，

$\therefore$ 原方程的通解为 $\begin{cases} x=1-3t, \\ y=4-5t \end{cases}$（$t$ 为整数）.

又原方程的解为正整数，再解不等式组 $\begin{cases} 1-3t>0, \\ 4-5t>0 \end{cases}$ 得 $t<\dfrac{1}{3}$.

$\therefore$ 当 $t$ 取 $0,-1,-2,\cdots$ 时，可知得原方程的无穷多组正整数解 $\begin{cases} x_1=1, \\ y_1=4; \end{cases}$ $\begin{cases} x_2=4, \\ y_2=9; \end{cases}$ $\cdots$

**练一练**

(1)求方程 $11x+15y=7$ 的整数解.

(2)求方程 $6x+22y=90$ 的非负整数解.

**例 6**　求方程 $7x+19y=213$ 的所有正整数解.

**分析**:这个方程的系数较大,用观察法去求其特解比较困难,遇到这种情况我们可以用逐步缩小系数的方法使系数变小,最后再用观察法求得其解.

**解**:用方程

$$7x+19y=213 \quad ①$$

的最小整数 7 除方程①的各项,并移项得

$$x=\frac{213-19y}{7}=30-2y+\frac{3-5y}{7}. \quad ②$$

∵　$x,y$ 是整数,

∴　$\frac{3-5y}{7}=u$ 也是整数,

由 $5y+7u=3$ 得

$$y=\frac{3-7u}{5}=-u+\frac{3-2u}{5} \quad ③$$

令 $\frac{3-2u}{5}=v$(整数),由此得

$$2u+5v=3 \quad ④$$

由观察,知 $u=-1,v=1$ 是方程④的一组解.

将 $u=-1,v=1$ 代入③,得 $y=2$.

$y=2$ 代入②,得 $x=25$.

∴方程①有一组解 $x_0=25,y_0=2$.

∴方程①的全部整数解为 $\begin{cases}x=25-19t,\\ y=2+7t\end{cases}$($t$ 为整数).

又原方程的解为正整数,再解不等式组 $\begin{cases}25-19t>0,\\ 2+7t>0\end{cases}$ 得 $-\frac{2}{7}<t<\frac{25}{19}$.

∴$t$ 只能取 0，1，由此得原方程的正整数解为
$\begin{cases}x=25,\\y=2,\end{cases}$ $\begin{cases}x=6,\\y=9.\end{cases}$

当方程的整数较大时，我们还可以用辗转相除法求其特解．

**例 7** 求方程 $37x+107y=25$ 的整数解．

**解**：$107=2\times37+33$，

$37=1\times33+4$，

$33=8\times4+1$.

为用 37 和 107 表示 1，我们把上述辗转相除过程回代，得

$$\begin{aligned}1&=33-8\times4\\&=37-4-8\times4\\&=37-9\times4\\&=37-9\times(37-33)\\&=9\times33-8\times37\\&=9\times(107-2\times37)-8\times37\\&=9\times107-26\times37\\&=37\times(-26)+107\times9.\end{aligned}$$

∴$x_0'=-26$，$y_0'=9$ 是方程 $37x+107y=1$ 的一组整数解．

∴$x_0=25\times(-26)=-650$，$y_0=25\times9=225$ 是方程 $37x+107y=25$ 的一组整数解．

∴原方程的全部整数解为$\begin{cases}x=-650-107t,\\y=225+37t\end{cases}$($t$ 是整数).

**练一练**

(1)求方程 $72x+157=1$ 的整数解．

(2)求方程 $103x-91y=5$ 的整数解．

## 二、三元一次不定方程

二元一次不定方程的通解含有一个可以变动的参数 $t$.

**想一想**

怎样求得三元一次不定方程的通解？它的通解含有几个可以变动的参数？

**例 8**　求不定方程 $3x+2y+8z=32$ 的整数解．

**分析**：由于三个未知数中如有一个确定，原方程就成为一个二元一次不定方程．因而将三个未知数中的一个看成常数，从而求出方程的通解，这是一条正确的思路，大家不妨试一试．

这里介绍另一种思路，将方程的一部分作为整体，将原方程化为方程组，再利用参数法求解．

**解**：设 $3x+2y=t$（$t$ 为整数），则原方程化为

$$\begin{cases} 3x+2y=t, & ① \\ t+8z=32. & ② \end{cases}$$

由②得　$z=4-\frac{t}{8}$.

∵　$z$ 为整数，

∴　设 $\frac{t}{8}=u$（$u$ 为整数），则

$$t=8u. \quad ③$$

由①得　$y=-2x+\frac{t+x}{2}$.

∵　$y$ 为整数，

∴　设 $\frac{t+x}{2}=v$（$v$ 为整数），则

$$x=2v-t. \quad ④$$

将③代入④得　$x=2v-8u$　⑤

将③⑤代入 $y=-2x+\frac{t+x}{2}$，得

$y=-3v+16u$.

将③代入 $z=4-\frac{t}{8}$，得　$z=4-u$.

$\therefore$原方程的全部整数解为$\begin{cases}x=2v-8u,\\y=-3v+16u,\\z=4-u.\end{cases}$

($u$,$v$,为任何整数).

**说明**:利用这一方法还可以解出未知数更多的不定方程.注意本题中的参数 $t$ 只是一个中间量,最后的结果是用两个独立的参数来表示的.

**想一想**

如果是四元一次方程,最后的结果中又会有几个参数?

**练一练**

(1)求方程 $3x+7y+16z=40$ 的整数解.

(2)求方程 $9x+24y-5z=1000$ 的整数解.

## 三、不定方程组

**想一想**

解二元一次方程组、三元一次方程组的基本思想是什么?它是否适用于解不定方程组呢?

**例 9** 求不定方程组

$$\begin{cases}x+y+z=100, & ①\\4x+3y+2z=300 & ②\end{cases}$$

的正整数解.

**解**:②$-$①$\times 2$,得

$$2x+y=100,$$

$$\therefore \quad x=50-\frac{y}{2} \qquad ③$$

$\because$ $x$,$y$ 为正整数,

$\therefore$ 设$\frac{y}{2}=t$($t$ 为整数) ④

将④代入③,得 $x=50-t$ ⑤

$\because\quad 50-t>0,$

$\therefore\quad 0<t<50.$

将④⑤代入①,得　$z=50-t.$

$\therefore$　原方程组的正整数解为

$$\begin{cases}x=50-t,\\ y=2t, & (t=1,2,3,\cdots,49)\\ z=50-t\end{cases}$$

**练一练**

求不定方程组$\begin{cases}5x+7y+2z=24,\\ 3x-y-4z=4\end{cases}$的正整数解.

## 习题 3.1

### A　组

1. 方程 $4x+5y=98$ 的正整数解的个数是(　　)

(A)4　　(B)5　　(C)6　　(D)7

2. 满足等式 $1993=1992x-1991y$ 的 $x,y$ 的值的(　　)

(A)$x=12785$,　$y=12768$

(B)$x=12784$,　$y=12790$

(C)$x=11948$,　$y=11953$

(D)$x=1947$,　$y=1945$

3. 适合方程 $6x+15y+21z+9w=50$ 的正整数组$(x,y,z,w)$是(　　)

(A)$(1,1,1,1)$　　(B)$(0,2,1,1)$

(C)$(1,-2,4,2)$　　(D)不存在这样的正整数组

4. 要使关于 $x,y$ 的方程组$\begin{cases}x+y=p\\ 5x+3y=11\end{cases}$有正整数解,则整数 $p=$______.

5. 方程 $72x+166y=4$ 的通解可表示为______.(假设已

知此方程的一组特解为 $x=60, y=-26$.

6. 已知 $x,y,z$ 满足 $17x+5y-7z=0, 9x-13y+3z=0$,则 $x:y:z=$______.

7. 方程组 $\begin{cases} x+y+z=100, \\ 15x+9y+z=300 \end{cases}$ 的正整数解有______组.

B 组

1. 求方程 $2x+y=20$ 的一切非负整数解.

2. 方程 $2x+3y=763$ 有多少组正整数解?

3. 求方程 $2x+3y+7z=23$ 的正整数解.

4. $x,y$ 是满足条件 $2x+3y=a$ 的整数($a$ 是整数),证明必存在一个整数 $b$,使 $x,y$ 能表示成 $x=-a+3b, y=a-2b$ 的形式.

## §3.2　一些特殊不定方程的解法

关于简单的一次不定方程的解法在上一节已经做了一些简单的介绍，至于非一次的不定方程只有一些特殊的方程才能求解，面对这些不定方程就要灵活选择解题方法．

### 一、因式分解法

**例 1**　求方程 $xy-10(x+y)=1$ 的整数解．

**解**:将原方程整理得

$$xy-10x-10y=1.$$

$\therefore$　$xy-10x-10y+100=1+100$，(想一想，在 $xy-10x-10y=1$ 两端同加 100 的目的是什么?)

即　$(x-10)(y-10)=101.$

$\because$　$x-10$ 与 $y-10$ 均为 101 的约数，

$\therefore$　$\begin{cases}x-10=101,\\y-10=1;\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x-10=1,\\y-10=101;\end{cases}$

或 $\begin{cases}x-10=-101,\\y-10=-1;\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x-10=-1,\\y-10=-101.\end{cases}$

解得　$\begin{cases}x_1=111,\\y_1=11;\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=11,\\y_2=111\end{cases}$ $\begin{cases}x_3=-91\\y_3=9;\end{cases}$ $\begin{cases}x_4=9\\y_4=-91.\end{cases}$

**想一想**

形如 $xy-a(x+y)=b$(其中 $a,b$ 为整数)的方程的一般解法?

**例 2**　求方程 $x^2-y^2=88$ 的正整数解．

**解**:由原方程有

$$(x-y)(x+y)=88.$$

$\because$　右边为偶数，

$\therefore$　$x+y$ 与 $x-y$ 均为偶数，(为什么?)

显然正整数 $x,y$ 满足方程时，必有 $x>y>0$，

$\therefore\quad x+y>x-y>0.$

$\therefore\quad \begin{cases}x-y=2,\\x+y=44;\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x-y=4,\\x+y=22.\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x_1=23,\\y_1=21;\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=13,\\y_2=9.\end{cases}$

**练一练**

(1)方程 $x^2-y^2=1988$ 的不同整数解的组数是多少，并求出它们.

(2)方程 $x^2-y^2=45$ 的不同整数解的组数是多少，并求它们.

**答案**：

(1) $\begin{cases}x_1=498,\\y_1=496;\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=-498,\\y_2=-496;\end{cases}$ $\begin{cases}x_3=498,\\y_3=-496;\end{cases}$ $\begin{cases}x_4=-498,\\y_4=496;\end{cases}$ $\begin{cases}x_5=78,\\y_5=64;\end{cases}$ $\begin{cases}x_6=-78,\\y_6=-64;\end{cases}$ $\begin{cases}x_7=78,\\y_7=-64;\end{cases}$ $\begin{cases}x_8=-78,\\y_8=64,\end{cases}$ 八组正整数解.

(2) $\begin{cases}x_1=23,\\y_1=22;\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=9,\\y_2=6;\end{cases}$ $\begin{cases}x_3=7,\\y_3=2,\end{cases}$ 三组正整数解.

**例 4**　求证：方程 $x^3+11^3=y^3$ 无正整数解.

**证明**：把方程写成如下形式：

$$11^3=y^3-x^3=(y-x)(y^2+xy+y^2),(0<x<y).\qquad ①$$

若方程有整数解，则 $y-x$ 整除 $11^3$，由此导出四种情况：

$y-x=1,y^2+xy+x^2=11^3$；

$y-x=11,y^2+xy+x^2=11^2$；

$y-x=11^2,y^2+xy+x^2=11$；

$y-x=11^3,y^2+xy+x^2=1.$

在第一种情况下，$(x+1)^2+x(x+1)+x^2=11^3$，

即　$3x^2+3x=1330$，

$\because$　1330 不能被 3 整除，

∴　不可能有解.

在后面三种情况中，∵　$y>11$，

∴　$y^2+xy+x^2>11^2$.

∴不可能有解.

综合上述，原方程无正整解.

**例** 5　已知一个自然数减去 47 后，是一个完全平方数；这个数加上 42 后，是另一个完全平方数，求这个自然数.

**解**：设所求的自然数为 $n$，则

$$n-47=B^2, \qquad ①$$

$$n+42=C^2, \qquad ②$$

且 $B>0,C>0$.

②－①，得　$C^2-B^2=89$.

∴　$(C+B)(C-B)=89$

但 $C>B,C-B>0$，89 是质数，

∴　$\begin{cases} C+B=89, \\ C-B=1. \end{cases}$

解得　$\begin{cases} C=45, \\ B=44. \end{cases}$

故 $n=47+44^2=1983$.

## 二、奇偶判别法

**例** 6　求方程 $x^2=y^2+1986$ 的整数解.

**分析**：　将原方程化为 $x^2-y^2=1986$，

即　$(x+y)(x-y)=1986$.

∵　$1986=1\times1986=2\times3\times331$，

∴　$\begin{cases} x+y=1986, \\ x+y=1; \end{cases}$　$\begin{cases} x+y=993, \\ x-y=2; \end{cases}$

$\begin{cases} x+y=662, \\ x-y=3; \end{cases}$　$\begin{cases} x+y=331, \\ x-y=6; \end{cases}$

$$\begin{cases}x+y=1,\\x-y=1986;\end{cases}\quad\begin{cases}x+y=2,\\x-y=993;\end{cases}$$
$$\begin{cases}x+y=3,\\x-y=662;\end{cases}\quad\begin{cases}x+y=6,\\x-y=331;\end{cases}$$
$$\begin{cases}x+y=-1986,\\x-y=-1;\end{cases}\quad\begin{cases}x+y=-993,\\x-y=-2;\end{cases}$$
$$\begin{cases}x+y=-662,\\x-y=-3;\end{cases}\quad\begin{cases}x+y=-331,\\x-y=-6\end{cases}$$
$$\begin{cases}x+y=-1,\\x-y=-1986;\end{cases}\quad\begin{cases}x+y=-2,\\x-y=-993;\end{cases}$$
$$\begin{cases}x+y=-3,\\x-y=-662;\end{cases}\quad\begin{cases}x+y=-6,\\x-y=-331.\end{cases}$$

这样就需要解 16 个二元一次方程组．

由 1986 是偶数，而奇数的平方仍为奇数，偶数的平方仍为偶数，以及 $x^2=y^2+1986$ 可知，$x,y$ 的奇偶数相同，因此可先研究原方程有无奇数解或有无偶数解．

**解**：由 $x^2=y^2+1986$，$x,y$ 必同奇同偶．

当 $x,y$ 同为奇数时，可设 $x=2m+1,y=2n+1$（$m,n$ 均为整数）.

$\because\quad 1986=4\times496+2,$

$\therefore\quad$ 原方程化为$(2m)^2=(2n+1)^2+4\times496+2,$

即 $\quad 4m^2+4m+1=4n^2+4n+1+4\times496+2.$

这时方程左边为 $4k+1$ 形式，而左边为 $4s+3$ 形式，左、右两边不可能相等，所以原方程无奇数解．

当 $x,y$ 同为偶数时，可设 $x=2m,y=2n$（$m,n$ 均为整数）.

$\therefore\quad$ 原方程化为$(2m)^2=(2n)^2+4\times496+2,$

即 $\quad 4m^2=4n^2+4\times496+2.$

这时方程左边为 $4k$ 形式，右边为 $4k+2$ 形式，左、右两边不

可能相等，所以原方程无偶数解．

综上所述，$x^2=y^2+1986$ 无整数解．

**说明**：实际上，上述的 16 个二元一次方程组都没有整数解．

**练一练**

求证方程 $x^2+y^2=1998$ 无整数解．

**例 7**　1982 能否定成两个整数的四次方和？若能，请举出实例；若不能，试说明理由．

**解**：假设能，即有这样的整数 $x,y$，使得 $x^4+y^4=1982$.

因为 1982 为偶数，所以 $x,y$ 同奇同偶．

若 $x,y$ 同为奇数，不妨设 $x=2m+1,y=2n+1$（$m,n$ 均为整数）．

$\therefore$　原方程化为 $(2m+1)^4+(2n+1)^4=1982$，

化简后得　$4(m^4+n^4)+8(m^3+n^3)+6(m^2+n^2)+2(m+n)=495$.

显然方程左边为偶数，右边为奇数，所以原方程无奇数解．

若 $x,y$ 同为偶数，不妨设

$x=2m,y=2n$（$m,n$ 均为整数），　①

$\therefore$ 原方程化为 $(2m)^4+(2n)^4=1982$，　②

化简后得　$8m^4+8n^4=991$.　③

显然方程无偶数解．

综上所述，1982 不能写成两个整数的四次方之和．

**例 8**　求方程 $x^2+y^2+z^2=2xyz$ 的整数解．

**想一想**

显然，$x=y=z=0$ 是原方程的整数解，此方程还有其他整数解吗？为什么？

**解**：若原方程有整数解，则可分为以下两种情形：

(1) $x,y,z$ 中必有一个是偶数，另两个是奇数；

(2) $x,y,z$ 都是偶数．

若是情形(1),不妨设 $x=2m,y=2n+1,z=2k+1(m,n,k$ 均为整数).

$\therefore (2m)^2+(2n+1)^2+(2k+1)^2=2\cdot 2m\cdot(2n+1)\cdot(2k+1)$,

化简后得

$2m^2+2n^2+2k^2+2n+2k+1=2m(2n+1)(2k+1)$.

方程左边为奇数,右边为偶数,此时原方程无整数解.

若是情形(2),不妨设 $x=2m_1,y=2n_1,z=2k_1(m_1,n_1,k_1$ 均为整数).

$\therefore\quad (2m_1)^2+(2n_1)^2+(2k_1)^2=2\cdot 2m_1\cdot 2n_1\cdot 2k_1$,

代简后得 $\quad {m_1}^2+{n_1}^2+{k_1}^2=4m_1n_1k_1$,

$\therefore\quad m_1,n_1,k_1$ 仍应为偶数.

可设 $m_1=2m_2,n_1=2n_2,k_1=2k_2$,代入上式可得

${m_2}^2+{n_2}^2+{k_2}^2=8m_2n_2k_2$,

$\therefore\quad m_2,n_2,k_2$ 也应为偶数.

……

故满足是原方程的整数解都是偶数,且这些偶数不论被 2 除多少次,所得仍为偶数,具备这种性质的偶数只能是 $x=y=z=0$.

**例** 9　求方程 $x(x+y)-z=120$ 的质数解.

**解**:若 $z$ 为偶数,则 $z=2$.

$\therefore\quad x(x+y)=122$ 为偶数.

又　$x,y$ 是质数,

$\therefore\quad x=2$,此时 $y=59$ 为质数,

$\therefore\quad$ 原方程有质数解 $x=z=2,y=59$.

若 $z$ 为奇数,则 $x(x+y)=z+120$ 为奇数,

$\therefore\quad x,x+y$ 都为奇数,

$\therefore\quad y$ 为偶数,　$\therefore\quad y=2$

$\therefore\quad x(x+2)=z+120$,

即　$x^2+2x-120=z$,

$\therefore$　$(x+12)(x-10)=z$.

$\because$　$z$ 是质数，且 $x+12>x-10$，

$\therefore$　$x-10=1$，　$\therefore$　$x=11$，

此时 $z=23$.

$\therefore$　原方程的另一组质数解为 $x=11, y=2, z=23$.

## 三、余数检验法

**例 10**　求证：对于任何正整数 $n$，方程

$$x^2+1-3y^n=0$$

无整数解.

**分析**：由于正整数有无数多个，显然不能逐一研究. 为方便起见先对一个固定的 $n$ 进行研究以降低问题的难度.

另外，可设法证明不论 $x$ 是什么整数，$x^2+1$ 都不可能是 3 的倍数，并且只需分别讨论 $x$ 是 3 的倍数，$x$ 被 3 除余 1，$x$ 被 3 除余 2 这三种情形.

**证明**：任何整数被 3 除只有三种可能.

当 $x$ 是 3 的倍数，不妨设 $x=3k$，则

$$(3k)^2+1-3y^n=0,$$

即　$9k^2+1-3y^n=0$

方程左边是 $3s+1$ 的形式，右边是 3 的倍数，左、右两边不可能相等，此时方程不可能有整数解.

当 $x$ 被 3 除余 1 时，不妨设 $x=3k+1$，则

$$(3k+1)^2+1-3y^n=0,$$

即　$9k^2+6k+1+1-3y^n=0$.

方程左边为 $3s+2$ 的形式，右边是 3 的倍数，左、右两边不可能相等，此时方程不可能有整数解.

当 $x$ 被 3 除余 2 时，不妨设 $x=3k+2$，则

$$(3k+2)^2+1-3y^n=0,$$

即　$9k^2+12k+4+1-3y^n=0$.

方程左边为 $3s+2$ 的形式，右边是 3 的倍数，左、右两边不可能相等，此时方程不可能有整数解．

综上所述，方程 $x^2+1-3y^n=0$ 无整数解．

由于证明过程中与 $n$ 取哪个正整数无关，所以，对于任何正整数 $n$，$x^2+1-3y^n=0$ 无整数解．

**例 11**　求 $x^2-11y=4$ 的整数解．

**分析**：由于 $11y$ 是 11 的倍数，考虑 $x$ 被 11 除的各种余数，$x^2$ 应被 11 除余 4 才可能满足方程．

**解法 1**：设 $x=11m+t$，$t=0,1,2,\cdots\cdots,10$，代入方程中得

$$(11m+t)^2-11y=4,$$

即　$121m^2+22mt+t^2-11y=4.$

$\therefore$　$11\mid(t^2-4).$

用 $t=0,1,2,\cdots\cdots,10$ 依次试验知，$t=2$，$t=9$.

$\therefore x=11m+2$，或 $x=11m+9$.

当 $x=11m+2$ 时，$11y=121m^2+44m+4-4$，

即　$y=m(11m+4)$；

当 $x=11m+9$ 时，$11y=121m^2+198m+81-4$，

即　$y=11m^2+18m+7.$

若将 $11m+9$ 表示为 $11(m+1)-2$，则

$$\begin{aligned} y&=11m^2+11m+7m+7\\ &=11m(m+1)+7(m+1)\\ &=(m+1)(11m+7)\\ &=(m+1)[11(m+1)-4]. \end{aligned}$$

令 $k=m+1$，当 $x=11k-2$ 时，$y=k(11k-4)$.

$\therefore$　原方程的解为 $\begin{cases}x=11m+2,\\ y=m(11m+4)\end{cases}$（$m$ 是整数），

或　$\begin{cases}x=11k-2,\\ y=k(11k-4)\end{cases}$（$k$ 是整数）.

**解法 2**：将原方程化为　$x^2-4=11y$，

$\therefore\quad (x+2)(x-2)=11y.$

$\because\quad 11$ 是质数，

$\therefore\quad 11\mid(x+2)$，或 $11\mid(x-2)$.

当 $11\mid(x+2)$ 时，则 $x+2=11k, x-2=11k-4$.

代入原方程中得　$11k(11k-4)=11y$，

$\therefore\quad y=k(11k-4).$

当 $11\mid(x-2)$ 时，则 $x-2=11m, x+2=11m+4$.

代入原方程中得　$(11m+4)\cdot 11m=11y$，

$\therefore\quad y=m(11m+4).$

$\therefore$　原方程的解为 $\begin{cases} x=11k-2, \\ y=k(11k-4) \end{cases}$（$k$ 是整数），

或　$\begin{cases} x=11m+2, \\ y=m(11m+4) \end{cases}$（$m$ 是整数）.

**练一练**

证明方程 $x^4+y^4+2=5z$ 没有整数解.

## 四、配方估值试验法

**例 12**　求方程 $3x^2-4xy+3y^2=35$ 的整数解.

**分析**：设法将得方程左边配成完全平方，但首项系数是 3 并非完全数，故在方程两边先同乘以 3 后再配方.

**解**：由 $3x^2-4xy+3y^2=35$，有

$$9x^2-12xy+9y^2=105,$$

$\therefore\quad 9x^2-12xy+4y^2+5y^2=105,$

$\therefore\quad (3x-2y)^2+5y^2=105.$

$\because\quad (3x-2y)^2\geqslant 0,$

$\therefore\quad 5y^2\leqslant 105,\qquad \therefore\quad y^2\leqslant 21,$

$\therefore\quad |y|\leqslant\sqrt{21}.$

$\because\quad y$ 是整数，

$\therefore\quad y$ 可取 $-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4$.

当 $y=0$ 时，$3x^2=105$，无整数解；

当 $y=1$ 时，$(3x-2)^2+5=105$，

$\therefore\quad (3x-2)^2=100,\qquad \therefore\quad 3x-2=\pm 10,$

当 $3x-2=10$ 时，$x=4$；

当 $3x-2=-10$ 时，无整数解.

当 $y=-1$ 时，$(3x+2)^2+5=105$，

$\therefore\quad (3x+2)^2=100,\qquad \therefore\quad 3x+2=\pm 10,$

当 $3x+2=10$ 时，无整数解；

当 $3x+2=-10$ 时，$x=-4$.

当 $y=\pm 2$ 时，$(3x-2y)^2=85$，无整数解.

当 $y=\pm 3$ 时，$(3x-2y)^2=60$，无整数解.

当 $y=\pm 4$ 时，$(3x-2y)^2=25$，

$\therefore\quad 3x-2y=\pm 5.$

可以分别解得　$x=\pm 1$.

综上所述，方程 $3x^2-4xy+3y^2=35$ 的整数解为

$$\begin{cases}x_1=4,\\ y_1=1;\end{cases}\quad \begin{cases}x_2=1,\\ y_2=4;\end{cases}\quad \begin{cases}x_3=-4,\\ y_3=-1\end{cases}\quad \begin{cases}x_4=-1,\\ y_4=-4\end{cases}$$

**例 13**　求方程 $3x^2-8xy+7y^2-4x+2y=109$ 的所有的正整数解.

**解**：用配方法把原方程化为

$$(3x-4y-2)^2+5(y-1)^2=336.$$

令 $3x-4y-2=m$，$y-1=n$，则原方程又可化为

$$m^2+5n^2=336,\ m,n\ 为整数，且\ n\geqslant 0.$$

$\because\quad m^2\geqslant 0,\qquad \therefore\quad 5n^2\leqslant 336,$

$\therefore\quad n$ 可能取 $0,1,2,\cdots\cdots,8$.

为使 $336-5n^2$ 为完全平方数，$n$ 只能取 4 或 8.

$\therefore\quad m=\pm 16, n=4,$

或　$m=\pm 4,\ n=8.$

$\therefore\quad \begin{cases} 3x-4y-2=\pm 16, \\ y-1=4; \end{cases}$

或 $\quad \begin{cases} 3x-4y-2=\pm 4, \\ y-1=8. \end{cases}$

解之，原方程仅有两组正整数解 $\begin{cases} x_1=2, \\ y_1=5; \end{cases}$ $\begin{cases} x_2=14, \\ y_2=9. \end{cases}$

## 五、放缩限制法

**例 14**　若 $x,y,z$ 的最小值不小于 3，求方程 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{z}=\frac{1}{2}$ 的整数解．

**分析**：由 $z$ 不小于 3，有 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}>\frac{1}{2}$.

设法限制 $x$ 的范围，再定 $x$ 值；继而确定 $y$ 的范围，再定 $y$ 值；最后定出 $z$ 值．

**解**：$\because\quad z$ 不小于 3，$\frac{1}{z}>0$，

$\therefore$　方程 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{z}=\frac{1}{2}$ 的整数解为

$\begin{cases} x_1=3, \\ y_1=3, \\ z_1=6; \end{cases}$ $\begin{cases} x_2=3, \\ y_2=4, \\ z_2=12; \end{cases}$ $\begin{cases} x_3=4, \\ y_3=3, \\ z_3=12; \end{cases}$ $\begin{cases} x_4=5, \\ y_4=3, \\ z_4=30; \end{cases}$ $\begin{cases} x_5=3, \\ y_5=5, \\ z_5=30. \end{cases}$

**例 15**　求方程 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{5}{6}$ 的正整数解．

**解**：$\because\quad x,y,z$ 是正整数，且 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{5}{6}<1$，

$\therefore\quad x,y,z>1$.

不妨设 $1<x\leqslant y\leqslant z$，则 $\frac{1}{x}\geqslant\frac{1}{y}\geqslant\frac{1}{z}$.

$\therefore\quad \frac{1}{x}<\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\leqslant\frac{1}{x}+\frac{1}{x}+\frac{1}{x}=\frac{3}{x}$,

即 $\frac{1}{x}<\frac{5}{6}\leqslant\frac{3}{x}$,

$\therefore\quad \frac{6}{5}<x\leqslant\frac{18}{5}$,

$\therefore x=2$ 或 3.

当 $x=2$ 时，$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{5}{6}-\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$,

又 $\frac{1}{y}<\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\leqslant\frac{1}{y}+\frac{1}{y}=\frac{2}{y}$,

即 $\frac{1}{y}<\frac{1}{3}\leqslant\frac{2}{y}$,

$\therefore\quad \frac{1}{x}+\frac{1}{y}>\frac{1}{2}$.

不失一般性，设 $0<x\leqslant y$，则 $\frac{1}{x}\geqslant\frac{1}{y}>0$,

$\therefore\quad \frac{1}{x}+\frac{1}{x}\geqslant\frac{1}{x}+\frac{1}{y}>\frac{1}{2}$,

$\therefore\quad \frac{2}{x}>\frac{1}{2}$,

$\therefore\quad x<4$.

$\because\quad x$ 不小于 3，　$\therefore\quad x=3$.

又 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}>\frac{1}{2}$,

$\therefore\quad \frac{1}{3}+\frac{1}{y}>\frac{1}{2}$,

$\therefore\quad \frac{1}{y}>\frac{1}{6}$，　$\therefore\quad y<6$.

$\because\quad y$ 不小于 3，　$\therefore\quad y=3,4,5$.

当 $x=3,y=3$ 时，代入原方程得　$z=6$；

当 $x=3,y=4$ 时，代入原方程得　$z=12$；

当 $x=3,y=5$ 时，代入原方程得　$z=30$.

又 $\because$　$x,y$ 的位置在方程中是对称的，

$\therefore$　当 $x=4,y=3$ 时，有 $z=12$；

　　当 $x=5,y=3$ 时，有 $z=30$.

$\therefore$　$2<y\leqslant 4$，

$\therefore$　$y=3$ 或 $4$.

$\therefore$　由 $\begin{cases}x=2,\\y=4\end{cases}$ 得 $z=12$；

　　由 $\begin{cases}x=2,\\y=5\end{cases}$ 得 $z=\dfrac{2}{15}$（舍）；

　　由 $\begin{cases}x=2,\\y=6\end{cases}$ 得 $z=6$；

　　由 $\begin{cases}x=3,\\y=3\end{cases}$ 得 $z=6$；

　　由 $\begin{cases}x=3,\\y=4\end{cases}$ 得 $z=4$.

$\therefore$　当 $1<x\leqslant y\leqslant z$ 时，原方程有四组解

$$\begin{cases}x=2,\\y=4,\\z=12;\end{cases}\quad\begin{cases}x=2,\\y=6,\\z=6;\end{cases}\quad\begin{cases}x=3,\\y=3,\\z=6;\end{cases}\quad\begin{cases}x=3,\\y=4,\\z=4.\end{cases}$$

再根据该方程的对称性，可得如下表所列的 15 组解（请读者自己填写）：

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | | | | | | | | | | | | | | | |
| $y$ | | | | | | | | | | | | | | | |
| $z$ | | | | | | | | | | | | | | | |

## 六、整数离析法

**例** 16　求方程 $3x^2-xy+12=0$ 的整数解．

**分析**：由 $y$ 为整数，若 $y=0$，$3x^2+12\neq 0$，故方程无 $y=0$ 的整数解．$x=0$ 亦不可能．将原方程化为 $y=3x+\frac{12}{x}$. 由 $x,y$ 均为整数，可知 $x$ 只能取有限的几个整数．

**解**：∵　$x=0$ 不满足方程，

∴　$y=3x+\frac{12}{x}$.

∵　$x,y$ 均为整数，

∴　$\frac{12}{x}$亦为整数，

∴　$x$ 只能取 $\pm 1,\pm 2,\pm 3,\pm 4,\pm 6,\pm 12$ 这几个值．

当 $x=\pm 1$ 时，$y=\pm 15$；

当 $x=\pm 2$ 时，$y=\pm 12$；

当 $x=\pm 3$ 时，$y=\pm 13$；

当 $x=\pm 4$ 时，$y=\pm 15$；

当 $x=\pm 6$ 时，$y=\pm 20$；

当 $x=\pm 12$ 时，$y=\pm 37$.

∴　方程 $3x^2-xy+12=0$ 的整数解为

$$\begin{cases}x=\pm 1,\\ y=\pm 15;\end{cases}\quad \begin{cases}x=\pm 2,\\ y=\pm 12;\end{cases}\quad \begin{cases}x=\pm 3,\\ y=\pm 13;\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=\pm 4,\\ y=\pm 15;\end{cases}\quad \begin{cases}x=\pm 6,\\ y=\pm 20;\end{cases}\quad \begin{cases}x=\pm 12,\\ y=\pm 37.\end{cases}$$

### 习题 3.2

#### A　组

1. 如果 $x,y$ 都是小于 100 的正整数，则满足 $x^2-1992=y^2$

的数组$(x,y)$共有(　　)

(A)1 组　(B)2 组　(C)3 组　(D)4 组

2. 求证方程 $x^3+11^3=y^3$ 没有正整数解.

3. 求方程$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=a$ 的正整数解,其中 $a$ 为正数,$x\neq y\neq z$.

4. 求方程 $4x^2-4xy-3y^2=77$ 的正整数解.

5. 求方程 $2xy-3x-y=6$ 的一切整数解.

## B　组

1. $x=9,y=-4$ 是二元二次方程 $2x^2+5xy+3y^2=30$ 的一组整数解,这个方程的不同的整数解共有(　　)

(A)2 组　(B)6 组　(C)12 组　(D)16 组

2. $a$ 为任一给定的正整数,则关于 $x$ 与 $y$ 的方程 $x^2-y^2=a^3$,以下论断正确的是(　　)

(A)没有正整数解

(B)只有正整数解

(C)仅当 $a$ 为偶数时才有整数解

(D)总有整数解

3. 方程组$\begin{cases}xy+z=94,\\x+yz=95\end{cases}$的整数解是________.

4. 满足方程$(10-x)(8-x)=2^y$ 的整数 $x,y$ 是________.

5. 试求满足方程 $2^x+3^y=z^2$ 的非负整数解 $x,y,z$.

## §3.3 利用同余解不定方程

解不定方程的方法很多，其中一个方法就是余数法．在不定方程两边取一个特殊的模，消去部分未知数，将等式转化为同余式．另外利用同余式也比较容易判断不定方程是否有解．

### 一、利用同余判断同余方程是否有解

**例 1** 证明方程 $x^2-3y^2=17$ 无整数解．

**证明**：假设 $x,y$ 是原方程的解，则方程两边模 3，得

$$x^2-3y^2\equiv 17 \pmod 3$$

$$\therefore x^2\equiv 17\equiv 2 \pmod 3$$

又因对任意整数 $a$，有

$$a\equiv 0,1,2 \pmod 3$$

$$a^2\equiv 0,1 \pmod 3,$$

矛盾．所以原方程 $x^2-3y^2=17$ 无整数解．

**说明**：如果不定方程的两边对同一模 $m$（常数）不同余，则这个方程必无解．但是它的逆命题却不一定成立．如果不定方程两边对某一模同余，不能判断它有解．因为，如果方程有解则方程的解必为偶数或奇数．所以，通常在奇偶分析的基础上应同余判断不定方程是否有解．

**例 2** 证明：方程 $2x^2-5y^2=7$ 无整数解．

**证明**：$\because 2x^2-5y^2=7$，　$\therefore y$ 是奇数．　设 $y=2n+1$

方程两边模 5，得

$$2x^2-5y^2\equiv 7 \pmod 5$$

$$\therefore 2x^2\equiv 7\equiv 2 \pmod 5$$

$$x^2\equiv 1 \pmod 5$$

$\therefore$ 原方程可能有整数解．假设有整数解．

①若 $x$ 是偶数，则 $2x^2\equiv 0 \pmod 8$

$y^2=(2n+1)^2=4n(n+1)+1\equiv 1 \pmod 8$

$\therefore 2x^2-5y^2\equiv 0-5\equiv -5\equiv 3 \pmod 8$

∴方程两边对模 8 不同余，

$\therefore x$ 不能是偶数．

②若 $x$ 是奇数，则 $2x^2\equiv 2 \pmod 4$

$\therefore 2x^2-5y^2\equiv 2-5\equiv -3\equiv 1 \pmod 4$

∴方程 $2x^2-5y^2=7$ 的两边对模 4 也不同余．

$\therefore x$ 也不能是奇数．

根据①、②的结论，原方程无整数解．

**练一练**

判断下列不定方程是否有解．

1. $6x+8y=9$

2. $x^2+3xy-2y^2=122$

**提示：**

2. 方程两边乘以 4 得 $4x^2+12xy-8y^2=488$. 配方得

$(2x+3y)^2-17y^2=488\equiv -5 \pmod{17}$

$\therefore (2x+3y)^2\equiv -5\equiv 12 \pmod{17}$

对任何整数 $a$，

$$a^2\equiv 0,1,4,9,16,8,2,15,13 \pmod{17}$$

∴原方程无解．

## 二、利用同余解不定方程．

**例 1**　求方程 $5x+3y=22$ 的整数解．

**解**：方程两边取模 3，得，

$$5x\equiv 22\equiv 1 \pmod 3$$

$\therefore 5x\equiv 1+24=25 \pmod 3$

$\therefore x\equiv 5\equiv 2 \pmod 3$

设 $x=3k+2$，$k$ 是整数，代入原方程得

$$y=4-5k$$

∴原方程的整数解是

$$\begin{cases}x=3k+2\\y=4-5k\end{cases}\quad(k\text{ 是整数}).$$

**说明**：由此例可以看出，利用同余式解二元一次不定方程的方法和步骤是：①首先在方程两边选某一未知数的系数的绝对值（如本例中的 3）为模，消去这个未知数（如本例中的 $y$），得到同余式（如本例中的 $5x\equiv1\pmod 3$）。②再将同余式化简为“$x\equiv b\pmod m$”的形式．③根据同余的概念，写出满足条件的 $x$. ④代入原方程就可求得另一未知数的值．

这实际上是利用同余式来消元，运用这一方法可以求解 $n$ 元一次不定方程．

**例 2**　解不定方程 $2x-5y+10z=8$

**分析**：取模的目的是为了消元，所以可以方程两边到模 2 或 5.

**解**：方程两边取模 2 得．

$$-5y\equiv0\pmod 2$$

$$\therefore\ y\equiv0\pmod 2$$

∴设 $y=2k$，$k$ 为整数．

代入原方程得．

$$2x-10k+10z\equiv8\pmod 2\qquad①$$

两边再取模 10，得．

$$2x\equiv8\pmod{10}$$

$$\therefore\ x\equiv4\pmod 5$$

∴设 $x=5n+4$，$n$ 为整数．

把 $x=5n+4$ 代入方程①，得

$$z=k-n$$

所以原方程的解为

$$\begin{cases} x=5n+4 \\ y=2k \\ z=k-n. \end{cases} \qquad (n,k \text{ 都是整数}).$$

**练一练**

求下列方程的整数解

(1)　$5x+7y=41$

(2)　$10x+10y+6z=61$

## 三、利用同余方程解一些特殊的不定方程

**例 1**　求方程 $x^2+y^2=720$ 的正整数解.

**解**:易知 $x,y$ 的奇偶性相同.

方程两边取模 8,得

$$x^2+y^2 \equiv 720 \equiv 0 \pmod 8 \qquad (*)$$

若 $x,y$ 同为奇数,则

$$x^2 \equiv 1 \pmod 8, \quad y^2 \equiv 1 \pmod 8$$

$$\therefore x^2+y^2 \equiv 1+1 \equiv 2 \pmod 8$$

与(*)式矛盾.所以 $x,y$ 都是偶数,那么

$$x^2 \equiv 0,4 \pmod 8$$

$$y^2 \equiv 0,4 \pmod 8$$

因此满足原方程 $x,y$ 只能是

$$\begin{cases} x^2 \equiv 0 \pmod 8 \\ y^2 \equiv 0 \pmod 8 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x^2 \equiv 4 \pmod 8 \\ y^2 \equiv 4 \pmod 8 \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} x \equiv 0,4 \pmod 8 \\ y \equiv 0,4 \pmod 8 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x \equiv 2,6 \pmod 8 \\ y \equiv 2,6 \pmod 8 \end{cases}$$

经计算知,方程的解只有一组解:

$$\begin{cases} x=12 \\ y=24. \end{cases}$$

**例 2**.求方程 $x^2+y^2-6xy-19=0$ 的整数解.

**解**:方程变形为

$$x^2+y^2-6xy=19$$

两边取模 2,得

$$x^2+y^2\equiv19\equiv1(\bmod 2)$$

根据费尔马定理知

$$x^2\equiv x\ (\bmod 2)\qquad y^2\equiv y\ (\bmod 2)$$

$$\therefore x+y\equiv1\ (\bmod 2)$$

所以

$$①\begin{cases}x\equiv0(\bmod 2)\\y\equiv1(\bmod 2)\end{cases}\qquad ②\begin{cases}x\equiv1(\bmod 2)\\y\equiv0(\bmod 2)\end{cases}$$

当方程①成立时,方程两取模 4,得

$$x^2+y^2-6xy\equiv1\ (\bmod 4)\quad 而\ 19\equiv3\ (\bmod 3)$$

因此①式不成立.

当方程②成立时,方程两边取模 4,得

$$x^2+y^2-6xy\equiv1(\bmod 4)$$

而 $19\equiv3\ (\bmod 4)$. 因此②也不成立.

综上所述,原方程没有整数解.

**例** 3 求方程 $5^x-3^y=2$ 的正整数解.

**解**:观察易知 $x=1,y=1$ 是这个方程的一组解.

方程两边取模 4,得.

$$\because 3\equiv-1\ (\bmod 4)\quad \therefore 3^y\equiv(-1)^y(\bmod 4)$$

$$\because 5\equiv1(\bmod 4)\quad \therefore 5^x\equiv1^x\equiv1(\bmod 4)$$

$$\therefore 1-(-1)^y\equiv2(\bmod 4)$$

$$\therefore (-1)^y\equiv-1(\bmod 4)$$

$\therefore y$ 是奇数.

方程两边再取模 3,得

$$5^x\equiv2\ (\bmod 3)$$

即 $(-1)^x\equiv-1\ (\bmod 3)$,所以 $x$ 也是奇数.

若 $y>1$,则 $y\geqslant3$,设 $y=3+m$ ($m$ 是偶数). 那么 $5^x=2+$

$3^y \geqslant 2+3^3$，因此 $x\geqslant 3$，再设 $x=3+n$，$n$ 也是偶数．原方程两边再模 7，得

$$5^{3+n}-3^{3+m}\equiv 2 \pmod 7$$

$$5^3\cdot 5^n-3^3\cdot 3^m\equiv 2 \pmod 7$$

$$(-1)\cdot 5^n-(-1)\cdot 3^m\equiv 2 \pmod 7.$$

即 $3^m-5^n\equiv 2 \pmod 7$

显然当 $m=3$，$n=2$ 时是这个方程的一个解，这与 $m$ 是偶数矛盾．故 $y$ 不可能大于 1.

所以，原方程的解是

$$\begin{cases} x=1 \\ y=1. \end{cases}$$

## 习题 3.3

1. 利用同余式证明方程 $6x+8y=3$ 无整数解．
2. 利用同余式证明方程 $x^2+y^2-8z=6$ 无整数解．
3. 利用同余式求下列方程的整数解．

(1) $9x-7y=1$　　(2) $6x+2y-3z=9$

4. 求方程 $x^2+y^2=328$ 的整数解．
5. 求证方程 $x^2+y^2+z^2=8n+7$（$n$ 为整数）无整数解．

# §3.4 有关不定方程的应用问题

数学的应用是人们学习数学、研究数学的最终目的，因此应用问题在中小学数学中也占有重要的地位．

广而言之，对现实生活中的数量关系、空间图形的各方面研究都是一个个大的应用的问题；狭而言之，中小学数学中来源于日常生活、生产实践、经济活动的一些具有实际背景，能用中小学数学知识解决的问题，就是通常所说的应用的问题．这一节我们只研究其中一类可用不定方程解决的应用问题．

**例 1** 若干只 6 脚蟋蟀和 8 脚蜘蛛，共有 46 只脚，问蟋蟀和蜘蛛各有多少只？

**分析**：若设有蟋蟀 $x$ 只，蜘蛛 $y$ 只，则原题实际上就是转化为求不定方程 $6x+8y=46$ 的正整数解．

**解**：设有 $x$ 只蟋蟀，$y$ 只蜘蛛，得方程

$$6x+8y=46,$$

即 $3x+4y=23.$

$$\therefore \quad x=\frac{23-4y}{3}. \tag{①}$$

变形为 $x=7-y-\dfrac{y-2}{3}.$

$\because \quad 1\leqslant y<6$，（为什么？）

又$\because$ $y$ 是正整数，且 $y-2$ 能被 3 整除，

$\therefore \quad y=2$ 或 $y=5.$

把 $y=2, y=5$ 分别代入①，得所列方程的正整数解

$$\begin{cases} x_1=5, \\ y_1=2; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2=1, \\ y_2=5. \end{cases}$$

**答**：有蟋蟀 5 只，蜘蛛 2 只；或有蟋蟀 1 只，蜘蛛 5 只．

**说明**：有关不定方程的应用问题除了题中所给的一些条件

之外，还应注意未知量为某一范围内的整数这一隐含条件．

**例 2**　小明共集邮票若干张，其中有$\frac{1}{4}$是 1990 年以前国内发行的，$\frac{1}{8}$是 1991 年国内发行的，还有$\frac{1}{19}$是 1992 国内发行的，此外尚有不足 100 张的外国邮票．小明共有邮票多少张？

**解**：设小明共有邮票 $x$ 张，其中外国邮票 $y$ 张，得方程

$$\frac{x}{4}+\frac{x}{8}+\frac{x}{19}+y=x,$$

$\therefore\quad x=\frac{152}{87}y.$

$\because\quad (152,87)=1,0<y<100,y$ 是正整数，

$\therefore\quad y=87,$

$\therefore\quad x=152.$

**答**：小明共有邮票 152 张．

**例 3**　一批旅游者决定分乘几辆汽车，要使每车有同样的人数，每辆汽车至多乘 32 人．起先每辆车乘 22 人，这时有一人坐不上车；开走一辆空车，那么所有的旅游者刚好平均分坐余下的汽车．问原来有车多少辆？这批旅游者共有多少人？

**解**：设原有汽车 $x$ 辆，开走一辆空车后，留下的每车乘 $y$ 人，得方程

$$22x+1=y(x-1),$$

$\therefore\quad y=\frac{22x+1}{x-1}=\frac{22(x-1)+23}{x-1}=22+\frac{23}{x-1}.$

$\because\quad x\geqslant 2,y\leqslant 32,$

又$\because\quad x,y$ 都是正整数，且 $x-1$ 能被 23 整除，

$\therefore\quad x-1=1$，或 $x=1=23,$

$\therefore\quad x=2$，或 $x=24.$

当 $x=2$ 时，$y=45>32$，不合题意，舍去．

当 $x=24$ 时，$y=23,22x+1=529.$

**答**:原有汽车 24 辆,这批旅游者共 529 人.

**例 4** 小华玩套圈游戏,套中小鸡一次得 9 份,套中小猴一次得 5 分,套中小狗一次得 2 分.小华共套了 10 次,每次都套中了,每个小玩具都至少被套中一次.小华套 10 次共得了 61 分.问小鸡至多被套中了多少次?

**解**:设套中小鸡 $x$ 次,套中了小猴 $y$ 次,则套中小狗$(10-x-y)$次,得方程

$$9x+5y+2(10-x-y)=61,$$

$$\therefore\quad x=\frac{41-3y}{7}.$$

使 $x$ 为正整数的 $y$ 的最小值是 2,此时 $x$ 最大 $x=5$.

**答**:小鸡至多被套中了 5 次.

**例 5** 某剧场共有座位 1000 个,排成若干排,总排数大于 16,从第二排起,每排比前一排多一个座位,问剧场共有多少排座位?

**分析**:设剧场共有 $x$ 排座位,要找到总座位数与排数的关系,还必须设第一排有座位 $n$ 个,那么第二排有座位$(n+1)$个,第三排有座位$(n+2)$个,…,第 $x$ 排有座位$(n+x-1)$个,剧场共有座位$\frac{n+(n+x-1)}{2}\cdot x$ 个(想一想,这是怎样得到的?).因为剧场总座位数已知,所以就可以得到有关 $x$ 和 $n$ 的一个方程.

**解**:设剧场共有 $x$ 排座位,第一排有 $n$ 个座位,则第 $x$ 排有座位$(n+x-1)$个,得方程

$$\frac{n+(n+x-1)}{2}\cdot x=1000,$$

变形为 $\quad n=\frac{1000}{x}-\frac{x-1}{2}.$

$\because\quad x,n$ 均为正整数,

$\therefore\quad x$ 是奇数,且 $x$ 是 1000 的正约数.

$\because$　$1000=2^3\times5^3$，

$\therefore$　1000 的正奇约数只有 5,25,125.

$\because$　$x>16$，

$\therefore$　$x=5$ 不合题意.

又当 $x=125$ 时，$n=8-62=-54$，不合题意.

当 $x=25$ 时，$n=28$，符合题意.

**答**：剧场共有 25 排座位.

**例 6**　某市为鼓励节约用水，对自来水的收费标准作如下规定：每月每户用水量不超过 10 吨部分按 0.45 元/吨收费；超过 10 吨而不超过 20 吨部分按 0.80 元/吨收费；超过 20 吨部分按 1.50 元/吨收费. 某月甲户比乙户多缴水费 7.10 元，乙户比丙户多缴水费 3.75 元，问甲、乙、丙该月各缴水费多少（自来水按整吨收费）？

**分析**：注意水费是按段收费的. 由于丙户用水最少，甲户用水最多，因此先要估计出甲、乙、丙各户用水量在什么范围内.

**解**：设丙户用水 $x$ 吨，乙户用水 $(10+y)$ 吨，得方程

$$0.45x+3.75=0.80y+0.45\times10,$$

即
$$9x-16y=15. \qquad ①$$

$\because$　$3\mid9$，$3\mid15$，$3\nmid16$，

又 $\because$　$0<y\leqslant10$，且 $y$ 是整数，

$\therefore$　$y=3,6,9$.

代入检验，$y=3$ 是唯一使 $x$ 是整数的解，

$\therefore$　$x=7$.

再设用户用水 $(20+z)$ 吨，得方程

$$0.80y+0.45\times10+7.10=1.50z+0.45\times10+0.8\times10.$$

即
$$8y-15z=9. \qquad ②$$

将 $y=3$ 代入②，得　$z=1$.

**答**：甲用户缴水费 14 元，乙户缴水费 6.9 元，丙户缴水费 3.15 元.

**说明**：对于不定方程①，当然可以按一般方法求解．这里有条件 $0<y\leqslant10$，故根据系数特征求解，其解法更具灵活性．

**例 7**　象棋比赛共有奇数个选手参加，每位选手都同其他选手比赛一盘，记分办法是胜一盘得 1 分，和一盘各得 0.5 分，负一盘得 0 分．已知其中两名选手共得 8 分，其他人的平均分数为整数，问参加这次比赛的选手共有多少人？

**分析**：设共有 $(n+2)$ 名选手．由于每一名选手都要与其余 $(n+1)$ 人赛一盘，共赛 $(n+2)(n+1)$ 盘．但甲跟乙赛与乙跟甲赛计算了两次，故共赛 $\frac{1}{2}(n+2)(n+1)$ 盘．

**解**：设有选手 $(n+2)$ 人，除 2 人得 8 分外，其余 $n$ 个人平均每人得 $k$ 分．

∵　每人都需与其他人赛一盘，

∴　共赛 $\frac{1}{2}(n+2)(n+1)$ 盘．

∵　每赛一盘得 1 分，

∴　$\frac{1}{2}(n+2)(n+2)=8+nk.$

即　$n(n-2k+3)=14.$

∵　$n$ 为奇数，$k$ 为整数，

∴　$n=1$ 或 $n=7.$

若 $n=1$，则 $k<0$，这不可能．

∴　$n=7, n+2=9.$

**答**：故有 9 名选手参加比赛．

不定方程组在我国的研究已延续数千年，古代流传至今的诸如“秦王暗点兵”、“物不知其数”、“百钱买百鸡”、“搬砖”等题目和解法都是十分有趣的．

**例 8**　今有 36 块砖 36 人搬，男搬 4 块，女搬 3 块，两个小孩抬一块．问男、女、小孩各有多少人？

**解**：设男、女、小孩分别有 $x,y,z$ 人，得方程组

$$\begin{cases}x+y+z=36, & ①\\ 4x+3y+\frac{1}{2}z=36. & ②\end{cases}$$

由②得　$8x+6y+z=72.$　③

由③－①得　$7x+5y=36.$

$\therefore$　$x=\frac{36-5y}{7}=5+\frac{1-5y}{7}.$

$\because$　$0<x<9, 0<y<12$,(为什么?)

又$\because$　$x, y$ 是正整数,

$\therefore$　$x=3, y=3.$

代入①,得　$z=30.$

**答**:有男 3 人,女 3 人,小孩 30 人.

**例 9**　鸡翁一,值钱五;鸡母一,值钱三;鸡雏三,值钱一,百钱买百鸡,问鸡翁、鸡母、鸡雏各几何?

**解**:设鸡翁 $x$ 只,鸡母 $y$ 只,鸡雏 $z$ 只,得方程

$$\begin{cases}5x+3y+\frac{z}{3}=100,\\ x+y+z=100.\end{cases}$$

即
$$\begin{cases}15x+9y+z=300, & ①\\ x+y+z=100. & ②\end{cases}$$

①－②,得　$7x+4y=100.$

$\therefore$　$y=25-\frac{7x}{4}.$

$\because$　$x, y$ 都是整数,且$(7,4)=1$,

$\therefore$　$x$ 必为 4 的倍数,不妨取 $x=4$,则 $y=18.$

$\therefore$　不定方程 $7x+4y=100$ 的整数解为

$$\begin{cases}x=4+4k,\\ y=18-7k\end{cases}(k\text{ 是整数}).$$

代入②,得　$z=78+3k.$

$\therefore$　原不定方程组的解为

$$\begin{cases} x=4+4k, \\ y=18-7k, \quad (k\text{ 是整数}). \\ z=78+3k \end{cases}$$

$\because$ $x,y,z$ 都是非负整数，

$\therefore$ $k=-1,0,1,2$.

因此有四种情况：

$$\begin{cases} k_1=-1, \\ x_1=0, \\ y_1=25, \\ z_1=75; \end{cases} \quad \begin{cases} k_2=0, \\ x_2=4, \\ y_2=18, \\ z_2=78; \end{cases} \quad \begin{cases} k_3=1, \\ x_3=8, \\ y_3=11, \\ z_3=81; \end{cases} \quad \begin{cases} k_4=3, \\ x_4=12, \\ y_4=4, \\ z_4=84. \end{cases}$$

**例** 10　今有物不知其数，三三数之剩二，五五数之剩三，七七数之剩二，问物几何？

**解**：设所求数是 $x$，$x$ 被 3 除所得的商是 $y$，被 5 除所得的商是 $z$，被 7 除所得的商是 $u$，得方程组

$$\begin{cases} x=3y+2, & ① \\ x=5z+3, & ② \\ x=7u+2. & ③ \end{cases}$$

$x,y,z,u$ 都是正整数．

消去 $x$，得 $\begin{cases} 5z-3y=-1, & ④ \\ 5z-7u=-1. & ⑤ \end{cases}$

消去 $z$，得　$7u-3y=0$.

其整数解是 $\begin{cases} y=7t, & ⑥ \\ u=3t & ⑦ \end{cases}$　($t$ 是整数)

代入④，得　$5z-21t=-1$.

其整数解是 $\begin{cases} z=4+21t_1, \\ t=1+5t_1 \end{cases}$　($t_1$ 是整数)

代入②⑥⑦，得

$$\begin{cases} x=23+105t_1, \\ y=7+35t_1, \\ z=4+21t_1, \\ u=3+15t_1 \end{cases} \quad (t_1\text{ 为整数}).$$

由于 $x>0$，故当 $t_1=0,1,2,\cdots$，可得到满足条件的 $x$，它的最小值是 23.

## 习题 3.4

### A　组

1. 一数在 100 以内，它被 2 除余 1，被 3 除余 2，被 5 除余 3. 求此数.

2. 100 匹马驮 100 块瓦，大马驮三块，中马驮两块，小马驮半块. 问大马、中马、小马各有多少匹？

3. 大汽车能容纳 54 人，小汽车能容纳 36 人，现有 378 人，问大、小汽车各要几辆才能使座位不多不少？

4. 甲、乙、丙三人共解出 100 道数学题，每人都解出了其中的 60 道题，将其中只有 1 人解出的题叫做难题，3 人都解出的题叫做容易题. 试问：难题多还是容易题多？多几道题？

### B　组

1. 上午，张老师出了 6 道课外习题，下午，小王、小刘、小张、小左和小李 5 位同学将自己做的作业交张老师检查，张老师问他们都做了没有，调皮的小王忙做了个鬼脸说："小刘做得最多，除我以外，小张第二，小左第三，小李第四，至于我嘛，不是最多，也不是最少，他们所做题数的倒数之和就是我做的题数，请张老师猜猜我们各做了几道题."张老师沉思片刻，很快就答出来了，你能说出他们各做几道题吗？

2. 甲、乙、丙三个分糖块，分法如下：先在三张纸片上各写

三个正整数 $p,q,r$,使 $p<q<r$,分糖时,每人抽一张纸片,然后把纸片上的数减去 $p$,就是他这一轮分得糖块数,经过若干轮这种分法后,甲总共得到 20 块糖,乙得到 10 块糖,丙得到 9 块糖,又知最后一次乙拿到的纸片上写的数是 $r$,而丙在各轮中拿到的纸片上写的数字和是 18,问:$p,q,r$ 分别是哪三个正整数? 为什么?

# §3.5　竞赛题选讲

**例 1**　方程 $4x+5y=98$ 的正整数解的个数是(　)

(A)4　(B)5　(C)6　(D)无穷多

**解**：由 $4x+5y=98$ 知 $y$ 是偶数，且 $y\leqslant 19$，$\therefore y$ 的可能值是 2,4,6,8,10,12,14,16,18.

又$\because$当 $y$ 是 4 的倍数，等式左边是 4 的倍数，而等式右边 98 不是 4 的倍数，

$\therefore y$ 是 $4k+2$ 型的偶数．

此时，$y=2,6,10,14,18$.

逐一检验，对应的 $x$ 都是正整数，因此方程 $4x+5y=98$ 的正整数解有 5 组，选(B).

**例 2**　使得方程 $kx-12=3k$ 有一个整数解 $x$ 的正整数 $k$ 的个数是(　)

(A)3　(B)4　(C)5　(D)6

**解**：由 $kx=12+3k$ 可知 $x=\frac{12}{k}+3$，此式为整数当且仅当 $k$ 是 12 的约数，因为 $k>0$，所以 $k$ 只能是 1,2,3,4,6 或 12 中的一个，故选(D).

**例 3**　方程 $(x+1)^2+(y-2)^2=1$ 的整数解有(　)

(A)1 组　(B)2 组　(C)4 组　(D)无数组

**解**：$\because (x+1)^2+(y-2)^2=1$，且 $x,y$ 均为整数，

$$\therefore \begin{cases}(x+1)^2=0,\\(y-2)^2=1,\end{cases} \text{或} \begin{cases}(x+1)^2=1;\\(y-2)^2=0.\end{cases}$$

解得 $\begin{cases}x_1=-1,\\y_1=3;\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=-1,\\y_2=1;\end{cases}$ $\begin{cases}x_3=0,\\y_3=2;\end{cases}$ $\begin{cases}x_4=-2,\\y_4=2.\end{cases}$

共计四组解，选(C).

**例 4**　若正整数 $x,y$ 满足 $x^2+72=y^2$，则这样的正整数对

$(x,y)$个数是(　)

(A)1 个　(B)2 个　(C)3 个　(D)4 个

**解**:$(y+x)(y-x)=72=1\times72=2\times36=4\times18=6\times12=8\times9$.

$\because$ $y+x$ 与 $y-x$ 奇偶性相同,

$\therefore$ $\begin{cases}y+x=36,\\y-x=2;\end{cases}$ 或 $\begin{cases}y+x=18.\\y-x=4;\end{cases}$ 或 $\begin{cases}y+x=12.\\y-x=6.\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x_1=17,\\y_1=19;\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=7,\\y_2=11;\end{cases}$ $\begin{cases}x_3=3.\\y_3=9.\end{cases}$

共计三组解,选(C).

**例 5**　不定方程$\frac{4}{m}+\frac{2}{n}=1$的正整数解$(m,n)$的个数是(　)

(A)1　(B)2　(C)3　(D)4

**解**:$\because \frac{4}{m}+\frac{2}{n}=1$,

$\therefore (m-4)(n-2)=8=1\times8=2\times4$,

$\therefore \begin{cases}m-4=1,\\n-2=8;\end{cases}$ 或 $\begin{cases}m-4=8,\\n-2=1;\end{cases}$

或 $\begin{cases}m-4=2,\\n-2=4;\end{cases}$ 或 $\begin{cases}m-4=4,\\n-2=2.\end{cases}$

解得 $\begin{cases}m_1=5,\\n_1=10;\end{cases}$ $\begin{cases}m_2=12,\\n_2=3;\end{cases}$ $\begin{cases}m_3=6,\\n_3=6;\end{cases}$ $\begin{cases}m_4=8,\\n_4=4.\end{cases}$

共计四组解,选(D).

**例 6**　方程$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{336}$的整数$(x,y)$的组数是(　)

(A)2　(B)3　(C)4　(D)5

**解**:$x,y$ 均应为正整数,且$\sqrt{x}$、$\sqrt{y}$化简后应与$\sqrt{336}$化简后的$4\sqrt{21}$是同类根式,由此可设 $x=m\sqrt{21}$,$y=n\sqrt{21}$,其中 $m,n$ 是非负整数,则

$m\sqrt{21}+n\sqrt{21}=4\sqrt{21}$,

$\therefore m+n=4$.

$\therefore(m,n)$的取值为$(0,4),(1,3),(2,2),(3,1),(4,0)$,

$\therefore(x,y)$的取值为$(0,336),(21,189),(84,84),(189,21)$,$(336,0)$,共 5 组解,选(D).

**例 7**　满足联立方程

$$\begin{cases}ab+bc=44, & ① \\ ac+bc=23 & ②\end{cases}$$

的正整数解$(a,b,c)$的组数是(　)

(A)0　　(B)1　　(C)2　　(D)3

**解**:由②得　$c(a+b)=23$. $\because 23$是质数,

$\therefore$这两个数因子必须是 1 和 23.

又$\because a+b>1$,

$\therefore c=1, a+b=23$.

将$c=1, b=23-a$代入①,得

$a^2-22a+21=0$.

解得　$a_1=1, a_2=21$.

从而得到满足联立方程的正整数解是$(1,22,1),(21,2,1)$,故选(C).

**例 8**　某旅馆的一座楼每层都有 10 套房间,房间自第一层开始依次编号为 1,2,…,10,并逐层依次继续编下去(第二层的房号为 11,12,…,20,如此等等). 现知小荣和小刚都住在该楼内,小荣的层号刚好等于小刚的房号,而他们的房号之和等于 239,试求小荣的房号.

**解**:设小荣的层号是 $a$,那么他的房号必然是 $10(a-1)+b$ 的形式,其中 $1\leqslant b\leqslant 10$,并且小刚的房号就是 $a$. 于是有

$10(a-1)+b+a=239$,

即　$249-b=11a$,

$\therefore 11\mid(249-b)$.

$\because 1\leqslant b\leqslant 10$,

$\therefore 249-b=242$,

$\therefore b=7, a=22$.

故小荣的房号是 217.

**例 9** 求出所有边长为整数，且面积(的数值)等于周长的直角三角形.

**解**:设这个直角三角形三边之长分别是正整数 $x,y,z$ 且 $x\leqslant y<z$,则

$$\begin{cases} x^2+y^2=z^2, \\ x+y+z=\frac{1}{2}xy. \end{cases}$$

消去 $z$ 得 $x^2+y^2=(\frac{1}{2}xy-x-y)^2$,

即 $(x-4)(y-4)=8$.

$\therefore \quad (x-4)\mid 8, (y-4)\mid 8$.

当 $x<4$ 时，只能有 $x=2$ 或 $x=3$，相应的 $y$ 为 0 或 $-4$，均不可能，从而 $x-4>0$，又 $x-4\leqslant y-4$，这样 $x-4$ 只能为 1 或 2，求得 $x=5$ 或 6，相应的 $y$ 为 12 或 8，于是全部解是 $(x,y,z)=(5,12,13),(6,8,10)$.

**例 10** 求方程 $x+y=x^2-xy+y^2$ 的全部整数解.

**解法** 1:将原方程看作 $x$ 的一元二次方程，变形为

$$x^2-(y+1)x+y^2-y=0$$

先求它有实数解的条件，得

$$(y+1)^2-4(y^2-y)\geqslant 0$$

解得 $\quad 1-\frac{2\sqrt{3}}{3}\leqslant y\leqslant 1+\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

在上述范围内，整数 $y$ 只可能是 0,1,2. 逐一代入原方程可求出其全部整数解是 $(x,y)=(0,0),(1,0),(0,1),(2,1)(1,2),(2,2)$ 共六组.

**解法** 2:原方程可化为

$(x-y)^2+(x-1)^2+(y-1)^2=2$.

故原方程的整数解$(x,y)$分别是$(0,0)$,$(2,2)$,$(1,0)$,$(0,1)$,$(2,1)(1,2)$.

**例** 11　求方程 $x^6+3x^3+1=y^4$ 的整数解.

**解**:当 $x>0$ 时,

$$\begin{aligned}(x^3+1)^2 &= x^6+2x^3+1 < x^6+3x^3+1 \\ &= y^4 < x^6+4x^3+4 = (x^3+2)^2,\end{aligned}$$

∴　$x^3+1<y^2<x^3+2$ 这与 $y$ 为整数矛盾.

当 $x\leqslant -2$ 时,

$$\begin{aligned}(x^3+2)^2 &= x^6+4x^3+4 < x^6+2x^3+1 \\ &= y^4 < x^6+2x^3+1 = (x^3+1)^2,\end{aligned}$$

$$-(x^3+2)=|x^3+2|<y^2<|x^3+1|=-(x^3+1),$$

与 $y$ 为整数矛盾.

∴　$-2<x\leqslant 0$.

当 $x=-1$ 时,$y^4=-1$,无解.

当 $x=0$ 时,$y^4=1$,所以 $y=\pm 1$.

故所有的整数解为$(x,y)=(0,1),(0,-1)$.

**说明**:对于某些方程,我们将它放在实数范围内来考虑,有时能够估计出方程的实数解的(有限)范围.因一个有限范围内的整数至多有有限个,过渡到整数(我们关心的是方程的整数解),就能够对可能的情况逐一检验,以确定方程的解的情况,不仅判明了方程有、无解,也能求出(如果仅有有限组的话)全部解.这就是估计方法的大意,其实质说是估计方程整数解的界.

**例** 12　证明:方程组$\begin{cases}x^2+y+1=z_1{}^2,\\ y^2+4x+3=z_2^2\end{cases}$没有正整数解.

**证明**:当 $x\geqslant y$ 时,

$$x^2<x^2+y+1\leqslant x^2+x+1\leqslant (x+1)^2,$$

这与 $x^2+y+1=z_1^2$ 矛盾.

当 $x<y$ 时，

$$y^2<y^2+4x+3<y^2+4y+3<(y+2)^2,$$

$$\therefore\quad y^2+4x+3=(y+1)^2$$

即 $y=2x+1$ 时，$y^2+4x+3$ 是完全平方数，但此时 $y^2+y+1$ 不是完全平方数．

故原方程没有正整数解．

**说明**：在两个连续正整数的 $k$ 次幂之间没有正整数的 $k$ 次幂，这一简单的性质也是不定方程中常常用到的．

**例** 13　试求方程 $\sqrt{x-1}+2\sqrt{y-4}+3\sqrt{z-9}=\frac{1}{2}(x+y+z)$ 的整数解．

**解**：令 $u=\sqrt{x-1}, v=\sqrt{y-4}, w=\sqrt{z-9}$ 代入原方程得

$$2(u+2v+3w)=u^2+1+v^2+4+w^2+9,$$

移项，配方，得

$$(u-1)^2+(v-2)^2+(w-3)^2=0.$$

解得　$u=1, v=2, w=3$.

故原方程有整数解 $(x,y,z)=(2,8,18)$.

**例** 14　求证：方程 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{1977}$ 无正整数解．

**证明**：注意到 $1997=3\times659$ 是两个质数的乘积，因此讨论原方程的一般形式.

$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{pq}$，①其中 $p,q$ 是两个不同质数，将①式两边平方，得：

$$x+y+2\sqrt{xy}=pq,$$

$$\begin{aligned}\therefore (pq-x+y)^2&=4(y+\sqrt{xy})^2\\&=4[\sqrt{y}(\sqrt{x}+\sqrt{y})]^2\\&=4ypq.\end{aligned}$$

这样 $ypq$ 必是平方数，由于 $p,q$ 是不同的质数，由此 $y=k^2pq$，其中 $k$ 是非负整数，若 $k>1$，则 $\sqrt{y}>\sqrt{pq}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$，矛

盾，若 $k=1$，则有 $y=pq$，因此 $x=0$；若 $k=0$，则 $y=0$，$x=pq$，它们都不是正整数解．

故方程 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{1977}$ 无正整数解．

**例** 15　求方程 $\dfrac{xy}{x^2-xy+y^2}=\dfrac{3}{7}$ 的所有正整数解．

解法 1：原方程可化为

$$7(x+y)=3[(x-y)^2+xy], \quad ①$$

令 $x+y=p$，$x-y=q$，即 $x=\dfrac{1}{2}(p+q)$，$y=\dfrac{1}{2}(p-q)$，代入①得

$$28p=3(p^2+3q^2). \quad ②$$

∴　$3|p$. 设“$p=3k$”代入②化简得

$$28k=3(3k^2+q^2). \quad ③$$

又有 $3|k$，设 $k=3m$，代入③得

$$28m=27m^2+q^2,$$

即　$m(28-27m)2=q^2>0$.

∴　$m$ 只能取值 1. 此时 $p=q$，$q=1$ 或 $-1$.

解得　$(x,y)=(5,4),(4,5)$.

**解法** 2：原方程可化为

$$3x^2-(3y+7)x+3y^2-7y=0.$$

因为 $x$ 是整数，故原方程应有实数根．

∴　$\Delta=(3y+7)^2-4\times3\times(3y^2-7y)\geqslant0$,

解得　$\dfrac{21-14\sqrt{3}}{9}\leqslant y\leqslant\dfrac{21+14\sqrt{3}}{9}$

由于 $y$ 是整数，可得 $y=0$、1、2、3、4、5. 逐一代入方程计算，仅当 $y=4,5$ 时，原方程有整数解．

故 $(x,y)=(5,4),(4,5)$.

**例** 16　确定不定方程 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{1989}$ 的正整数解有多少组？

**解**：此题若用去分母的办法，虽要得 $1989(x+y)=xy$，但仍难以入手，如果分析一下题意可知，其解必满足 $x>1989$，

$y>1989$.

于是可令 $x=1989+r, y=1989+s$,其中 $r,s$ 为正整数,求出了 $r,s$ 也就求出了 $x,y$. 将 $x,y$ 的上述表示代入原方程,去分母化简后可得　$1989^2=rs$.

显然,满足此方程的 $r,s$ 的组数与原方程的正整数解的组数是一样的.

$\because$　$1989^2=3^4\times17^2\times13^2$,

$\therefore$　$r$ 可取 $(4+1)(2+1)(2+1)=45$ 个值.

$r$ 取定后,与之配对的 $s$ 也就确定了.

故原方程共有 45 组正整数解.

**练一练**

将 1989 换成任一个正整数 $n$ 后,用上法求不定方程

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{n} \qquad ①$$

的正整数解的组数.

答案:令 $x=n+r, y=n+s$,用上法可得 $n^2=rs$. 设 $n$ 的质因数分解式为

$n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$,

其中 $p_1,p_2,\cdots,p_k$ 是互不相同的质数,则方程的正整数解共有

$$(2\alpha_1+1)(2\alpha_2+1)\cdot\cdots\cdot(2\alpha_k+1)\text{组}.$$

## §3.6　水平测试题三

1. 方程$|x|+|y|-3=0$不同的整数解共有(　　)组

(A)16　(B)14　(C)12　(D)10

2. $|a-b|+ab=1$的非负整数对$(a,b)$的个数是(　　)

(A)1　(B)2　(C)3　(D)4

3. 已知 $n$ 是偶数，$m$ 是奇数，方程$\begin{cases}x-1988y=n,\\11x+27y=m\end{cases}$的解$\begin{cases}x=p,\\y=q\end{cases}$是整数，则(　　)

(A)$p,q$ 都是偶数

(B)$p,q$ 都是奇数

(C)$p$ 是偶数，$q$ 是奇数

(D)$p$ 是奇数，$q$ 是偶数．

4. 求 $5x+8y+19z=50$ 的整数解．

5. 求$\begin{cases}5x+7y+9z=52,\\3x+5y+7z=36\end{cases}$的正整数解．

6. 某校在向“希望工程”捐款的活动中，甲班的 $m$ 个男生和 11 个女生捐款总数与乙班的 9 个男生和 $n$ 个女生捐款总数相等，都是$(mn+9m+11n+145)$元，已知每 人的捐款数相同，且都是整数元，求每人的捐款数．

7. 一队一千人以上的士兵，排成每行 3 人余 1 人，每行 5 人余 2 人，每行 7 人余 6 人，问这队士兵至少有多少人？

8. 证明：(3,4,5)是不定方程 $x^2+y^2=z^2$ 的唯一一组连续正整数解．

9. $x,y,z$ 和 $n$ 都是正整数，解方程 $n^x+n^y=n^z$．

10. 求所有的正整数 $x$，使$(x-36)(x-144)-1991$是完全平方数．

# 习题提示及参考答案

## 习题 1.1

### A 组

1. D.

2. B.

**提示**：$\because \overline{ab}=k(a+b)$，

$\therefore 10a+b=k(a+b)$，

$\therefore \overline{ba}=10b+a=11(b+a)-(10a+b)=(11-k)\cdot(a+b)$.

3. 由 $10y+x=(10x+y)+9$，得 $x+1=y$，故所求的数为 12，23，34，45，56，67，78，89 为共八个．

4. 由 $3(x+y)+\overline{xy}=\overline{yx}$，得 $y=2x$，故所求的数为 12，24，36，48 共四个．

5. $\because \quad ab(10a+b)=100b+10b+b$，

$\therefore \quad a(10a+b)=37\times 3$，

$\therefore \quad a=3, b=7, \overline{ab}=37$.

6. 设 $n=10m+6$，$m$ 为 $k-1$ 位整数，则 $6\times 10^{k-1}+m=4(10m+6)$，于是最小的 $n=153846$.

7. 由题意，$C=1000B+A$，$D=100A+B$

又 $A=3B$，

$\therefore \quad 1000B+3B-(100\times 3B+B)=40014$，

$\therefore \quad B=57$，$\therefore A=171$，$D=17157$.

故 $D^A=17157^{171}$ 的末位数字，即 $7^{4\times 42+3}$ 的末位数字，亦即 $7^3$ 的末位数字 3.

8. 因 $100x+10y+z=(10a+b)^2=100a^2+10\cdot 2ab+b^2$，$100z+10y+x=(10b+a)^2=100b^2+10\cdot 2ab+a^2$，故可判定三

位数各个数位上的数字是：$a^2, 2ab, b^2$；$b^2, 2ab, a^2$. 易 知 $a^2 < 10, b^2 < 10, 2ab < 10$，故有 $a \leqslant 3, b \leqslant 3, ab < 5$. 不妨令 $a < b$，符合上述条件的 $a, b$ 只能在 1、2、3 之间选择．但 $2 \times 3 > 5$，故 $a = 1$ 时，$b = 2$；或 $a = 1$ 时，$b = 3$. 答案有两种：$12^2 = 144, 21^2 = 441$；$13^2 = 169, 31^2 = 961$.

## B 组

1. C.

**提示**：因为 $9 \cdot a \cdot b$ 积的各位数字之和与 $\frac{9 \cdot a \cdot b}{10}$ 的商的各位数字之和相等，

$$而\frac{9 \cdot a \cdot b}{10} = \frac{9}{10} \times \left[\frac{8}{9}(10^{1985} - 1)\right] \times \left[\frac{5}{9}(10^{1985} - 1)\right]$$

$$= \frac{4}{9}(10^{2 \times 1985} - 1) - \frac{8}{9}(10^{1985} - 1)$$

$$= \underbrace{44 \cdots 44}_{2 \times 1985个} - \underbrace{88 \cdots 88}_{1985个}$$

$$= \underbrace{44 \cdots 44}_{1984个}3\,\underbrace{55 \cdots 55}_{1984个}6,$$

所以该数各位数字之和为 $1984 \times (4 + 5) + (3 + 6) = 1985 \times 9 = 17865$.

2. 把个位上的 1 错当作 7 多加 6；把另一个加数十位上的 8 错当作 3，少加了 $80 - 30 = 50$，故原来两数相加的正确答案是 $1946 - 6 + 50 = 1990$.

3. (1) $\overline{abc} = 100a + 10b + c, \overline{cba} = 100c + 10b + a$.

卡车行驶的路程是 $(100c + 10b + a) - (100a + 10b + c) = 99c - 99a$.

又 $99(c - a) = 55n$，即 $9(c - a) = 5n$.

等式左边必须包含 5 的因数，右边必须包含 9 的因数. 也就是说，$c - a$ 应是 5 的倍数，$n$ 应是 9 的倍数. 因为 $c$ 和 $a$ 都小于

10，因此 $c-a=5$，故汽车行驶了 9 小时．

(2)由于 $a+b+c$ 不超过 7，得 $c=6,a=1,b=0$，所以卡车出 发时，里程表上是 106，到达目地时，里程表上是 601.

4. 设所求三位数是$\overline{abc}$，则$\frac{\overline{abc}}{11}=a^2+b^2+c^2$，

$\therefore\quad 100a+10b+c=11a^2+11b^2+11c^2$，

$\therefore\quad 100a-11a^2=11b^2+11c^2-10b-c$，

$\therefore\quad a(100-11a)=b(11b-10)+c(11c-1)$.

根据讨论 $a,b,c$ 的取值，其中 $a$ 不能是 9，$b,c$ 取较小的数，经试验得$\overline{abc}=803$ 或 550.

5. 设 $N=\overline{abcde}$.

由题意，得 $111\times12\times(a+b+c+d+e)=\overline{abcde}$，

$\therefore\quad 111\times12\mid\overline{abcde}$. 又 $9\mid111\times12$，

$\therefore\quad 9\mid\overline{abcde},9\mid a+b+c+d+e$.

设 $a+b+c+d+e=9k$（$k$ 是正整数），则$\overline{abcde}=11988k$.

又 $9k=a+b+c+d+e\leqslant45$，$\therefore k\leqslant5$.

注意到 $N$ 是由 5 个不同的非零数字组成的 5 位数，且 $a+b+c+d+e=9k$ 知只有 $k=3$ 符 合要求，$N=35964$.

6. 设 $n$ 位正整数为 $N=\overline{a_1a_2\cdots a_n}$，则 $N=a_1\cdot10^{n-1}+a_2\cdot10^{n-2}+\cdots+a_{n-1}\cdot10+a_n$，其中 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是 $N$ 各位上的数字．

若 $N$ 是“幸运数”，则

$$a_1\cdot10^{n-1}+a_2\cdot10^{n-2}+\cdots+a_{n-1}\cdot10+a_n=(a_1+a_2+a_n)+a_1\times a_2\times\cdots\times a_n,$$

整理得 $a_1\cdot(10^{n-1}-1)+a_2\cdot(10^{n-2}-1)+\cdots+a_{n-1}(10-1)=a_1\times a_2\times\cdots\times a_n$，即

$$a_1(\underbrace{99\cdots9}_{n-1\text{个}9}-a_2\times a_3\times\cdots\times a_n)+A=0 \quad ①,$$

其中 $A=a_2(10^{n-2}-1)+\cdots+a_{n-1}(10-1)$是非负数．

当 $n\geqslant 3$ 时，$\underbrace{99\cdots 9}_{n-1\text{个}9}>9^{n-1}\geqslant a_2\times a_3\times\cdots\times a_n$，故①式不成立，因此没有 3 位和 3 位以上的"幸运数".

当 $n=2$ 时，由①式得，$a_1(9-a_2)=0$.

$\because\quad a_1\neq 0$，$\therefore\quad 9-a_2=0$，

$\therefore\quad a_2=9$.

因此，末位数字是 9 的两位数是"幸运数"，它们是 19，29，39，49，59，69，79，89，99，其和为 531.

可以验证一位数都不是"幸运数"

## 习题 1.2

### A 组

1. $\because 5\mid(x+9y)$，$5\mid 5(2x+5y)$，且 $8x+7y=5(2x+5y)-2(x+9y)$，

$\therefore 5\mid(8x+7y)$.

2. $\because x+2y=(4x-y)-3(x-y)$，

而 $3\mid(4x+2y)$，

$\therefore\quad 3\mid(x+2y)$.

$\because\quad 4x^2+7xy-2y^2=(x+2y)(4x-y)$，

$\therefore\quad 9\mid(4x^2+7xy-2y^2)$.

3. 因 $2\mid a(a+1)$，由 $a=3k,3k\pm 1$，得

$6\mid[a(a+1)(2a+1)]$.

4. 若 $n\mid m$，　则 $n\mid b,n\mid d$，

$\therefore n\mid(ad-bc)$.

若 $n\nmid m$，$(ma-b)d-(mc-d)b=m(ad-bc)$，得

$n\mid m(ad-bc)$，$n\mid(ad-bc)$.

5. $\because\quad mq+np=(mn+pq)-(m-p)(n-q)$，

而 $(m-p)\mid(mn+pq)$，

$\therefore (m-p)\mid(mq+np)$.

## B 组

1. 由 $7^{83}+8^{163}=7(7^{82}+8^{161})+57\times 8^{161}$ 及 $57\mid(7^{82}+8^{161})$ 得 $57\mid(7^{83}+8^{163})$.

2. $\because$ $\overline{abcdef}=\overline{abc}\times 999+(\overline{abc}+\overline{def})$,

且 $37\mid 999$, $37\mid(\overline{abc}+\overline{def})$,

$\therefore$ $37\mid\overline{abcdef}$.

3. 由 $5\mid\overline{bcd}$,得 $d=5$. 由 $11\mid\overline{def}$,得 $11\mid(d+f-e)$.

$\because$ $3\leqslant d+f\leqslant 11$, $1\leqslant e\leqslant 6$, $\therefore -3\leqslant d+f-e\leqslant 10$, $\therefore d+f-e=0$, $\therefore$ $5+f=e$. 又 $e\leqslant 6$, $f\geqslant 1$, $\therefore f=1$, $e=6$. 由 $3\mid\overline{cde}$,得 $3\mid(c+5)$. 由 $4\mid\overline{abc}$,得 $c$ 为偶数 . $\therefore c=4$,从而 $a=3$, $b=2$.

$\overline{abcdef}=324561$.

4. 若 $a,b$ 中至少有一个为偶数,则 $2\mid ab$;否则 $2\mid c$,从而 $2\mid abc$.

若 $a,c$ 中至少有一个为 3 的倍数,则 $3\mid ac$;否则 $3\mid b^2$ ($b^2=(c+a)(c-a)$).

$\because 3$ 为质数, $\therefore 3\mid b$, $\therefore 3\mid abc$.

若 $a,b,c$ 中任何一个不能被 5 整除,则 $a^2+b^2$ 被 5 除的余数为 0,2,3;$c^2$ 被 5 除的余数为 1,4,这不可能,故 $a,b,c$ 中至少有一个能被 5 整除,$\therefore 5\mid abc$.

$\because 2,3,5$ 两两互质,$\therefore 30\mid abc$.

5. 因要求$\overline{ab}$是 2 的倍数,$\overline{abcd}$是 4 的倍数,$\overline{abcdef}$是 6 的倍数,所 以第二位数字 $b$、第四位数字 $d$、第六位数字 $f$ 必须在偶数 2、4、6 中选取,所以 $a,c,e$ 只能取奇数 1、3、5. 因需求$\overline{abcde}$是 5 的倍数,所以第五位数字 $e$ 必须取 5. 因此第一位数字 $a$ 与第三位数字 $c$ 只能取 1 或 3,此时有 $a+c=4$. 因为$\overline{abc}$是 3 的倍数,必 须且只须 $a+b+c$ 是 3 的倍数,由于 $a+c=4$,由试验可知,$b$ 只能取 2. 此时,所求的六位数只能从如下几个数中选择:

123456，123654，321456，321654.

经试验检查可知：123456 与 321456 不满足$\overline{abcd}$是 4 的倍数的要求，只有 123654 与 321654 是满足题目要求的六位数.

6. 设安德列 12 岁生日时，瓦西里 $x$ 岁，则谢尔盖为$(12-x)$岁，于是列表如下：

| | 安德列 | 瓦西里 | 谢尔盖 |
|---|---|---|---|
| 安德列 12 岁生日时 | 12 | $x$ | $12-x$ |
| 瓦西里 12 岁生日时 | $24-x$ | 12 | $24-2x$ |
| 谢尔盖 12 岁生日时 | $12+x$ | $2x$ | 12 |

第一行各数分别加上 $12-x$ 便得到第二行各数；而第一行各数分别加上 $x$ 便得到第三行各数，当瓦西里 12 岁生日时，安德列与谢尔盖年龄之和为 $48-3x$，因此 $3x$ 被 12 整除. 而谢尔盖 12 岁生日时，安德列与瓦西里年龄之和为 $12+3x$，因而该数也被 12 整除，所以这时三兄弟年龄之和也被 12 整除.

## 习题 1.3

### A 组

1. 在 $1^2,2^2\cdots10^2$ 中，十位数为奇数的只有 $4^2=16,6^2=36$. 在 $11^2,12^2,\cdots,95^2$ 中，由$(10a+b)^2=100a^2+20ab+b^2$，十位数为奇数的 $b$ 只能是 4 与 6，故共有 19 个奇数.

2. $x$ 与 $1+2+\cdots+9=45$ 奇偶性相同，即 $x$ 为奇数，又 $1+(2-3-4+5)+(6-7-8+9)=1$，所以非负数 $x$ 的最小值是 1.

3. 偶数.

**提示**：若 $ab$ 为奇数，则 $a,b$ 均为奇数，这时 $a^2+b^2$ 是 2 的倍数但不是 4 的倍数，由 $d-c$ 和 $d+c$ 奇偶性相同，$d^2-c^2=(d-c)(d+c)$是 4 的倍数，这不可能.

4. 偶数.

**提示**:奇数的 $n$ 次方为奇数,偶数的 $n$ 次方为偶数.

5. A.

**提示**;因 $2n$ 是偶数,所以 $3n^2+7$ 必是偶数,当且仅当 $n$ 是奇数时 $3n^2+7$ 才是偶数.

6. B.

**提示**:$x=(1-a_1)(2-a_2)\cdots(9-a_9)$,在 $1,2,\cdots,9$ 中有 4 个偶数 5 个奇数,所以差 $1-a_1,2-a_2,\cdots 9-a_9$ 中一定有一个是两个奇数之差,故 $x$ 是偶数.

7. 按要求,共翻 了 $1+2+\cdots+10=55$ 次,是奇数;另一方面,硬币朝向相反,则要翻动奇数次,10 个奇数和是偶数,它不可能等于 55,故结论是否定的.

8. $\because a+b+c+d$ 是奇数,

$\therefore a,b,c,d$ 中有一个奇数和三个偶数,或 $a,b,c,d$ 中有三个奇数和一个偶数.

不妨设 $a=2a_1+1,b=2b_1,b=2c_1,d=2d_1$,则 $a^2+b^2+c^2+d^2=(2a_1+1)^2+4b_1{}^2+4c_1^2+4d_1{}^2=4(a_1{}^2+a_1+b_1{}^2+c_1{}^2+d_1{}^2)+1$ 是奇数.

当 $a,b,c,d$ 中有三个奇数和一个偶数,同理可证 $a^2+b^2+c^2+d^2$ 是奇数.

9. 由于 $x_1+2x_2+3x_3+\cdots+10x_{10}$ 的奇偶性与 $1+2+3+\cdots+10=55$ 的奇偶性相同,故它不能等于偶数.

## B 组

1. 由 $a+b-c=(a+b+c)-2c$ 知,$a+b+c$ 是偶数时,$a+b-c$ 也是偶数.其他同理可证.

2. 假设存在正整数 $m$,使 $1+2+\cdots+m=1024$ 即 $(1+m)m=2^{11}$,由此推出矛盾,因此这样的正整数 $m$ 是不存在的.

3. 由第一个等式得 $a(bcd-1)=2003$,因为 2003 是奇数,

则 $a$ 是奇数，同时由第二、三、四等式可得 $b,c,d$ 是奇数，再把 $a,b,c,d$ 是奇数的结论用到第一个等式，显然左边为偶数，右边为奇数，这不可能．

4. 设 $a=n,b=n+1$（$n$ 为整数），则 $c=n(n+1)$.

$\therefore M^2=a^2+b^2+c^2=n^2+(n+1)^2+n^2(n+1)^2$.

$\because n(n+1)$是偶数，

$\therefore n^2(n+1)^2$ 是偶数．

又$\because n^2+(n+1)^2$ 是奇数，

$\therefore M^2=n^2+(n+1)^2+n^2(n+1)^2$ 是奇数．

5. 甲、乙两校看电影的学生都是 2003 名，电影院的座位也恰是 2003 个，设甲校上午场有 $n$ 个学生，则乙校上午场一定有 $2003-n$ 个学生．此时甲校上午共占 $n$ 个座位，乙校上午占 $2003-n$ 个座位，到了下午场，甲校应占 $2003-n$ 个座位，乙校应占 $n$ 个座位，假设每个座位上、下午坐的都是同一学校的学生，则每个学校上午占的座位数与下午占的座位数必相等，即 $n=2003-n$，即 $2003=2n$. 这显然是不可能的．因此，至少存在这 样一个座位，上、下午坐的是甲、乙不同学校的学生．

6. 设有 $n$ 名选手参加比赛．依题设，每局比赛不管胜负如何，双方得分的和为 2，从而全部得分总数是 $2\cdot\frac{n(n-1)}{2}=n(n-1)$，是偶数，只可能是 1980 或 1984. 方程 $n(n-1)=1980$ 的正整数解 $n=45$；方程 $n(n-1)=1984$ 无整数解．所以参赛选手共有 45 名．

7. 显然，原数是 1999 位数，设其为$\overline{a_1a_2\cdots a_{1999}}$，改变顺序后的数为$\overline{b_1b_2\cdots b_{1999}}$. 假若$\overline{a_1a_2\cdots a_{1999}}+\overline{b_1b_2\cdots b_{1999}}=\underbrace{99\cdots9}_{1999个9}$，因 $0\leqslant a_{1999},b_{1999}\leqslant 9,a_{1999}+b_{1999}=9,a_i+b_i=9(i=1,2,,1998)$. 将上述各式相加得$(a_1+a_2+\cdots+a_{1999})+(b_1+b_2+\cdots+b_{1999})=1999\times 9$，

即 $2(a_1+a_2+\cdots+a_{1999})=1999\times 9$，上式左边为偶数，右边为奇数，这不可能，故命题成立．

8.（1）代数式中共有 6 项，每项的值都是奇数，故代数式的值为偶数．

（2）由于代数式中的 6 个项相乘的积为

$-(rstuvwxyz)^2=-1$.

所以六项式中至少有一项是 $-1$，这样一来代数式的和至多为 4.

当 $u=x=y=-1$，$r=s=t=v=w=z=1$ 时，代数式的值是 4.

由上述知代数式的最大值是 4.

## 习题 1.4

### A 组

1. 仿例 5.
2. 不能．提示：仿例 2.
3. 不能．提示：仿例 8.

### B 组

1. 把这些小三角形的边标数，边的端点同色的，标数 0；边的端点是异色的，标数 1. 于是每只小三角形的三边标数的和有如下三种情形：

（1）三个点都不同色的小三角形，标数和为 3；

（2）恰有两顶点 同色的小三角形，标数和为 2；

（3）三顶点同色的小三角形，标数和为 0.

设所有小三角形的边的标数和为 $S$，又设情形（1）、（2）、（3）三类小三角形的个数分别为 $a,b,c$，于是 $S=3a+2b+0c=3a+2b$①，注意到所有小三角形的边的标数总和中，除了边 $AB$、$BC$、

$CA$ 外，其余各边都被计算了两次，故它们的标数和是这些边的标数和的两倍，再加上$\triangle ABC$ 三边的标数和是 3，故 $S$ 是奇数，再由①式知 $a$ 是奇数，由此命题得证．

2. 将第 $i$ 行第 $j$ 列的方程标上数$(-1)^{i+j}$，则任何相邻两格都是异号格．因 $2m+1$ 和 $2n+1$ 都是奇数，故易知正格数比负格数多 1，则在正格中的蚂蚁数比在负格中的蚂蚁数多一只，由于在某一时刻所有蚂蚁都爬到相邻（横向或纵向）的方格里去，故一定有一个负格中有两只蚂蚁，也就是说一定有一个正格中没有蚂蚁，这就证明了一定出现一个没有蚂蚁的方格．

3. 对 $n$ 分奇、偶两种情形讨论：

(1)设 $n=2k+1(k\geqslant 1)$，如果 $k=0$，那么就剩下一个人，所以假定 $k\geqslant 1$. 用 1 表示讲真话，0 表示讲假话，又可分为两种子情况：

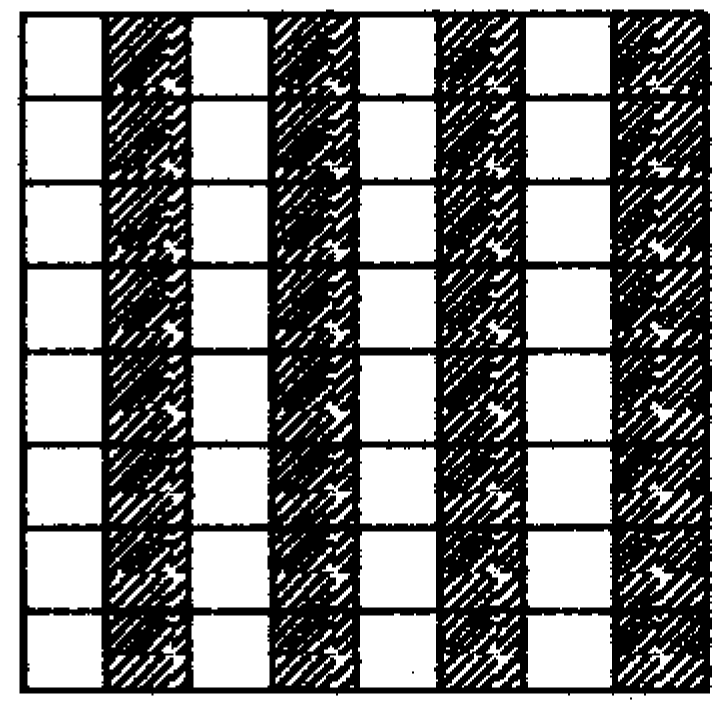
①若 $A_1=1$，则 $A_2=0$，于是 $A_3=1$，$A_4=0$，$\cdots A_{2k+1}=1$，但这个 $A_{2k+1}$便是 $A_n$，他说 $A_1$，$A_2$，$\cdots$，$A_{2k}$都讲假话，按他的话应有 $A_1=A_2=\cdots=A_{2k}=0$，矛盾．

②若 $A_1=0$，则 $A_2=1$，$A_3=0$，$A_4=1$. $\cdots$，$A_{2k+1}=0$，而事实正是如此，因为 $A_2$，$A_4$，$\cdots A_{2k}$均说真话，所以 $A_n$ 的话不真，正好符合题意，即有奇数个人时，奇数号的人说假话，偶数号的人说真话．

(2)设 $n=2k(k\geqslant 2)$，仿上讨论可知：当偶数个人时，奇数号的人说真话，偶数号的人说假话．

4. 将 50 个座位间隔涂成红黄二色，假设不论如何围座都不能找到一位两旁都是女生的学生，那么 25 个红色标记的座位最多只能坐 12 个女生，否则至少有两个女生中间坐一个学生，同样，25 个黄色标记的座位也最多只能坐 12 个女生，因此，50 个座位中最多只能坐 24 个女生，矛盾．

5. 如图染色，每个 $2\times2$ 正方形或横放的 $1\times4$ 长条都包含 2 个红格 与 2 个黄格，而直放的 $1\times4$ 长条包含 4 个红格或 4 个黄格，因此直放长条必偶数个．同样横向染色即知横放长条也是偶数个，所以长条数为偶数，而 9 是奇数．



## 习题 1.5

1. A.

**提示**：四种说法都是错误的. 对于(1)，质数 3 与 5 的和就不是质数；对于(2)，两个合数 4 与 9 的和不是合数；对于(3)，质数 2 与合数 4 的和不是质数；对于(4)，质数 3 与合数 4 的和不是合数．

2. C.

**提示**：最小的奇质数是 3，小于 50 的最大质数是 47，大于 60 的最小质数是 61，它的和为 111.

3. B.

**提示**：由 $a+3$ 是质数知，$a$ 不能被 3 整除；由 $a+7$ 是质数知，$a$ 被 3 除的余数不能是 2. 故 $a$ 被 3 除的余数只可能是 1.

4. 19.

5. 设 $a$ 为质数，$b$ 为正奇数，则 $a^2+b^2=125$. 可知 $a^2$ 必为偶数，从而 $a$ 为偶数，而质数中的偶数只有 2，所以$a=2$，从而 $b=121$，故 $ab=242$.

6. 由$\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{y}=\dfrac{y-z}{yz}$及 $x=yz$，得 $y-z=1$，

即　$y$ 与 $z$ 是两个相邻的正整数．

又 $y$ 与 $z$ 均为质数，

只有 $y=3$，$z=2$，故 $x=yz=6$.

7. 由 $3p+5q=31$ 知，$3p$ 和 $5q$ 中必有一个是偶数，而另一

个是奇数.

若 $3p$ 为偶数，因为 $p$ 为质数，所以只有 $p=2$，这时$q=5$. 于是$\frac{p}{3q+1}=\frac{1}{8}$.

若 $5q$ 为偶数,因为 $q$ 为质数,所以只有 $q=2$,这时 $p=7$. 于是$\frac{p}{3q+1}=1$.

故$\frac{p}{3q+1}$的值为$\frac{1}{8}$或 1.

8. 由 $pq+11$ 是质数,所以 $pq+11$ 必为奇数,因此 $pq$ 为偶数,又 $p,q$ 均为质数,所以 $p=2$ 或 $q=2$.

若 $p=2$,则 $14+q$ 与 $2q+11$ 均为质数,若 $q=3k+1$,则 $q+14=3k+15$ 被 3 整除;如果 $q=3k+2$,则 $2q+11=6k+15$ 被 3 整除,因此 $q$ 应为 $3k$ 型的质数,只能 $q=3$.

若 $q=2$,则 $7p+2$ 与 $2p+11$ 均为质数,若 $p=3k+1$,则 $7p+2=21k+9$ 被 3 整除;如果 $p=3k+2$,则 $2p+11=6k+15$ 被 3 整除,因此 $p$ 应为 $3k$ 型的质数,只有 $p=3$.

因此,$p$ 与 $q$ 一个为 2,另一个为 3,所以$(p^q+q^p)\div(2^p+2^q)=(2^3+3^2)\div(2^3+2^2)=(8+9)\div(8+4)=\frac{17}{12}$.

9. 因为 $a^4-3a^2+9=(a^4+6a^2+9)-9a^2=(a^2+3+3a)(a^2+3-3a)$,所以 $a=1$ 时,原式$=7$ 为质数;$a=2$ 时,原式$=13$ 为质数;当 $a>2$ 时,$a^2-3a+3=a(a-3)+3>1$,$a^2+3a+3>1$,故原数为合数.

10. 只有一个质数 101. 若 $n\geqslant2$,则 $x=10^{2n}+10^{2n-2}+\cdots+10^2+1=\frac{1}{99}(10^{n+1}-1)(10^{n+1})$. 当 $n=2k+1$ 时,$\frac{10^{2k+2}-1}{99}=10^{2k}+\cdots+10^2+1$ 为整数,所以 $x$ 是合数. 当$n=2k$ 时,$9\mid(10^{n+1}-1)$,$11\mid(10^{n+1}+1)$,所以 $x$ 也是合数.

## B 组

1. 先划去比 2 大的所有偶数，再划去比 3 大的所有 3 的倍数，再划去比 5 大的所有 5 的倍数，…可 求出 100 以内的所有质数：2，3，5，7，11，13，17，19，23，29，31，37，41，43，47，53，59，61，67，71，73，79，83，89，97，共 25 个，除 1 外，还有 74 个合数．

2. 依题意容易检验两位“无暇质数”分别是 11，13，17，31，37，71，73，79，97，共 9 个，它们的和是 429.

3. 设满足要求的质数为 $p$. 因 $p$ 是两个质数的和，所以 $p>2$. 从而 $p$ 是奇数，这就是说，$p$ 表示成两个质数之和的形式中必定有一个加数为偶数，即等于 2. 同理可知，$p$ 表示成两个质数之差的形式中减数必定是 2. 于是有 $p=q+2$，$p=r-2$，其中 $q$，$r$ 都是质数．由于三个连续奇数中至少有一个被 3 整除，因此，$p-2$，$p+2$ 中有一个等于 3. 易知 $p-2=3$，所以 $p=5$. 满足要求的质数只有 1 个.

4. 所求三个数的乘积能被 5 整除，因此其中有一个数是 5. 设 $p$，$q$ 为另外两个数，且不妨设 $p>q$，则

$5pq=5(p+q-5)$，即$(p-1)(q-1)=6$.

但是只有两种方式把 6 分解成两个数这积：$6=2\times3=1\times6$，故 $p=4$，$q=3$ 或 $p=7$，$q=2$. 这三个质数之和为 12 或 14.

5. 由 $n=a+b+ab$ 得 $n+1=(1+a)(1+b)$.

当 $n=1$ 时，上式无解，1 不是“好数”

当 $n=2$ 时，上式无解，2 也不是“好数”.

一般地，若 $n+1$ 为质数，则 $n+1=(a+1)(b+1)$ 无解，所以使 $n+1$ 为质数的 $n$ 都不是“好数”

这样在 $n$ 的前 100 个正整数中有 26 个，它们是 1，2，4，6，…96，100. 其余的 $n$ 都使 $n+1$ 为合数．

设 $n+1=pq(p\geqslant2,q<n+1)$，由 $pq=(a+1)(b+1)$ 可相应求出 $a$，$b$，所以 $n+1$ 为合数的 $n$ 均为“好数”

故在1～100这100个正整数中,"好数"共有100−26=74个.

6. 连结 $AC$,有 $a^2+b^2=c^2+d^2$.

$\therefore a^2+b^2+c^2+d^2=2(c^2+d^2)$为一偶数.

又 $a^2+a=a(a+1)$必为偶数,

同理,$b^2+b,c^2+c,d^2+d$ 也都是偶数,

$\therefore a^2+b^2+c^2+d^2+(a+b+c+d)$亦为偶数.

故 $a+b+c+d$ 为偶数.

但 $a,b,c,d$ 都是正整数,$a+b+c+d\geqslant 4$,

$\therefore a+b+c+d$ 必为一个合数.

7. 设 $p$ 是质数,且 $p=a^2-b^2$,其中 $a,b$ 是正整数,且 $a>b$,则

$$p=a^2-b^2=(a-b)(a+b).$$

有 $a-b=1$,$a,b$ 一个奇数一个偶数,故 $p$ 是奇质数. 反之,设 $p=2n+1$,则 $a=n+1,b=n$.

故若质数能表示成两个平方数之差,则表示方法唯一,且 $p$ 是奇质数.

8. 若每个正整数 $n$,令 $m=n+2$,则

$$nm+1=n(n+2)+1=n^2+2n+1=(n+1)^2.$$

显然 $n+1>1,n+1<nm+1$,且 $n+1\mid nm+1$,所以 $nm+1$ 是个合数.

9. $\because m=\frac{1}{4}[4(ab+cd)^2-(a^2+b^2-c^2-d^2)^2]$

$$\begin{aligned}
&=\frac{1}{4}[2(ab+cd)+(a^2+b^2-c^2-d^2)]\\
&\quad\times[2(ab+cd)-(a^2+b^2-c^2-d^2)]\\
&=\frac{1}{4}[(a+b)^2-(c-d)^2][(c+d)^2-(a-b)^2]\\
&=\frac{1}{4}(a+b+c-d)(a+b-c+d)(c+d+a-b)(c\\
&\quad+d-a+b)
\end{aligned}$$

是个非零整数，

$\therefore (a+b+c-d)(a+b-c+d)(c+d+a-b)(c+d-a+b)$ 是偶数，

$\therefore a+b+c-d$，$a+b-c+d$，$c+d+a-b$，$c+d-a+b$ 这四个数中必有一个是偶数．

又 $a+b+c-d$，$a+b-c+d$，$c+d+a-b$，$c+d-a+b$ 这四个数中每个数都与 $a+b+c+d$ 的奇偶性相同，

即 $a+b+c-d$，$a+b-c+d$，$c+d+a-b$，$c+d-a+b$ 这四个数的奇偶性相同，

$\therefore a+b+c-d$，$a+b-c+d$，$c+d+a-b$，$c+d-a+b$ 这四个数都是偶数．

从而 $(a+b+c-d)(a+b-c+d)(c+d+a-b)(c+d-a+b)$ 是 16 的倍数，所以 $m$ 是 4 的倍数，又 $m\neq 0$，故 $|m|$ 一定是个合数．

10. 假设存在 14 个连续的正整数 $n,n+1,n+2,\cdots,n+13$，其中每一个数都至少可被 2,3,5,7,11 中的某一个数整除．

由于这 14 个正整数是连续的，因此必有 7 个偶数，不妨设 $n,n+2,n+4,\cdots n+12$ 为偶数，显然，这 7 个数都能被质数 2 整除．

剩下的 7 个奇数 $n+1,n+3,\cdots,n+13$ 只可能被 3,5,7,11 中的某一个数整除．而这 7 个数被 3,5,7,11 整除的数的个数最多分别为 3 个，2 个，1 个，1 个，总数也是 7 个，所以不会出现两个不同的质数整除同一个数的情形．

另一方面，在这 7 个奇数中，能被 3 整除的数相隔 6 个连续的正整数，只能是 $n+1,n+7,n+13$，而被 5 整除的数相隔 10 个连续的正整数，所以必须是 $n+1$ 或 $n+3,n+13$. 显然，无论哪种情况出现，都有两个质数同时整除 5 或 7 的情况，与上面的分析矛盾．

故不存在这样的 14 个连续正整数．

## 习题 1.6

### A 组

1. 由于 $15=1\times15=3\times5$，则所求的正整数只能有 $p^{14}$ 或 $p_1{}^4\cdot p_2^2$ 的形式.

$p^{14}$的最小数是 $2^{14}$，然而 $2^{14}>200$. 所以所求正整数不具有 $p^{14}$的形式.

因为 $5^4>200$，$17^2=289>200$，所以 $p_1$ 是小于 5 的质数，$p_2$ 是小于 17 的质数.

又因为 $p_1{}^4\geqslant2^4\geqslant16$，

则 $p_2^2\leqslant\frac{200}{16}=\frac{25}{2}$，

则 $p_2\leqslant3$.

从而只能取 $p_1=2$，$p_2=3$.

此时，所有正整数为 $2^4\cdot3^2=144$.

另一方面，$3^4\cdot2^2=324>200$.

所以本题只有唯一解 144.

2. 因为 $3p^2$ 的正约数有$(1+1)(2+1)=6$ 个，具体地为 1，3，$p$，$3p$，$p^2$，$3p^2$. 由题意

$1+3+p+3p+p^2+3p^2=124$.

$4p^2+4p+4=124$.

$p^2+p-30=0$.

解得　$p=5$，$p=-5$(舍去).

于是所求之数只有一个 $3\times5^2=75$.

3. 为使约数的个数多于 100 个，必须使约数尽量小，从而保证所求的数不超过 70000.

事实上　$2^2\cdot3^2\cdot5^2\cdot7\cdot11=69300$，

$2^5\cdot3^2\cdot5^2\cdot7=50400$，

$2^6 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7=60480$,

$2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11=55440$.

它们的约数个数依次为 108,108,112,120.

4. 由题意,$a=c-2, b=c-1, d=c+1, e=c+2$.

$\therefore b+c+d=3c$,

$a+b+c+d+e=5c$.

$\therefore$ $3c$ 应为平方数,$5c$ 应为立方数,显然有 $15 \mid c$.

设 $c=15k$. 又因为 $5c=5^2 \cdot 3k$, $3c=3^2 \cdot 5k$, 则 $k=5 \cdot 3^2=45$. 即 $c=15\times 45=675$.

5. $6=2\times 3$,全部因数之和为 $1+2+3+6=12=2\times 6$;

$28=2^2\times 7$,全部因数之和为 $(1+2+2^2)(1+7)=56=2\times 28$;

$496=2^4\times 31$,全部因数之和为 $(1+2+2^2+2^3+2^4)(1+31)=496\times 2$.

## B 组

1. 因为 10 个连续整数的倍数,必须被 $2^3, 3^2, 5, 7$ 整除,从而 $n$ 应具有形式.

$n=2^{\alpha_1} \cdot 3^{\alpha_2} \cdot 5^{\alpha_3} \cdot 7^{\alpha_4} \cdot p^{\alpha_5} \cdot q^{\alpha_6} \cdots$

其中 $\alpha_1 \geqslant 3, \alpha_2 \geqslant 2, \alpha_3 \geqslant 1, \alpha_4 \geqslant 1$.

又因为 $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)(\alpha_3+1)(\alpha_4+1)\cdots=144$,

且 $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)(\alpha_3+1)(\alpha_4+1) \geqslant (3+1)(2+1)(1+1)(1+1)=48$,

从而 $(\alpha_5+1)(\alpha_6+1)\cdots \leqslant 3$.

所以至多还有一个 $\alpha_i (i>4)$,且这个 $\alpha_i=1$ 或 2.

为求最小的 $n$,取 $p=11$. 为使约数恰为 144 个,只要比较.

$n_1=2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \cdot 7^1 \cdot 11^2$,

$n_2=2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \cdot 7^1 \cdot 11^1$,

显然 $n_2<n_1$,即所求的最小的正整数 $n=2^5 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot$

$11=110880$.

2. 设该四位数为 $N=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot\cdots\cdot p_k^{\alpha_k}$,其中 $p_i$ 为质数,$\alpha_i$ 为正整数($i=1,2,,k$),则 $N$ 的约数的个数为 $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_k+1)=14=2\times7$.

$\because \alpha_i+1\geqslant2$,

$\therefore \alpha_i+1$ 是大于或等于 2 的正整数.

又 $(\alpha_1+1)(\alpha_2+2)\cdots(\alpha_k+1)=2\times7$,

$\therefore k\leqslant2$.

当 $k=1$ 时,$N=p_1^{13}<2000$,则 $p_1<2$,这不可能,于是 $k=2$.即 $N=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}$.

$\because (\alpha_1+1)(\alpha_2+1)=2\times7$,不失一般性,可设 $\alpha_1+1=7$,$\alpha_2+1=2$,则 $\alpha_1=6$,$\alpha_2=1$,

$\therefore N={p_1}^6\cdot p_2$,由于 $N<2000$,$3^6=729$,$4^6=4096$,故 $p_1\leqslant3$,此时 ${p_1}^6$ 的末位数字不等于 1,故 $p_2$ 的末位数字是 1,即 $p_2$ 是末 位数字是 1 的质数,则 $p_2\geqslant11$.

若 $p_1=3$,则 $N\geqslant3^6\cdot11=729\cdot11>2000$,不合题设,故 $p_1=2$,$N=2^6\cdot p_2$;

若 $p_2=11$,有 $N=2^6\cdot11=704$,不是四位数;

若 $p_2=31$,有 $N=2^6\cdot31=1984$;

若 $p_2\geqslant41$,有 $N\geqslant2^6\cdot41=2624>2000$,不合题设.

即所求的四位数是 1984.

## 习题 1.7

### A 组

1. B.

2. B.

**提示**:在 $1,2,3,\cdots,100$ 这 100 个自然数中,能同时被 2,3,4 整除,即能被 $[2,3,4]=12$ 整除的数有 $12,24,36,\cdots96$,共 8 个.

3. A.

**提示**:设两个两位数分别为 $a,b$,由$(a,b)=8$,有 $a=8m,b=8n$,且$(m,n)=1$.

由$[a,b]=96$,得$[m,n]=12$.

又$(m,n)=1$,

∴只有 $m=3,n=4$,或 $m=4,n=3$.

这时都有 $a+b=8(m+n)=56$.

4. 设所求最小的分数为$\frac{b}{a}$($a,b$ 互质),则由题设知,$\frac{105b}{26a}$和$\frac{147b}{65a}$都是整数,于是有

$(105b,26a)=26a,(147b,65a)=65a$.

即$(525b,130a)=130a,(294b,130a)=130a$.

$130\nmid 525,130\nmid 294$,

故而要使 $b$ 最小,只有 $b=130$.

从而有$(525,a)=a,(294,a)=a$.

因为分数$\frac{b}{a}$最小,所以必须 $a$ 尽可能的大.

取　$a=(525,294)=21$.

故所 求最小的分数为$\frac{130}{21}=6\frac{4}{21}$.

5. 根据性质,有原式$=462\times55-55\times462=0$.

6. $n+1$ 是 3,4,5 的公倍数,最小的 $n$ 为 $n=3\times4\times5-1=59$.

7. $n$ 与 $n+1$ 互质,有$(n,n+1)=1,[n,n+1]=n(n+1)$.

8. 设这两个正整数分别为 $x,y$,则

$$\begin{cases} xy=8214, & ① \\ (x,y)=37. & ② \end{cases}$$

由②令 $x=37a,y=37b$,且$(a,b)=1$,代入①得　$ab=6$.

由于$(a,b)=1$,所以只有以下两种情况：

$\begin{cases}a=1,\\b=6;\end{cases}$ $\begin{cases}a=2,\\b=3.\end{cases}$

故这两个正整数分别为 37,222 或 74,111.

9. 设$(a+b,a^2-ab+b^2)=d$,则

$$\begin{cases}a+b=dm, & ①\\a^2-ab+b^2=dn.\ (m,n\text{是正 整数}) & ②\end{cases}$$

$①^2-②$ 得 $3ab=d(dm^2-n)$.

因为$(a,b)=1$,所以 $d|3$,或 $d|a$,或 $d|b$

当 $d|3$ 时,则 $d=1$ 或 3;

当 $d|a$ 或 $d|b$ 时,因为 $d|(a+b)$,所以 $d=1$.

综 上所述,$(a+b,a^2-ab+b^2)=1$ 或 3.

10. 设这堆苹果最少有 $x$ 个,由题意得

$$\begin{cases}x=2q_1+1,\\x=3q_2+1,\\x=4q_3+1,\\x=5q_4+1,\\x=6q_5+1.\end{cases}\quad\text{即}\begin{cases}x-1=2q_1,\\x-1=3q_2,\\x-1=4q_3,\\x-1=5q_4,\\x-1=6q_5.\end{cases}$$

由此可见,$x-1$ 是 2,3,4,5,6,的最小公倍数 .

$\because[2,3,4,5,6]=60$,

$\therefore x-1=60$,即 $x=61$.

答:这堆苹里最少有 61 个 .

## B 组

1. 两个正整数的最小公倍数可与较大数相等,它们的 最大公约数可与较小数相等,故 $p\leqslant b<a\leqslant q$.

2. 由 $60|x,x|360$,可知 $x$ 只可能是 60,120,180,360. 又由 $90|z,z|360$,知 $z$ 只可能为 90,180,360. 因 $60|y,90|y$,故 $180|y$,因$(x,y)=60$,故 $x\neq180,360$. 又$[z,x]=360$,且$(y,z)$

$=90$,故 $x=120$,$z=90$. 于是 $x+z=210$.

3. $d=(19n+14,10n+3)=(9n+11,10n+3)=(9n+11,n-8)=(83,n-8)\neq 1$. 因 83 是质数,故 $n-8=83$,$n=91$.

4. 易知 1,2,4,8,16 两两不同组,故所分组数不小于 5. 又分为五组 1;2,3;4,5,6,7;8,9,10,11,12,13,14,15;16,17,18,19,满足题设要求. 故 $m$ 的最小值为 $m$.

5. 变换中两 数逐渐变小,但最大公约数不变,又 $(1024,\underbrace{11\cdots1}_{20个1})=1$,故最后两个同数均为 1.

6. 设甲、乙两种规格的正方形边长分别为 $x,y$ 厘米,选用甲种规格的地砖恰需 $n$ 块,则 $x,y$ 皆为正整数,且 $nx^2=(n+124)y^2$.

有 $\frac{x_1{}^2}{y_1{}^2}=\frac{n+124}{n}$, $\frac{x_1{}^2-y_1{}^2}{y_1{}^2}=\frac{124}{n}$.

因 $(x_1{}^2-y_1{}^2,y_1{}^2)=1$,故 $(x_1-y_1)(x_1+y_1)$ 是 $124=2^2\times 31$ 的约数. 注意到 $x_1+y_1$,$x_1-y_1$ 具有相同的奇偶性,$x_1+y_1>x_1-y_1$,即有

$$\begin{cases}x_1+y_1=31,\\x_1-y_1=1;\end{cases} \quad 或 \begin{cases}x_1+y_1=2\times 31,\\x_1-y_1=2.\end{cases}$$

因 $(x_1,y_1)=1$,

故只能 $\begin{cases}x_1=16,\\y_1=15.\end{cases}$ 于是,$\frac{124}{n}=\frac{31}{225}$,$n=900$.

7. 不能.

设 $a$ 和 $b$ 为两个正整数,且 $a>b$. 记 $a,b$ 的最大公约数为 $(a,b)$,则有 $(a,b)\leqslant b$ 且 $(a,b)\leqslant\frac{a}{2}$. 因此,当 $a\neq b$ 时,$(a,b)\leqslant\frac{a+b}{3}$.

由正方体的 12 条棱组成 12 个这样的不等式. 于是,我们

得出：当且仅当$(a,b)=\frac{a+b}{3}$时，满足问题条件的等式成立．这时，$a,b$中的大数应是其中小数的2倍，不妨设$a=2b$.

考察从记有数$a$的顶点出发的另外两条棱的另一端点的数字$c$和$d$，其中每一个数都应该或者是$2a$，或者是$\frac{a}{2}$. 如果其中至少有一个是$\frac{a}{2}$，则它必与$b$相等；如果两个都比$a$大，则它们应该相等．这两种情况都与已知矛盾．于是，结论得证．

## 水平测试题一

1. 设原来的两位数是$\overline{ab}$，则$\overline{ab}+\overline{ba}=11(a+b)=n^2$，又$\because$ $0<a+b<18$，$\therefore$ $a+b=11$，从而和数$\overline{ab}+\overline{ba}=11^2=121$. 又符合$a+b=11$的两位数$\overline{ab}$共有八个：29，38，47，56，65，74，83，92，其中最大的是92.

2.（1）要使商最大（小），被除数应尽量小（大）些，除数尽量大（小）些．为使商最小，取三位数的百位数字是1，十位数字、个位数字都是9来试除，$\because$ $199\div(1+9+9)=100\cdots9$，不能整除，于是把个位数字改为8，有$198\div(1+9+8)=11$，恰好整除．若$\overline{abc}$被$a+b+c$整除，而商不大于10，那么$100a+10b+c\leqslant 10(a+b+c)$，从而$10a\leqslant c$，这里$a\neq0$和$c$都是一位数，于是$10a\leqslant c$是不可能的，可见所得的商最小是11.

（2）要使商最大，类似地试除，有$900\div(9+0+0)=100$，同样可以证明，商不小于101是不可能的，否则$a=b=c=0$. 所以最大的商是100. 容易看出符合条件的三位数共有以下九个：100，200，300，400，500，600，700，800，900.

3. $\because$ 1993是质数，由$c(a+b)=1993$，所以$c=1$，$a+b=1993$，将$b=1993-a$代入另式中，得$a^2-1992a+1991=0$，解得$a_1=1$，$a_2=1991$，相应地有$b_1=1992$，$b_2=2$. 因此，$a,b,c$依

次有二组值:1,1992,1;1991,2,1. 于是 $abc$ 的最大值是 $1991\times 2=3982$.

4. 最大奇数是 $8521\times 7643=65126003$;最大偶数是 $8531\times 7642=65193902$;最小奇数是 $1365\times 2487=3394755$;最小偶数是 $1357\times 2468=3349076$.

5. 因为从 1 开始由小到大连续 $n$ 个奇数和 $1+3+5+\cdots+2n-1=n^2$,从而可知 $n^2$ 最多可表示成 $n$ 个不同正奇数之和.

6. 被 4 整除的最大三位数是 996,而所求四位数可以表示为$\overline{996x}$,$\because$ $9\mid\overline{996x}$,$\therefore$ $x=3$,于是所求的末位数是 3.

7. 所给六个数字中的三个数的和与另三个数的和仅有 $(8+5+1)-(7+4+3)=0$ 被 11 整除,从而所求数是 875413.

8. 可分别依次选 $2\mid 10$,$3\mid 102$,$4\mid 1020$,$5\mid 10200$,$6\mid 102000$,$7\mid 1020005$,$8\mid 10200056$,$9\mid 102000564$,$10\mid 1020005640$,$11\mid 10200056405$. 于是 10200056405 就是所求的最小数.

9. 由题意 $n=k+m$,$n=p+q+1$,$\therefore$ $(q-m)+(p-k)+1=(p+q)-(m+k)=(n-1)-n=-1$.

10. 由 $c(a+b)=23$,$\because$ $c,a+b$ 是正整数,其积是质数 23,又 $a+b>1$,所以只能 $c=1$,$a+b=23$,于是方程组化为

$$\begin{cases}(a+1)b=44,\\(a+1)+b=24.\end{cases}$$

解得 $\begin{cases}a+1=2,\\b=22;\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a+1=22,\\b=22.\end{cases}$

即 $\begin{cases}a=1,\\b=22;\end{cases}$ 或 $\begin{matrix}a=21,\\b=2.\end{matrix}$ 于是原方程组的正整数解有两组:(1,22,1)和(21,2,1).

11. 设斜边为 $a$,另一直角边长 $b$,于是有 $a^2-b^2=n^2$,即 $(a-b)(a+b)=n^2$,其中 $a,b$ 是正整数,且 $a>b$,从而可知 $a-b,a+b$ 都是正整数,而 $n$ 是质数,所以 $a-b=1$,$a+b=n^2$,由此得直角三角形的周长是 $n+a+b=n+n^2$.

12. 由$(n-m)(n+m)=167$，又$m,n$都是正整数，所以$n-m,n+m$都是正整数，又167是质数，所以只能$n-m=1,n+m=167,n=84$.

13. (1)$\because$ $660=10\times11\times6$，$\therefore$ $2\times660=10\times11\times12$，于是所求的三个连续正整数是10,11,12；(2)$\because$ $72=12\times6$，又$6=1\times6=2\times3$，$\therefore$ $a=12\times1=12,b=12\times6=72$，或者$a=12\times2=24,b=12\times3=36$.

14. 设三个角的度数为$x,y,z$且$0<x\leqslant y\leqslant z<90$，又$x+y+z=180$. 可见三质数$x,y,z$中必是二个奇数一个偶数.（若三个质数都是偶数，$x=y=z=2$，不合题意），由此设$x=2$，那么$y+z=178$. 又因$y,z$都小于90，所以只能$y=z=89$（是质数），由此得证$\triangle ABC$是等腰三角形，且最大角是89度.

15. 由韦达定理知$kt=n$，因$n$是质数，所以不妨设$k=1,t=n$，于是$k+t=n+1=m$，可见$n$和$m=n+1$是连续的质数，所以$n=2,m=3$，由此$k=1,t=2$. 由此可得$3^2+2^3+1^2+2^1=9+8+1+2=20$.

16. $\because$ $(7n+6)-(4n+5)=3n+1,(4n+5)-(3n+1)=n+4,(3n+1)-2(n+4)=n-7,(n+4)-(n-7)=11$. 当$n-7$被11整除时，11为$7n+6,4n+5$的最小公倍数，且因11是质数，所以可设$n-7=11k$（$k$是整数）. 又$0<n<50$，得$-\frac{7}{11}<k<\frac{43}{11}$，故$k=0,1,2,3$时，满足条件的值是$n=7,18,29,40$.

17. $\because$ $9|n$，$\therefore$ $9|p$，且$9|q,9|r$，其中$p,q,r$都是正整数，注意到$p\leqslant1997\times9=17973$，故$p$的位数不超过5. 因而可知$q\leqslant4\times9=36$，故$q$的位数不超过2，于是$0<r\leqslant2+9=11$由此得$r=9$.

18. $\because 5|\overline{bcd}$，$\therefore$ $d=5$. 又$\because$ $11|\overline{def}$，$\therefore$ $d+f-e$是11的倍数，但$6\leqslant d+f\leqslant5+6=11,1\leqslant e\leqslant6$，故$0\leqslant d+f-e\leqslant10$，

因此 $d+f-e=0$，即 $5+f=e$，又 $e\leqslant 6$，$f\geqslant 1$，$\therefore$ 只能 $f=1$，$e=6$. 又因 $3|\overline{cde}$，即 $3|\overline{c56}$，所以 $3|c+5$，而 $4|\overline{abc}$，可知 $c$ 为偶数，只能 $c=4$. 进一步推出 $b=2$，$a=3$. 故 $\overline{abcdef}=324561$.

19. 把 27 个小蛋糕分成如下图所示的前、中、后三层，每层九块，分别涂上红、蓝两色，这样共有 14 个红蛋糕和 13 个蓝蛋糕，在这些小蛋糕中，每一个红蛋糕的四周都是蓝蛋糕，每一个蓝蛋糕的四周都是红蛋糕．小虫从中心一个蓝蛋糕出发，只能依次地沿红、蓝蛋糕相间地行进．如果小虫能不重复地穿过所有小蛋糕，那么小虫一定共经过 14 个红蛋糕和 14 个蓝蛋糕，但仅有 13 个蓝蛋糕，所以这是不可能的．

| | | |
|---|---|---|
| 红 | 蓝 | 红 |
| 蓝 | 红 | 蓝 |
| 红 | 蓝 | 红 |

（前）

| | | |
|---|---|---|
| 蓝 | 红 | 蓝 |
| 红 | 蓝 | 红 |
| 蓝 | 红 | 蓝 |

（中）

| | | |
|---|---|---|
| 红 | 蓝 | 红 |
| 蓝 | 红 | 蓝 |
| 红 | 蓝 | 红 |

（后）

20. $\because$ 两个两位数之积都大于 100，因此我们可将胸前号码数为 1,2,3,4,5,6,7,8,9 的九个小孩围成一圈，又将胸前号码为 18,17,…,11,10 的九个小孩依次插入 1 与 2，2 与 3，…，9 与 1 号小孩之间，所以最多能挑选出 18 个小孩围成一圈，使之符合题意．请注意，这样的挑选不是唯一的．

## 习题 2.1

### A 组

1. (1) 8，16，88.

**提示：** $2^3\equiv -1 \pmod 9 \Rightarrow 2^{2001}\equiv (2^3)^{667}\equiv (-1)^{667}\equiv 8 \pmod 9$，$19\equiv 2 \pmod{17} \Rightarrow 19^4\equiv 2^4\equiv -1 \pmod{17} \Rightarrow 19^{1996}\equiv (19^4)^{449}\equiv (-1)^{449}\equiv 16 \pmod{17}$.

$2^{12}=4096\equiv -4 \pmod{100} \Rightarrow 2^{999}=(2^{12})^{83}\cdot 2^3\equiv (-4)^{83}\cdot$

$2^3 \pmod{100}$ 又 $4^6=2^{12}=4096\equiv-4\pmod{100}\Rightarrow 4^{83}=(4^6)^{13}\cdot 4^5\equiv(-4)^{13}\cdot 4^5\equiv-4^{18}\equiv-(4^6)^3\equiv-(-4)^3\equiv64\pmod{100}$，所以 $2^{999}\equiv(-4)^{83}\cdot 2^3\equiv(-64)\cdot 2^3\equiv-2^9\equiv-512\equiv88\pmod{100}$

(2)4

(3)奇

**提示**：$2\equiv-1\pmod 3\Rightarrow 2^n+1\equiv(-1)^n+1\pmod 3$. 要使 $2^n+1\equiv0\pmod 3$，只需 使 $(-1)^n)+1\equiv0\pmod 3$. 故 $n$ 是奇数.

2. 略.

B 组.

1. **解**：∵ $9\equiv2\pmod 7$

∴ $9^9\equiv2^9\equiv(2^3)^3\equiv1^3\equiv1\pmod 7$

∴ $9^{9^9}\equiv1^9\equiv1\pmod 7$.

即 $9^{9^9}$ 除以 7 的余数是 1.

2. **解**：∵ $2222\equiv3\pmod 7$ ∴ $2222^3\equiv3^3\equiv-1\pmod 7$.

∴ $2222^{5555}\equiv(2222^3)^{1851}\cdot(2222)^2\equiv(-1)^{1851}\cdot3^2\equiv-9\equiv5\pmod 7$.

又∵ $5555\equiv4\pmod 7$ ∴ $5555^3\equiv4^3\equiv1\pmod 7$

∴ $5555^{2222}\equiv(5555^3)^{740}\cdot5555^2\equiv1\times4^2\equiv2\pmod 7$

所以 $2222^{5555}+5555^{2222}\equiv5+2\equiv0\pmod 7$

∴ $7\mid2222^{5555}+5555^{2222}$.

3. 29.

**解**：∵ $257\equiv7\pmod{50}$ ∴ $257^2\equiv7^2\equiv-1\pmod{50}$

∴ $257^{33}\equiv(257^2)^{16}\cdot257\equiv(-1)^{16}\cdot257\equiv257\equiv7\pmod{50}$

∴ $257^{33}+46\equiv7+46\equiv3\pmod{50}$

所以，$(257^{33}+46)^{26}\equiv3^{26}\equiv(3^5)^5\cdot3\equiv(-7)^5\cdot3$

$\equiv[(-7)^2]^2\cdot(-7)\cdot3\equiv49^2\cdot(-21)$

$\equiv(-1)^2\cdot(-21)$

$\equiv -21\equiv 29(\bmod 50)$.

4. 略.

5. **证明**:∵ $1^{2001}+2^{2001}+3^{2001}+\cdots+n^{2001}\equiv n^{2001}+(n-1)^{2001}+\cdots+3^{2001}+2^{2001}+1^{2001}\equiv[n-(n+2)]^{2001}+[(n-1)-(n+2)]^{2001}+\cdots+[3-(n+2)]^{2001}+[2-(n+2)]^{2001}+[1-(n+2)]^{2001}\equiv(-2)^{2001}+(-3)^{2001}+\cdots+(-n+1)^{2001}+(-n)^{2001}+(-n-1)^{2001}(\bmod n+2)$

$\therefore 2[1^{2001}+2^{2001}+3^{2001}+\cdots+n^{2001}]$

$\equiv 1^{2001}+2^{2001}+3^{2001}+\cdots n^{2001}+(-2)^{2001}+(-3)^{2001}+\cdots+(-n)^{2001}+(-n-1)^{2001}$

$\equiv 1^{2001}+(-n-1)^{2001}$

$\equiv 1^{2001}-(n+1)^{2001}$

$\equiv 1-(n+1)^{2001}$

$\equiv 1-[(n+1)-(n+2)]^{2001}$

$\equiv 1-(-1)^{2001}\equiv 2(\bmod n+2)$

所以 $1^{2001}+2^{2001}+3^{2001}+\cdots+n^{2001}\not\equiv 0(\bmod n+2)$,故原命题成立.

6. 根据费尔马小定理得 $p^{q-1}\equiv 1(\bmod q)$,
$q^{p-1}\equiv 1(\bmod p)$. 所以

$p^{q-1}+q^{p-1}\equiv 1+0\equiv 1(\bmod q)$

$q^{p-1}+p^{q-1}\equiv 1+0\equiv 1(\bmod p)$

又因为 $p$、$q$ 都是质数,且 $p\neq q$,所以 $(p,q)=1$.

因此 $p^{q-1}+q^{p-1}\equiv 1(\bmod pq)$.

即 $p^{q-1}+q^{p-1}$ 除以 $pq$ 所得的余数是 1.

## 习题 3.2

### A 组

1. 略

2. $\because\quad 5\times 99+6\equiv 0 \pmod 3$ $\therefore\quad \underbrace{55\cdots5}_{99个5}6\equiv 0 \pmod 3$ 若 99 个 5 是完全平方数．则$\underbrace{55\cdots5}_{99个5}6\equiv 0 \pmod 9$ 易知$\underbrace{55\cdots5}_{99个5}6$ 不能被 9 整除．矛盾．

$\therefore\quad \underbrace{55\cdots5}_{99个5}6$ 不是完全平方数．

B 组

1. **证明**：(*i*)若 $p\equiv 1 \pmod 6$ 则 $p=6k+1$，

$p^2-1\equiv(6k+1)^2-1\equiv 12k(3k+1)\equiv 0 \pmod{24}$

(*ii*)若 $p\equiv 5 \pmod 6$，则 $6k+5$

$\therefore\quad p^2-1\equiv(6k+5)^2-1\equiv 12k(3k+5)+24\equiv 0 \pmod{24}$

因 $p$ 是质数，所以 $p\not\equiv 0 \pmod 6$，$p\not\equiv 2 \pmod 6$，$p\not\equiv 3 \pmod 6$，$p\not\equiv 4 \pmod 6$.

综上所述 $24\mid p^2-1$.

2. **分析**，可以对 $x$ 的取值，用某一个模 $m$ 的剩余类分类讨论．

**证明**：若 $x\equiv 0 \pmod 3$，则 $x=3k$，那么

$x^2-3y^2=9k^2-3y^2=3(3k^2-y^2)=17$ 矛盾．

若 $x\equiv 1 \pmod 3$，则 $x=3k+1$，那么

$x^2-3y^2=(3k+1)^2-3y^2=9k^2+6k-3y^2+1=17$

即 $9k^2+6k-3y^2=16$，$3(3k^2+2k-y^2)=16$ 矛盾．

若 $x\equiv 2 \pmod 3$．则 $x=3k+2$，那么

$x^2-3y^2=(3k+2)^2-3y^2=9k^2+12k-3y^2+4=17$

即 $9k^2+12k-3y^2=13$，$3(3k^2+4k-y^2)=13$ 矛盾．

综上所述，原方程不可能有整数解．

3. **分析**：先找到 $n$ 的上界，再举例说明能取到这个上界即可．

**解**：如果 $n=99$，如下方法取 50 个数：

1,2,3,4,5,6,7

15,16,17,18,19,20,21

29,30,31,32,33,34,35

43,44,45,46,47,48,49

57,58,59,60,61,62,63

71,72,73,74,75,76,77

85,86,87,88,89,90,91

99

这 50 个数中的任意两个数之差都不等于 7,因此 $n<99$. ∴ $n\leqslant 98$ 且 $n_{\max}=98$.

下面证明 $n_{\max}=98$.

将 1,2,…98 分成 7 类,即 0mod7,1mod7,…,6mod7. 50 个数也按对模 7 的余数分类. 根据抽屉原则,必有 8 个数都在 7 的同一剩余类 $r_0$ mod7 中,这 8 个数可写成如下形式:

$7k_1+r_0, 7k_2+r_0, \cdots, 7k_8+r_0$.

因为 $n=98$,所以 $k_1,k_2,\cdots,k_8$ 一定在 1,2,3,…14 中取值,再将 $k_1,k_2,\cdots k_8$ 按相邻分组 1 与 2,3 与 4,5 与 6,…13 与 14. $k_1,k_2,\cdots k_8$ 共 8 个数分成 7 组. 秘有两个在一组,即必有两个相邻,设为 $k_1,k_2$. 即

$k_1+1=k_2$.

所以,存在两个数 $a,b$,其中

$a=7k_1+r_0, b=7k_2+r_0=7(k_1+1)+r_0$ ∴ $b-a=7$ 综上所述,这样的整数 $n$ 的最大值是 98.

## 习题 2.3

### A 组

1. (1) $x\equiv 2 \pmod 5$.

(2) $4x\equiv 6 \pmod{10} \Leftrightarrow 2x\equiv 3 \pmod 5 \Rightarrow x\equiv 4 \pmod 5$.

(3) $3x\equiv 1\ (\text{mod}\ 10)\Rightarrow 3x\equiv 1+20\equiv 21\ (\text{mod}\ 10)$ $\Rightarrow x\equiv 7(\text{mod}\ 10)$

2. (1)**解法一：**

由 $x\equiv 4(\text{mod}\ 7)$得，$x=7k+4$，$k$ 为整数．

代入 $x\equiv 3(\text{mod}\ 11)$得：

$7k+4\equiv 3(\text{mod}\ 11)$ ∴ $k\equiv 3(\text{mod}\ 11)$设 $k=11m+3$，则 $x=7(11m+3)+4)=77m+25$.

**解法二：**

因 $m_1=7$，$m_2=11$，所以 $M_1=11$，$M_2=7$.

∴$m_1^{-1}=2$，$m_2^{-1}=8$ 所以方程的解为

$$\begin{aligned} x&\equiv 11\times 2\times 4+7\times 8\times 3(\text{mod}\ 77)\\ &\equiv 88+168(\text{mod}\ 77)\\ &\equiv 25(\text{mod}\ 77) \end{aligned}$$

即 $x=77m+25$.

(2)原方程与下列方程组同解．

$$\begin{cases}5x\equiv 3(\text{mod}4)\\ 3x\equiv 10(\text{mod}\ 17)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\equiv 3(\text{mod}\ 4)\\ x\equiv 9(\text{mod}17)\end{cases}$$

解这个方程得

$$\begin{aligned} x&\equiv 17\times 1\times 3+4\times 13\times 9\quad(\text{mod}\ 4\times 17)\\ &\equiv 51+468(\text{mod}\ 68)\\ &\equiv 43\ (\text{mod}\ 68). \end{aligned}$$

3. (1)原方程可化为．

$$5x\equiv 13+72\equiv 85(\text{mod}\ 72).$$

$$\therefore\quad x\equiv 17(\text{mod}\ 72).$$

(2)因 $1540=4\times 5\times 7\times 11$，所以原方程可化为

$$\begin{cases}17x\equiv 229 \pmod 4\\ 17x\equiv 224 \pmod 5\\ 17x\equiv 229 \pmod 7\\ 17x\equiv 229 \pmod{11}\end{cases}$$ 即

$$\begin{cases}x\equiv 1 \pmod 4\\ x\equiv 2 \pmod 5\\ x\equiv 4 \pmod 7\\ x\equiv 7 \pmod{11}\end{cases}$$

$\therefore \quad m_1=4 \quad m_2=5 \quad m_3=7 \quad m_4=11$

$M_1=5\times7\times11$ ,$M_2=4\times7\times11$,$M_3=4\times5\times11$,$M_4=4\times5\times7$.

$\therefore \quad M_1\equiv1\times3\times3\equiv1 \pmod 4$

$M_2\equiv4\times2\times1\equiv3 \pmod 5$.

$M_3\equiv4\times5\times4\equiv80\equiv3 \pmod 7$

$M_4\equiv4\times5\times7\equiv140\equiv8 \pmod{11}$

$\therefore$ 可取 $M_1^{-1}=1$,$M_2^{-1}=2$,$M_3^{-1}=5$,$M_4^{-1}=7$

根据中国剩余定理,原方程的解为:

$x\equiv(5\times7\times11)\times1\times1+(4\times7\times11)\times2\times2+(4\times5\times11)\times5\times4+(4\times5\times7)\times7\times7 \pmod{5\times4\times7\times11}$

$\equiv385+1232+4400+6860 \pmod{1540}$

$\equiv385+1232+1320+700 \pmod{1540}$

$\equiv3637\equiv557 \pmod{1540}$.

4. **解**:设所求三个连续整数分别为 $x-1$,$x$,$x+1$,则

$$\begin{cases}x-1\equiv 0 \pmod 7 & ①\\ x\equiv 0 \pmod 8 & ②\\ x+1\equiv 0 \pmod 9 & ③\end{cases}$$

由①得 $x=7t+1$,$t$ 为整数.

代入②得，$7t+1\equiv 0 \pmod 8$.

$\therefore \quad t\equiv 1 \pmod 8$

设 $t=8k+1$，则 $x=7(8k+1)+1=56k+8$

代入③得.

$(56k+8)+1\equiv 0 \pmod 9$ $\therefore \quad k\equiv 0 \pmod 9$ 设 $k=9n$，则 $x=56,9n+8=504n+8$，$n$ 为整数.

所以，满足条件的最小的三个连续整数是 $n=1$ 时，即 511，512，513.

## B 组

设所求数为 $n$，根据题意，$n$ 一定可以写成 $n=2^x\cdot 3^y\cdot 5^z$

$\because \quad n$ 的 $\frac{1}{2}$ 是一个完全平方数.

$\therefore \quad x-1\equiv 0 \pmod 2$，$y\equiv 0 \pmod 2$，$z\equiv 0 \pmod 2$

又 $\because \quad n$ 的 $\frac{1}{3}$ 是一个整数的 3 次方.

$\therefore \quad x\equiv y-1\equiv z\equiv 0 \pmod 3$

又 $\because n$ 的 $\frac{1}{5}$ 是一个数的 5 次方.

$\therefore \quad x\equiv y\equiv z-1\equiv 0 \pmod 5$ 因此得到同余方程组.

$$\begin{cases} x\equiv 1 \pmod 2 \\ x\equiv 0 \pmod 3 \\ x\equiv 0 \pmod 5 \end{cases} \quad \begin{cases} y\equiv 0 \pmod 2 \\ y\equiv 1 \pmod 3 \\ y\equiv 0 \pmod 5 \end{cases} \quad \begin{matrix} z\equiv 0 \pmod 2 \\ z\equiv 0 \pmod 3 \\ z\equiv 1 \pmod 5 \end{matrix}$$

分别解这三个同余方程组，得.

$x\equiv 15 \pmod{30}$，$y\equiv 10 \pmod{30}$，$z\equiv 6 \pmod{30}$ 所以，最小正整数 $n$ 为，

$n=2^{15}\cdot 3^{10}\cdot 5^{6}$.

# 水平测试题

1. B.

2. D.

设符合条件的数为 $x$,则

$\begin{cases} x\equiv 5 \pmod 7 \\ x\equiv 2 \pmod 5 \\ x\equiv 1 \pmod 3 \end{cases}$ 解 这个同余方程,得 $x\equiv 82 \pmod{105}$.

∴ $x=105k+82$,又因 $100\leqslant 105k+82<1000$,所以 $1\leqslant k\leqslant 8$,且 $k$ 为整数. 这样的所有 $x$ 的和为 $105\times(1+2+3+\cdots+8)+82\times 8=105\times\dfrac{8\times 9}{2}+656=4436$.

3. D

4. B

$b=1^2-2^2+3^2-4^2+\cdots-1988^2+1989^2=1^2+(3^2-2^2)+(5^2-4^2)+\cdots+(1989^2-1988^2)=1+(3+2)\cdot 1+(5+4)\cdot 1+\cdots+(1989+1988)\cdot=1+2+3\cdots 1989=1989\times\dfrac{(1989+1)}{2}=1989\times 995$.

∴ $b\equiv(-2)\times 995\equiv -1990\equiv 1 \pmod{1991}$

5. C.

**提示**:因 $2^4\equiv 3 \pmod{13}$. 所以 $2^{12}\equiv 27\equiv 1 \pmod{13}$

$2^{1000}=(2^{12})^{83}\cdot 2^4\equiv 3 \pmod{13}$

6. D

设此数为 $x$,根据题意可得 . $x\equiv -1 \pmod{10}$,$x\equiv -1 \pmod 9$,…,$x\equiv -1 \pmod 2$. 根据同余式的性质 $x\equiv -1 (\bmod\ 7\times 8\times 9\times 5)$ 即 $x\equiv -1\equiv 2519 \pmod{2520}$.

7. B

由题意 $1059\equiv r(\text{mod } d)$，$1417(\text{mod } d)$，$2312\equiv r(\text{mod } d)$. 三式两两相减得，$895\equiv1253\equiv358\equiv0(\text{mod } d)$即 $d$ 是 895，1253，358 的公约数，而 $895=5\times179$，$1253=7\times179$，$358=2\times179$，所以 $d=179$，再代回同余式求得 $r=164$. 故 $d-r=15$.

8. A

$\because$ $8\equiv1(\text{mod } 7)\therefore 8^n\equiv1(\text{mod } 7)$（$n$ 为正整数）因此 $n=1\times8+2\times8^2+3\times8^3+\cdots+7\times8^7\equiv1+2+3+\cdots+7=\frac{7\times8}{2}\equiv28\equiv0(\text{mod } 7)$，即 $n$ 能被 7 整除.

又$\because$ $8\equiv-1(\text{mod } 9)$，$\therefore$ $8^n\equiv(-1)^n(\text{mod } 9)$，因此 $n=1\times8+2\times8^2+\cdots+7\times8^7\equiv-1+2-3+4-5+6-7\equiv-4\equiv5(\text{mod } 9)$. 即 $n$ 不能被 9 整除.

9. C

$\because$ $123456789\equiv1(\text{mod } 4)$.

$\therefore$ $(11111+a)(11111-b)\equiv1(\text{mod } 4)$

因此 $11111+a\equiv11111-b\equiv1(\text{mod } 4)$或 $11111+a\equiv11111-b\equiv3(\text{mod } 4)$，无论哪种情况，都可得到 $a+b\equiv0(\text{mod } 4)$.

10. B.

设自然数 $x$ 除 200 的余数是 8，则 $200\equiv8(\text{mod } x)$即 $192\equiv0(\text{mod } x)$. 所以 $x|192$. 又因 $192=3\times26$ 共有 14 个因数，逐一验算便知，符合条件的约数共有 8 个. 它们分别是 12，16，24，32，48，64，96，192.

11. 3.

12. 1.

13. 35.

因 $123\equiv333\equiv718(\text{mod } m)$，所以 $333-123\equiv718-333\equiv718-123\equiv0(\text{mod } m)$. 即 $210\equiv385\equiv595\equiv0(\text{mod } m)$.

$\therefore$ $m|210, m|385, m|595$.

$\therefore$ $m_{\max}=(210,385,595)=35$.

14. 102.

$\because\quad 1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $\therefore\quad S=\dfrac{101\times(101+1)\times(2\times 101+1)}{6}=101\times 17\times 203$. 因此 $S\equiv(-2)\times 17\times(-3)\equiv 102(\mathrm{mod}\ 103)$. 即 $S$ 被 103 除的余数是 102.

15. 911

因 $2003000\equiv 1(\mathrm{mod}\ 19)$, $2003000\equiv 6(\mathrm{mod}\ 7)$, $2003000\equiv 12.(\mathrm{mod}\ 13)$.

设这个七位数的后三位为 $x$. 则 $x\equiv -1\equiv 18(\mathrm{mod}\ 19)$, $x\equiv -6\equiv 1(\mathrm{mod}\ 7)$, $x\equiv -12\equiv 1(\mathrm{mod}\ 13)$.

解这个同余方程组得 $x\equiv 911(\mathrm{mod}\ 7\times 13\times 19)$.

所以后三位数是 911.

16. 4

$\because\quad 2002\equiv 4(\mathrm{mod}\ 9)$, 所以 $a=2002(1+2+3+\cdots+2002)\equiv 4\times\dfrac{2002\times(2002+1)}{2}\equiv 4\times 1001\times 2003\equiv 4\times 2\times 5\equiv 4(\mathrm{mod}\ 9)$.

17. 4;22,99,92 或 29.

设这个两位数为$\overline{ab}$,则 $10a+b\equiv 1(\mathrm{mod}\ 7)$, $10b+a\equiv 1(\mathrm{mod}\ 7)$. 两式相减得 $9(a-b)\equiv 0(\mathrm{mod}\ 7)$. 所以 $7\mid a-b$. $a-b=0$ 或 $a-b=7$ 或 $a-b=-7$. 这个两位数只可能是 11,22,33,44,55,66,77,88,99,92,81,70,18,29. 经验算知,只有 22,99,92 或 29 符合题意.

18. 8.

$$
\begin{aligned}
&1^4+2^4+3^4+\cdots+2003^4\\
\equiv&(1^4+2^4+3^4+\cdots+9^4)\times 200+1^4+2^4+3^4(\mathrm{mod}\ 10)\\
\equiv&1^4+2^4+3^4(\mathrm{mod}\ 10)\\
\equiv&1+6+1\equiv 8(\mathrm{mod}\ 10)
\end{aligned}
$$

19. 2

因$\underbrace{11\cdots1}_{2002个}\equiv0\pmod{11}$,

所以$\underbrace{22\cdots2}_{2002个}=2(\underbrace{11\cdots1}_{2002个}0+1)\equiv2\pmod{11}$

20. 29.

因 $5+6+12+14+23+29\equiv2\pmod 3$设剩下的五个数为 $a,b,c,d,e$ 且 $a+b+c=2(d+e)$. 则 $a+b+c+d+e=3(d+e)\equiv0\pmod 3$. 再设划去的数为 $x$,则 $x\equiv2\equiv-1\pmod 3$. 只能划去 5,14,23 或 29. 经验算只能划去 29. 得 $5+12+23=2(6+14)$.

21.

**解**:因 $91!=1\times2\times3\cdots\times19\times\cdots\times38\times\cdots\times57\times\cdots\times76\times\cdots\times91$,所以 $19^4|91!$,设 $91!=19^4\cdot A=19^5q+r(*)$. 这里 $A,q,r$ 都是正整数. 由整除性可知 $19^4|r$,$r=19^4n$,$n$ 也是正整数. 代入(*)式可得.

$19^4A=19^5q+19^4n$.

$\therefore\quad A=19q+n$

又$\because A=1\times2\times3\times\cdots\times18\times1\times$

$(19+1)\times(19+2)\times(19+3)\times\cdots\times(19+18)\times2\times$

$(2\times19+1)\times(2\times19+2)\times(2\times19+3)\times\cdots\times(2\times19+18)\times3\times$

$(3\times19+1)\times(3\times19+2)\times(3\times19+3)\times\cdots\times(3\times19+18)\times4\times$

$(4\times19+1)\times(4\times19+2)\times(4\times19+3)\times(4\times19+4)\times\cdots\times(4\times19+15)$

$\therefore A\equiv(1\times2\times3\times\cdots\times18)^4\times(1\times2\times3\times4)\times(1\times2\times3\times\cdots\times15)\pmod{19}$

$\equiv(1\times2\times3\times\cdots\times9\times(-9)\times(-8)\times\cdots\times(-1)]^4\times5\times[1\times2\times3\times\cdots\times9\times(-9)\times(-8)\times\cdots\times(-4)]\pmod{19}$

$\equiv 1^4\times 5\times(-4)\pmod{19}$

$\equiv -1\equiv 18\pmod{19}$

∴ $19q+n\equiv 18\pmod{19}$. 所以 $n=18$.

∴ $r=18\times 19^4$. 即用 $19^5$ 除 91! 的最小正余数是 $18\times 19^4$.

22.

**证明**:$105=3\times5\times7$,且$(3,5)=(5,7)=7,3)=1$

$15n^7+21n^5+35n^3+34n\equiv -n^3+n\equiv -n(n-1)(n+1)\pmod{3}$

若 $n\equiv 0\pmod{3}$,则 $n(n-1)(n+1)\equiv 0\pmod{3}$

若 $n\equiv 1\pmod{3}$,则 $n-1\equiv 0\pmod{3}$,仍有 $n(n-1)(n+1)\equiv 0\pmod{3}$

若 $n\equiv 2\pmod{3}$,则 $n(n-1)(n+1)\equiv 2\times1\times(2+1)\equiv 0\pmod{3}$

∴ 无论哪种情况,一定有 $n(n-1)(n+1)\equiv 0\pmod{3}$.

即 $15n^7+21n^5+35n^3+34n\equiv 0\pmod{3}$

同理可得:

$15n^7+21n^5+35n^3+34n\equiv n^5-n\equiv 0\pmod{5}$

$15n^7+21n^5+35n^3+34n\equiv n^7-n\equiv 0\pmod{7}$.

所以,$15n^7+21n^5+35n^3+34n\equiv 0\pmod{105}$,即.

$105\mid 15n^7+21n^5+35n^3+34n$.

23.

**解**:对任意正整数 $n$,都有

$n^2\equiv 0,1,4,9,6,5\pmod{10}$

∴ 符合题意的只能是 1,4,5,6,9 重复.

又因 $11\equiv 3\pmod{4}$, $99\equiv 3\pmod{4}$

$66\equiv 2\pmod{4}$ $55\equiv 3\pmod{4}$

∴ 完全平方数的末尾只能是"4"重复. 设这个数为 $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_5 4444}$,但

$\overline{a_na_{n-1}\cdots a_5 4444}=\overline{a_na_{n-1}\cdots a_5}\times 10^4+4444\equiv 4444 \pmod{16}$
$\equiv 12 \pmod{16}$

又因对任意正整 $n$，必有

$n\equiv 0,\pm 1,\pm 2,\pm 3,\pm 4,\pm 5,\pm 6,\pm 7,\pm 8 \pmod{16}$

$\therefore\quad n^2\equiv 0,1,4,9 \pmod{16}$.

故当重复 4 位或 4 位以上时，不完完全平方数，最长可重复 3 位．

又因 $1444=38^2$，所以满足条件的最小平方数是 1444.

**说明**：此题设及到整数的一条性质，即连续 $n$ 个自然数的乘积模 $n$ 同余于 0.

24.

**解**：$\lg 4444^{4444}=4444\lg 4444<4444\lg 10^4=4444\times 4<20000$

$\therefore 4444^{4444}$ 的位数小 20000，则 $A<20000\times 9=180000$，$A<199999$.

$\therefore B\leqslant 1+9+9+9+9+9=46$，$B$ 的数字之和 $S\leqslant 3+9=12$.

又因一个数与它的各位数字之和同余模 9. 所以 $S\equiv B \pmod 9$，$B\equiv A \pmod 9$，$A\equiv 4444^{4444} \pmod 9$.

$\therefore\quad S=4444^{4444}\equiv(-2)^{4444}\equiv 2^{4444}\equiv -2\equiv 7 \pmod 9$. 故 $S=7$.

即 $B$ 的各位数字之和为 7.

## 习题 3.1

### A 组

1. B 2. C 3. D 4. 3 5. $x=60k+83k$，$y=-26-36k$（$k$ 是整数） 6. 2:3:7:7.3

### B 组

1. $x=10-t$，$y=2t$（$t=0,1,2,\cdots 10$）.

2. $x=380-3k, y=1+2k, k=0,1,2,\cdots 126$,共有 127 组正整数解.

3. 由 $z=\frac{1}{7}[23-(2x+3y)]$知,$z=1,2$,从而得解$(2,4,1)$、$(5,2,1)$和$(3,1,2)$.

4. 由 $2x+3y=a$ 得 $x=\frac{a-y}{2}-y$,又 $x,y$ 是整数,故$\frac{a-y}{2}$也是整数.令$\frac{a-y}{2}=b$,则 $y=a-2b$,这时 $x=3b-a$,它们是方程 $2x+3y=a$ 的解.

## 习题 3.2

### A 组

1. $11^3=(y-x)(y^2+yx+x^2)$.

$\therefore \quad \begin{cases} y-x=1, \\ y^2+yx+x^2=11^3; \end{cases} \begin{cases} y-x=11, \\ y^2+yx+x^2=11^2; \end{cases}$

$\begin{cases} y-x=11^2, \\ y^2+yx+x^2=11; \end{cases} \begin{cases} y-x=113, \\ y^2+yx+x^2=1. \end{cases}$

在后三组中,因 $y>11$,所以 $y^2+yx+x^2>11^2$,故后三组均无正整数解.解第一组亦无正整数解.

2. 由 $x,y,z$ 为正整数且 $x\neq y\neq z$,不妨设 $x<y<z$,则有 $x\geqslant 1, y\geqslant 2, z\geqslant 3$.

$\therefore \quad \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}<\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=2,$

即 $a<2$,$\therefore \quad a=1$.

由$\frac{1}{x}<\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}<\frac{1}{x}+\frac{1}{x}+\frac{1}{x}=\frac{3}{x}$

即$\frac{1}{x}<a<\frac{3}{x}$,$\frac{1}{x}<1<\frac{3}{x}$,

$\therefore\quad 1<x<3.$

$\therefore\quad x=2,\frac{1}{2}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1,\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{2}.$

$\because\quad \frac{1}{y}<\frac{1}{y}+\frac{1}{z}<\frac{1}{y}+\frac{1}{y}=\frac{2}{y},$

即 $\frac{1}{y}<\frac{1}{2}<\frac{2}{y}$，$\therefore\quad 2<y<4.\ \therefore\quad y=3,\frac{1}{3}+\frac{1}{z}=\frac{1}{2},\therefore\quad z=6.$

$\therefore$ 方程$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=a$只有唯一正整数解$x=2,y=3,z=6.$

3. 原方程即$(2x+y)(2x-3y)=77.$

解$\begin{cases}2x+y=77,\\2x-3y=1;\end{cases}\begin{cases}2x+y=11,\\2x-3y=7\end{cases}$得$\begin{cases}x=29,\\y=19;\end{cases}\begin{cases}x=5,\\y=1.\end{cases}$

(另两个方程组的解为负整数)

4. 在方程$2xy-3y-y=6$两端同乘以2，再加3后得$4xy-6x=2y+3=15$，

即$(2y-3)(2x-1)=15.$

$$\begin{cases}2x-1=15,\\2y-3=1;\end{cases}\begin{cases}2x-1=5,\\2y-3=3;\end{cases}\begin{cases}2x-1=3,\\2y-3=5;\end{cases}\begin{cases}2x-1=1,\\2y-3=15;\end{cases}$$

$$\begin{cases}2x-1=-15,\\2y-3=-1;\end{cases}\begin{cases}2x-1=-5,\\2y-3=-3;\end{cases}\begin{cases}2x-1=-3,\\2y-3=-5;\end{cases}\begin{cases}2x-1=-1,\\2y-3=-15.\end{cases}$$

解得 $\begin{cases}x=8,\\y=2;\end{cases}\begin{cases}x=3,\\y=3;\end{cases}\begin{cases}x=2,\\y=4;\end{cases}\begin{cases}x=1,\\y=9;\end{cases}\begin{cases}x=-7,\\y=1;\end{cases}$

$\begin{cases}x=-2,\\y=0;\end{cases}\begin{cases}x=-1,\\y=-1;\end{cases}\begin{cases}x=0\\y=-6\end{cases}.$

## B 组

1. D　2. D　3. (31,2,32)或(95,0,94)　4. (6,3)或(12,3).

5. 若 $y=0$，$2^x=(z-1)(z+1)$，当 $z-1=2$ 时，$z=3$，$z+1=4$，$x=3$. 得一组解 $(x,y,z)=(3,0,3)$.

若 $y>0$，设 $x=2a+1$（$a\geqslant 0$ 为整数），$3^y=z^2-2^{2a+1}$，则 $z^2\equiv 0,1\pmod 3$.

$2^{2a+1}=(2^2)^a\cdot 2^1\equiv 1^a\cdot 2=\pmod 3$.

则 $z^2-2^2a+1\equiv 1$ 或 $2\pmod 3$，与 $3^y\equiv 0\pmod 3$ 矛盾.

设 $x=2a$（$a\geqslant 0$ 为整数），$3^y=(z-2^a)(z+2^a)$，则有 $z-2^a=1$，$z+2^a=3^y$，所以 $3^y=2^{a+1}+1$. 因此，当 $a=0$ 时，$(x,y,z)=(0,1,2)$.

当 $a\geqslant 1$ 时，$2^{2a+1}\equiv 0\pmod 4$. $3^y\equiv 3,1\pmod 4$.

设 $y=2b$（$b\geqslant 1$ 为整数），$2^{a+1}=3^{2b}-1=(3^b+1)\cdot(3^b-1)$，则 $3^b-1=2$，$3^b+1=4$，得 $b=1$，$y=2$. 故 $(x,y,z)=(4,2,5)$.

## 习题 3.3

1. **提示**：方程两边模 2.

2. **提示**：方程两边模 8，得.

$x^2+y^2\equiv 6\pmod 8$

因 $a^2\equiv 0,1,4\pmod 8$，所以

$x^2+y^2\equiv 0,1,4,2,5,8\pmod 8$ 矛盾.

3. (1) $\begin{cases} x=4+7t \\ y=5-9t \end{cases}$（$t$ 是整数）

**提示**：方程两边模 7，得

$9x\equiv 1\equiv 1+35\equiv 36\pmod 7$

$\therefore\quad x\equiv 4\pmod 7$

$\therefore\quad$ 设 $x=7t+4$ （$t$ 为整数）.

代入原方程，得 $y=5-9t$.

(2) $\begin{cases} x=2-k+t \\ y=3k \qquad (k,t\text{ 都是整数}) \\ z=2t+1 \end{cases}$

**提示**：两边模 3，得

$y \equiv 0 \pmod 3$

$\therefore \quad y=3k$（$k$ 为整数）

方程两边再模 2，得，

$z \equiv 1 \pmod 2$ $\therefore \quad z=2t+1$（$t$ 为整数）.

代入原方程可得，$x=2-k+t$.

4. **提示**：易知 $x,y$ 的奇偶性相同 .

若 $x,y$ 都是奇数，则

$x^2+y^2 \equiv 1+1 \equiv 2 \pmod 8$

而 $328 \equiv 0 \pmod 8$. 所以 $x,y$ 都不是奇数，都是偶数，设 $x=2m, y=2n$. $m,n$ 都是整数 .

$\therefore \quad (2m)^2+(2n)^2=328.$

$\therefore \quad m^2+n^2=82$

这个方程的正整数解是

$\begin{cases} m=1 \\ n=9 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} m=9 \\ n=1 \end{cases}$

所以原方程的正整数解是 $x=2, y=18$ 或 $x=18, y=2$.

5. **提示**：

因 $a^2 \equiv 0,1,4 \pmod 8$，$b^2 \equiv 0,1,4 \pmod 8$，$c^2 \equiv 0,1,4 \pmod 8$，但

$0+0+0 \equiv 0 \pmod 8$

$4+4+4 \equiv 4 \pmod 8$

$0+0+4 \equiv 4 \pmod 8$

$0+1+4 \equiv 5 \pmod 8$

$1+4+4 \equiv 9 \equiv 1 \pmod 8$

$1+1+1+ \equiv 3 \pmod 8$

$0+0+1 \equiv 1 \pmod 8$

$0+1+1 \equiv 2$(mod 8

$1+1+4 \equiv 6 \pmod 8$

所以 $x^2+y^2+z^2 \not\equiv 7 \pmod 8$

故原方程无整数解 .

这道题说明一切形如 $8n+7$ 的整数都不是三个整数的平方和 .

## 习题 3.4

### A 组

1. 23 或 53 或 83.

2. 设大马 $x$ 匹，中马 $y$ 匹，小马 $z$ 匹，有 6 种情况：

$$\begin{cases}x=2,\\y=30,\\z=68\end{cases}\begin{cases}x=5,\\y=25,\\z=70\end{cases}\begin{cases}x=8,\\y=20,\\z=72\end{cases}\begin{cases}x=11,\\y=15,\\z=74\end{cases}\begin{cases}x=14,\\y=10,\\z=76\end{cases}\begin{cases}x=17,\\y=5,\\z=78\end{cases}$$

3. 设大车 $x$ 辆，小车 $y$ 辆，有 4 种情况：

$$\begin{cases}x=7,\\y=0\end{cases}\quad\begin{cases}x=5,\\y=3\end{cases}\quad\begin{cases}x=3,\\y=6\end{cases}\quad\begin{cases}x=1,\\y=9\end{cases}$$

4. 设有 $x$ 道难题，$y$ 道容易题，其余为两人解出的题为 $z$ 道，得方程组

$$\begin{cases}x+y+z=100, & ①\\x+3y+2z=60\times3. & ②\end{cases}$$

①×2−②，得 $x-y=200-180=20$.

故难题多，难题比容易题多 20 道．

### B 组

1. 设小王、小刘、小李、小左、小张各做的题数为 $s,t,x,y,z$ 道，则 $t>z>y>x$，$t>s>x$，且

$$\frac{1}{t}+\frac{1}{z}+\frac{1}{y}+\frac{1}{x}=s. \qquad ①$$

由此得 $1<s\leqslant\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=2\frac{1}{12}$.

∴ $S=2$.

将 $S=2$ 代入①，得 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}=2. \qquad ②$

又由 $s>x$，知 $x=1$，代入②，得

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}=2-1=1.$$

$\because\quad y<z<t,$

$\therefore\quad \frac{1}{y}<\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}<\frac{3}{y},$

$\therefore\quad \frac{1}{y}<1<\frac{3}{y},\quad \therefore\quad 1<y<3,$

$\therefore\quad y=2.$

$\therefore\quad \frac{1}{z}+\frac{1}{t}=\frac{1}{2}$ ③

同样，$\frac{1}{z}<\frac{1}{z}+\frac{1}{t}<\frac{2}{z},$

即 $\frac{1}{z}<\frac{1}{2}<\frac{2}{z},\quad \therefore 2<z<4,$

$\therefore\quad z=3.$

把 $z=3$ 代入③得　$t=6.$

故小王、小刘、小李、小左、小张分别做了 2 道、6 道、1 道、2 道、3 道．

2. 每一轮三人得到的糖块数之和为 $r+q+p-3p=r+q-2p.$

$\because\quad r>q>p,$

$\therefore\quad r+q-2p=(r-p)+(q-p)>2.$

设他们共人了几轮，则

$$n(r+q-2p)=20+10+9=39. \quad ①$$

$\because\quad 39=1\times 39=3\times 13,$

而 $n$ 显然不为 1，$r+q-2p>2,$

$\therefore\quad n=3$ 或 $n=13.$

由于每个人所得糖块数是他拿到的纸片上数的总和减 $np$，由丙的情况得到：

$$9=18-np,\quad \therefore\quad np=9.$$

∴ $n\neq 13$，只有 $n=3$，∴ $p=3$，把 $n=3$，$p=3$ 代入①得 $r+q=19$.

又乙得的糖块总数为 10，最后一轮得到糖 $r-3$ 块，

∴ $r-3\leqslant 10$，$r\leqslant 13$.

若 $r\leqslant 12$，则乙最后一轮拿到的纸片为 $r$，所得糖数为 $r-p\leqslant q$，这样乙必定要在前两轮中再抽得一张 $q$ 或 $r$，这样乙得的总糖数一定大于等于 $(r+q)-2p=13$，这与乙得到的糖数为 10 块矛盾.

∴ $r>12$，进而 $r=13$，$p=19-r=6$.

综上，得 $p=3$，$q=6$，$r=13$.

甲、乙、丙三人在三轮中抽得的纸片数如下：

| 纸片 人员 / 轮次 | 甲 | 乙 | 丙 |
|---|---|---|---|
| 第一轮 | 13 | 3 | 6 |
| 第二轮 | 13 | 3 | 6 |
| 第三轮 | 3 | 13 | 6 |

# 水平测试题三

1. C　2. D　3. C

4. $\begin{cases} x=10-19u+6v, \\ y=v, \\ z=5u-2v \end{cases}$ （$u$，$v$ 是整数）.

5. $\begin{cases} x=3, \\ y=4, \\ z=1; \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=4, \\ y=2, \\ z=2. \end{cases}$

6. 设每人的捐款数为 $x$ 元，每班人数相同都是 $y$ 人，则 $y=m+11=n+9$，每班捐款 $xy$ 元，$y>11$.

又 $mn+9m+11n+145$

$=(9+n)m+11(n+9)+46$

$=(9+n)(m+11)+46$

$=y^2+46$,

$\therefore\quad y^2+46=xy$,

即 $y(x-y)=46$.

$\because\quad y>11$,

$\therefore\quad \begin{cases}x-y=1,\\y=46;\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x-y=2,\\y=23.\end{cases}$

$\therefore\quad \begin{cases}x=47,\\y=46;\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=25,\\y=23.\end{cases}$

答：当各班 46 人时，每人捐款 47 元；当各班 23 人时，每人捐款 25 元.

7. 设这队士兵有 $n$ 人，7 人一行可排 $x$ 行.

由题意，得 $n=3x+1=5y+2=7z+6, n>1000$.

$$\therefore\quad \begin{cases}3x+1=5y+2, & ①\\3x+1=7z+6. & ②\end{cases}$$

方程①的整数解为 $\begin{cases}x=2+5t,\\y=1+3t\end{cases}$ ($t$ 是整数).

代入②，得

$$z=\frac{1}{7}(6+15t-5)=\frac{1}{7}(15t+1)=2t+\frac{t+1}{7}.$$

$\because\quad x,y,z$ 是正整数，$t\geqslant 6$，$\therefore\quad z\geqslant 13, x\geqslant 32, y\geqslant 19$.

当 $y=13$ 时，$x=32, y=19$.

$\therefore\quad 7\times 13+6=97$.

$\because\quad 3,5,7$ 的最小公倍数是 105，

$\therefore\quad n=105k+97$.

$\because\quad n>1000$，$\quad\therefore\quad 97+105k>1000$.

$\therefore\quad k$ 为不小于 9 的整数

∴　当 $k=9$ 时，$n=97+105\times9=1042$.

答:这队士兵至少有 1042 人.

8. 由题意,设 $x,x+1,x+2$ 为一组勾股数,

则　$x^2+(x+1)^2=(x+2)^2$,

解得　$x=3,x=-1$(舍).

当 $x=3$ 时,$x+1=4,x+2=5$.

∴　命题成立.

9. 不妨设 $x\leqslant y\leqslant z$,则 $n^x(1+n^{y-x})=n^x\cdot n^{(z-x)}$,

∴　$1+n^{y-x}=n^{z-x}(n^x\neq0)$.　①

若 $y>x$,则 $z>x$,且 $z-x>y-x$,此时 $n^{y-x}(n^{z-y}-1)=1$. 显然 $n^{y-x}|1$.

但 $y-x>0$ 且由条件知 $n\neq1$,

∴　$y>x$ 不成立,　∴　$y=x$.

由①得　$1+1=n^{z-x},n^{z-x}=2$

∴　$n=2,z-x=1$.

∴　原方程的解为$\begin{cases}y-x,\\z=x+1,x\text{ 为任意正整数}.\\n=2\end{cases}$

10. 设$(x-36)(x-144)-1991=m^2$,则

$x^2-180x+3193=m^2$,

$(x-90)^2-4907=m^2$.

令 $x-90=k$,则 $k^2-4907=m^2$,

∴　$(k-m)(k+m)=7\times701=1\times4907$.

又　7,701 都是质数,且 $k-m<k+m$,

∴　$\begin{cases}k-m=1\\k+m=4907\end{cases}$　$\begin{cases}k-m=7\\k+m=701\end{cases}$

$\begin{cases}k-m=-4907\\k+m=-1\end{cases}$　$\begin{cases}k-m=-701\\k+m=-7\end{cases}$

由此得　$x=2544$ 或 $x=444$.