周春荔主编　奥林匹克数学普及讲座丛书(之一)

初中数学竞赛中的代数问题

周春荔　编著

中国物资出版社

图书在版编目(CIP)数据

初中数学竞赛中的代数问题/周春荔编著. —北京:
中国物资出版社,2004.8
(奥林匹克数学普及讲座丛书:1)
ISBN 7—5047—2199—9

Ⅰ.初… Ⅱ.周… Ⅲ.代数课—初中—教学参考资料
Ⅳ.G634.633

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 070193 号

责任编辑 黑俊贵
责任印制 方鹏远
责任校对 王 莉

中国物资出版社出版发行
网址:http://www.chph.cn
社址:北京市西城区月坛北街 25 号
电话:(010)68589540 邮编:100834
全国新华书店经销
北京才智印刷厂印刷

开本:850×1168mm 1/32 印张:9.75 字数:210 千字
2004 年 8 月第 1 版 2004 年 8 月第 1 次印刷
书号:ISBN 7—5047—2199—9/G·0459
印数:0001—8000 册
定价:15.00 元

(图书出现印装质量问题,本社负责调换)

目　　录

第1章　代数式基础

在初中代数中指出：用运算符号把数或表示数的字母连结而成的式子，叫代数式．

单独的一个数或一个字母，像$-1,0,a,x$也是代数式．

上述定义中的“数”，是我们学过的数或指定的数．其中的“字母”，必须是用来“表示数的字母”．一般英语书上的字母不是代数式，因为在使用的场合没约定它代表数．

“用运算符号连结”，一般指加、减、乘、除、乘方、开方等运算．当然也可以是按一定意义下规定的运算．

用代数式总能表达一个意思．因此，代数式是数学语言中的词汇或短句．

要想掌握数学这个工具，就要学会认读代数式，会翻译其含义，并且会由代数式展开推理．这是学好代数，以至于学好数学的基本功．

§1.1　认读代数式

例1. 若n为整数，试说明下列代数式的意义：

(1)$2n$；(2)$2n+1$；(3)$3n+2$；(4)$4n+1$；(5)n^2；(6)n^{1995}．

答：(1)$2n$——2的倍数，偶数．

(2)$2n+1$—被2除余1的数，奇数．

(3)$3n+2$—被3除余2的数．

(4)$4n+1$—被4除余1的数．

(5)n^2——整数的平方．

(6)n^{1995}——整数n的1995次幂．

例 2. a、b、c 都是阿拉伯数码，且 $c\neq 0$，代数式 $c\times 10^2+b\times 10+a$的意义是什么？

答：$c\times 10^2+b\times 10+a$ 代表一个三位自然数．读作"c 百 b 拾 a 个".

一般地，若 a_0，a_1，…，a_n均为阿拉伯数码，且 $a_n\neq 0$，则 $\overline{a_n a_{n-1}\cdots a_2 a_1 a_0}$表示一个 $n+1$ 位的自然数，则

$$\overline{a_n a_{n-1}\cdots a_2 a_1 a_0}=a_n\times 10^n+a_{n-1}\times 10^{n-1}+\cdots+a_1\times 10+a_0.$$

这是 $n+1$ 位自然数的代数式表示．

例 3. 请用代数式表示"四个连续整数的乘积与 1 之和".

答：设 n 是整数，则四个连续整数之积与 1 之和表示为 $n(n+1)(n+2)(n+3)+1$.

例 4. M 表示 a 与 b 的和的平方，N 表示 a 与 b 的平方的和，则当 $a=7$，$b=-5$ 时，$M-N$ 的值是(　)

(A)-28.　(B)70.　(C)42.　(D)0.

答：M 表示 a 与 b 的和的平方，记 $M=(a+b)^2$，N 表示 a 与 b 的平方的和，即 $N=a+b^2$.

$$M-N=(a+b)^2-(a+b^2)$$

$$\therefore\quad M-N\Big|_{\substack{a=7\\ b=-5}}=(7+(-5))^2-(7+(-5)^2)$$

$$=(2)^2-7-25=-28.$$

选(A)

例 5. a、b、c 都是有理数，试说出下列式子的意义：

(1)$a+b=0$，(2)$ab>0$，(3)$ab\neq 0$，

(4)$ab=0$，(5)$ab=1$，

(6)$ab=-1$，(7)$a^2+b^2=0$，

(8)$(a-b)(b-c)(c-a)=0$

(9)$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\neq 0$

(10)$abc=0$.

答：(1)$a+b=0$——a、b 互为相反数；

(2)$ab>0$——a、b 为同号二数；

(3)$ab\neq0$——a、b 均不为 0；

(4)$ab=0$——a、b 中至少有一个为 0；

(5)$ab=1$——a、b 互为倒数；

(6)$ab=-1$——a、b 互为负倒数；

(7)$a^2+b^2=0$—a、b 均等于 0；

(8)$(a-b)(b-c)(c-a)=0$—a、b、c 中至少有两个相等；

(9)$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\neq0$—$a$、$b$、$c$ 不全相等；

(10)$abc=0$——a、b、c 中至少有一个为 0.

例 6. 语句："将一个三位数的个位数字放在左边第一位的前面，形成一个新的三位数. 新三位数是原来三位数的 3 倍减 8"这个内容用代数语言应如何表示？

答：设原三位数是$\overline{abc}=a\times10^2+b\times10+c$，则依题意，新三位数是

$\overline{cab}=c\times10^2+a\times10+b.$

已知语句表示为代数语言是

$\overline{cab}=3\,\overline{abc}-8.$

即　$c\times10^2+a\times10+b=3\times(a\times10^2+b\times10+c)-8.$

例 7. 海边有一堆红果，第一个猴子拿走$\frac{1}{5}$，扔掉一个；第二个猴子又拿走剩下的$\frac{1}{5}$，扔掉一个；第三个猴子又拿走剩下的$\frac{1}{5}$，再扔掉一个. 试用代数式表示所说的意思及剩下的红果数.

解：设红果数为 x.

第一个猴子：拿走$\frac{x}{5}$，剩下$\frac{4x}{5}-1$.

第二个猴子：拿走$\frac{1}{5}(\frac{4x}{5}-1)$，剩下$\frac{4}{5}(\frac{4x}{5}-1)-1$.

第三个猴子：拿走$\frac{1}{5}[\frac{4}{5}(\frac{4x}{5}-1)-1]$

最后剩下$\frac{4}{5}[\frac{4}{5}(\frac{4x}{5}-1)-1]-1$.

例 8. 甲杯中盛有 m 毫升红墨水，乙杯中盛有 m 毫升蓝墨水，从甲杯倒出 a 毫升到乙杯里($0<a<m$). 搅匀后，又从乙杯倒出 a 毫升到甲杯里，则这时(　)

(A)甲杯中混入的蓝墨水比乙杯中混入的红墨水少.

(B)甲杯中混入的蓝墨水比乙杯中混入的红墨水多.

(C)甲杯中混入的蓝墨水和乙杯中混入的红墨水相同.

(D)甲杯中混入的蓝墨水与乙杯中混入的红墨水多少关系不定.

解:从甲杯倒出 a 毫升红墨水到乙杯中以后,

乙杯中含红墨水的比例是$\frac{a}{m+a}$,

乙杯中含蓝墨水的比例是$\frac{m}{m+a}$,

再从乙杯倒出 a 毫升混合墨水到甲杯中以后,

乙杯中含有的红墨水的数量是

$$a-a\cdot\frac{a}{m+a}=\frac{ma}{m+a}\text{毫升} \qquad ①$$

乙杯中减少的蓝墨水的数量是

$$a\cdot\frac{m}{m+a}=\frac{ma}{m+a}\text{毫升} \qquad ②$$

∵ ①=②

∴ 选(C).

例 9. 六个单项式：$15a^2, xy, \frac{2}{3}a^2b^2, 0.11m^3, -abc, -\frac{3a^2b}{4}$ 的系数之和等于多少？

解:先写出各单项式的系数，然后再相加求和，这实际上是将语言和指令结合起来形成一个操作过程.

单项式：$15a^2, xy, \frac{2}{3}a^2b^2, 0.11m^3, -abc, -\frac{3}{4}a^2b$ 的系数依次是：

$15,1,\frac{2}{3},0.11,-1,-\frac{3}{4}$.

作加法求和

$$15+1+\frac{2}{3}+0.11+(-1)+(-\frac{3}{4})$$

$$=15+\frac{2}{3}+\frac{11}{100}-\frac{3}{4}$$

$$=15+\frac{200+33-225}{300}$$

$$=15\frac{8}{300}=15\frac{2}{75}.$$

例 10. 一个人上山和下山的路程都是 S，上山的速度为 V_1，下山的速度为 V_2，问这个人上山和下山的平均速度是多少？

解：上山时间为$\frac{S}{V_1}$，下山时间为$\frac{S}{V_2}$，上山、下山共走路程 $2S$，共用时间为$\frac{S}{V_1}+\frac{S}{V_2}$.

所以平均速度为 $$\frac{2S}{\frac{S}{V_1}+\frac{S}{V_2}}=\frac{2V_1V_2}{V_1+V_2}$$

答：这个人上山下山的平均速度是$\frac{2V_1V_2}{V_1+V_2}$.

应该注意的是，有些数学语言是规定了特定符号来表示的．如两个自然数 a、b 的最大公约数记为$(a、b)$，最小公倍数记为$[a、b]$，不超过 x 的最大整数记为$[x]$，x 的绝对值记为$|x|$等等．这些大都是一些"操作指令"，要作为数学语言的常用词汇记住并掌握．

习题 1.1

1. $(a+b)^2$ 读作(　)

(A)a 与 b 的平方之和.

(B)a 的平方与 b 之和.

(C)a 平方与 b 平方之和.

(D)a 与 b 之和的平方.

2. 若 a、b、c、d 为有理数,$\frac{1}{4}(a+b+c+d)$的意义是什么?

3. a、b、c 都是有理数,问$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$ 的意义是什么?

4. 某工厂去年的生产总值比前年增长 $a\%$,问前年比去年少的百分数是多少?

5. 一件工作,甲做 a 天可完成,乙做 b 天可完成. 问两人合做几天可以完成?

§1.2 图形关系的代数表示

有些数量关系是图形中的数量关系. 如果能表达这种关系为代数式,这样就初步地实现将数与形结合,使抽象与直观相结合,对培养数学能力是非常重要的.

例 1. 如图 1,一个周长为 a 的大圆板中挖去一个直径为 b 的圆洞及一个边长为 c 的正方形孔.

试用 a、b、c 三个量表示阴影部分面积.

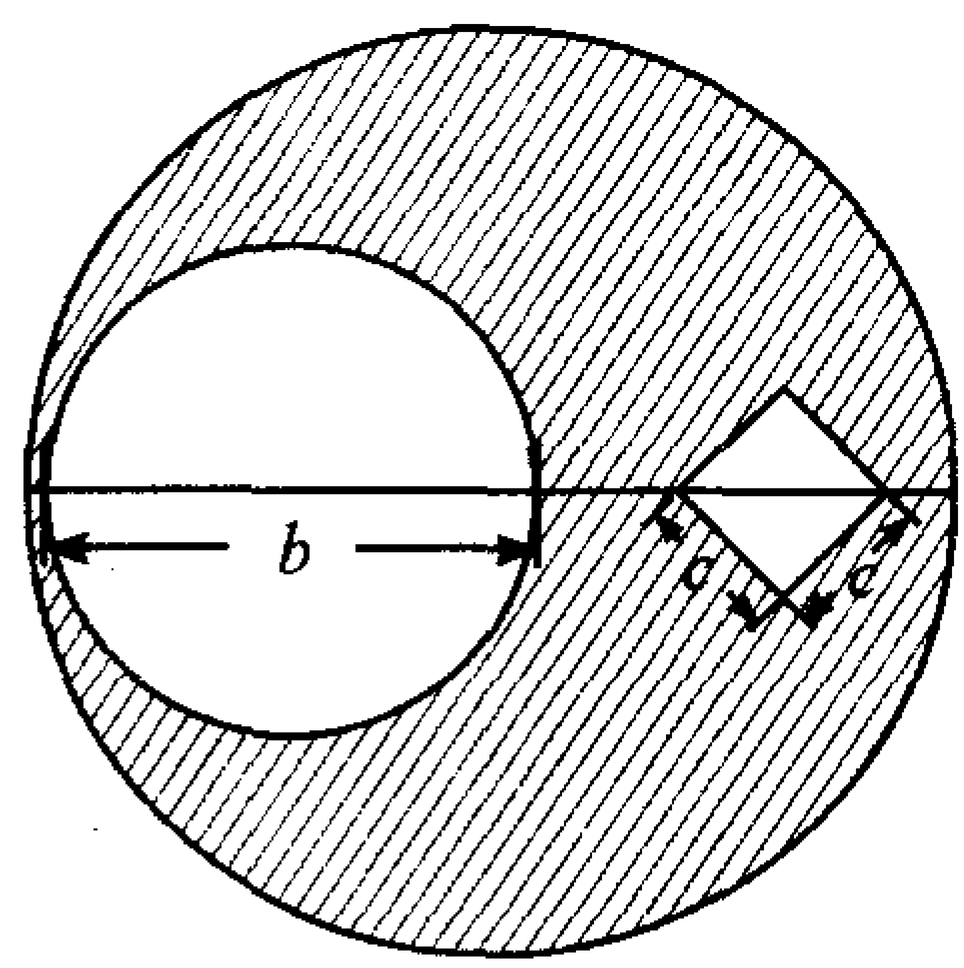


图 1

解:大圆板的面积为

$S_{大}=\pi R^2$ ……………… (*)

而 $a=2\pi R$.

$\therefore R=\dfrac{a}{2\pi}$ 代入(*)

得　$S_{大}=\pi(\frac{a}{2\pi})^2=\frac{a^2}{4\pi}$ ………………………………… (1)

而　$S_{小}=\pi(\frac{b}{2})^2=\frac{\pi b^2}{4}$ ………………………………… (2)

$S_{方}=c^2$

∴　阴影部分面积为$\frac{a^2}{4\pi}-\frac{\pi b^2}{4}-c^2$.

例 2. 如图 2,斜边长为 a 的等腰直角三角板,中间挖去了一个直径为 b 的小圆孔．试用 a、b 表示阴影部分的面积．

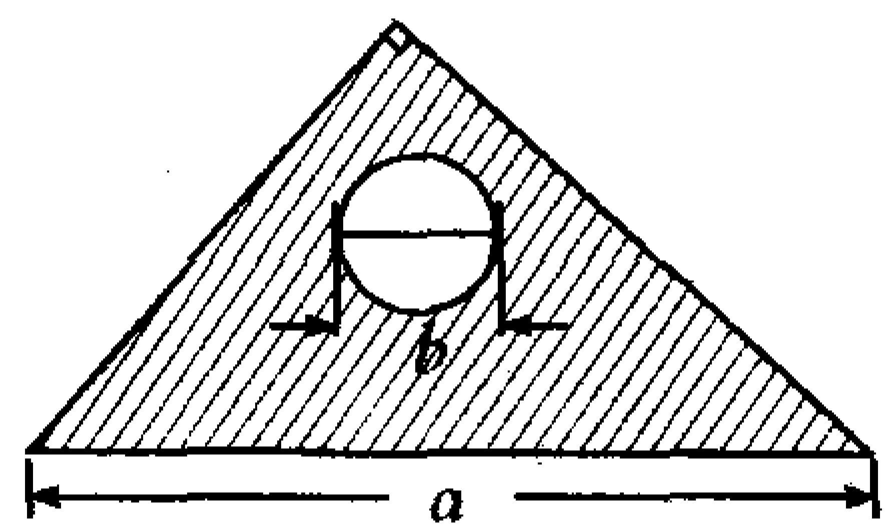


图 2

解:阴影部分面积等于等腰直角三角形面积 $S_{\triangle}$ 减去小圆面积 $S_{圆}$．

我们将四个斜边为 a 的等腰直角三角板拼在一起,恰可组成一个边长为 a 的正方形(图 3).

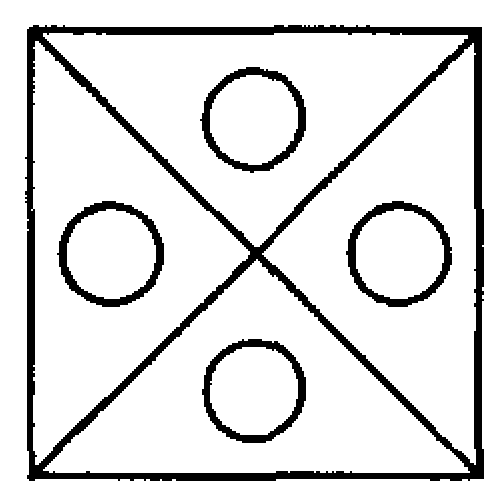


图 3

所以　$S_{\triangle}=\frac{a^2}{4}$.

直径为 b 的小圆面积为

$$S_{圆}=\pi(\frac{b}{2})^2=\frac{\pi b^2}{4}$$

∴　阴影部分面积的代数表示为

$\frac{a^2}{4}-\frac{\pi b^2}{4}$或$\frac{1}{4}(a^2-\pi b^2)$.

例 3. 如图 4,表示阴影部分面积的代数式是(　)

(A)　$ad+bc$.

(B)　$c(b-d)+d(a-c)$.

(C)　$ad+c(b-d)$.

(D)　$ab-cd$.

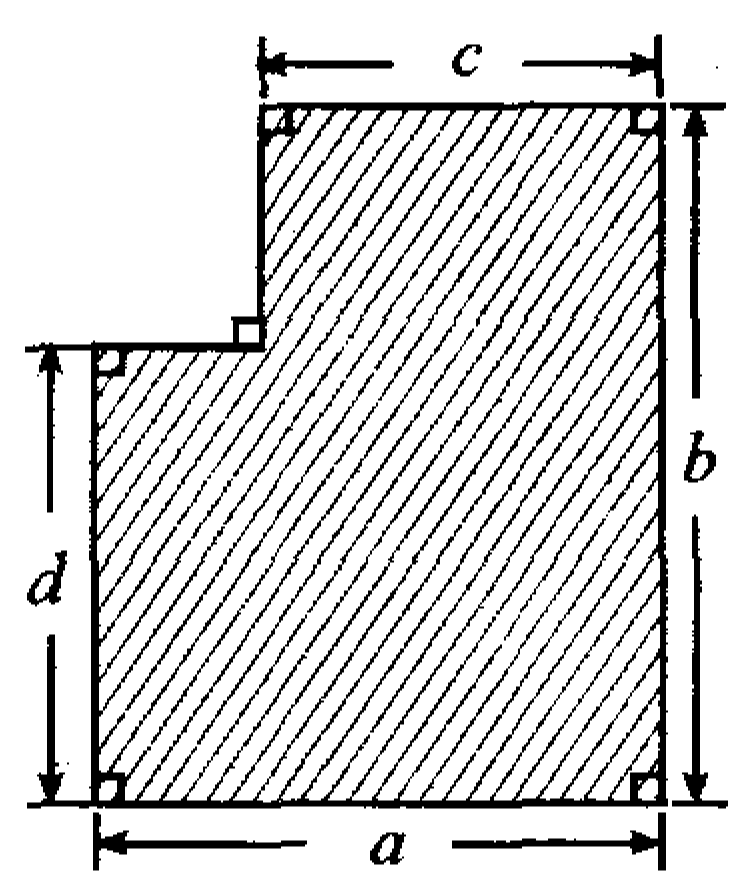


图 4

解:如图 5,阴影部分面积恰是上面小

长方形面积与下面大长方形面积之和.

下面大长方形面积　$S_{下}=a\times d$

上面小长方形面积　$S_{上}=c(b-d)$

∴　阴影部分面积为　$ad+c(b-d)$

选(C).

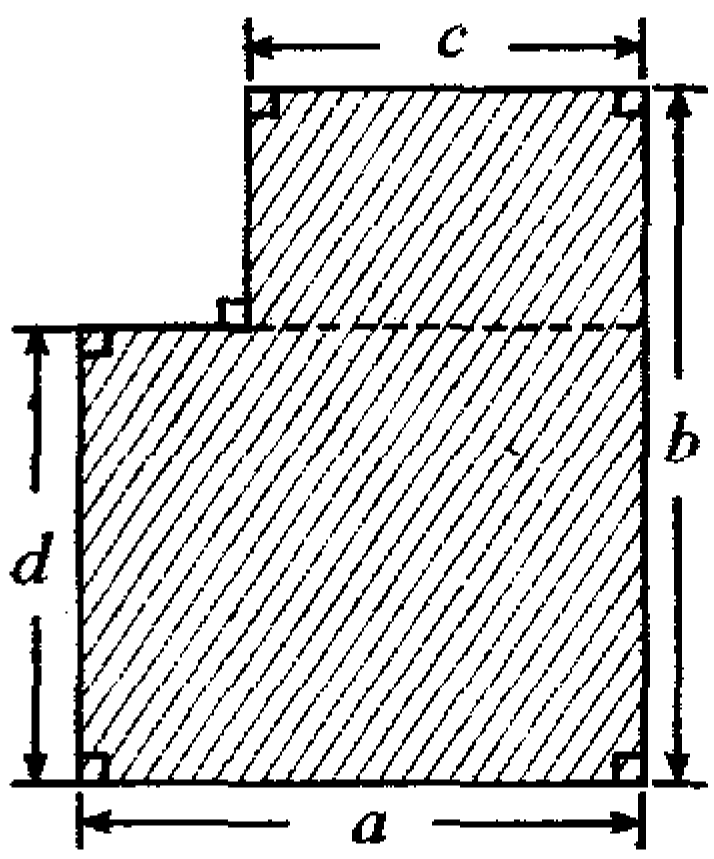


图 5

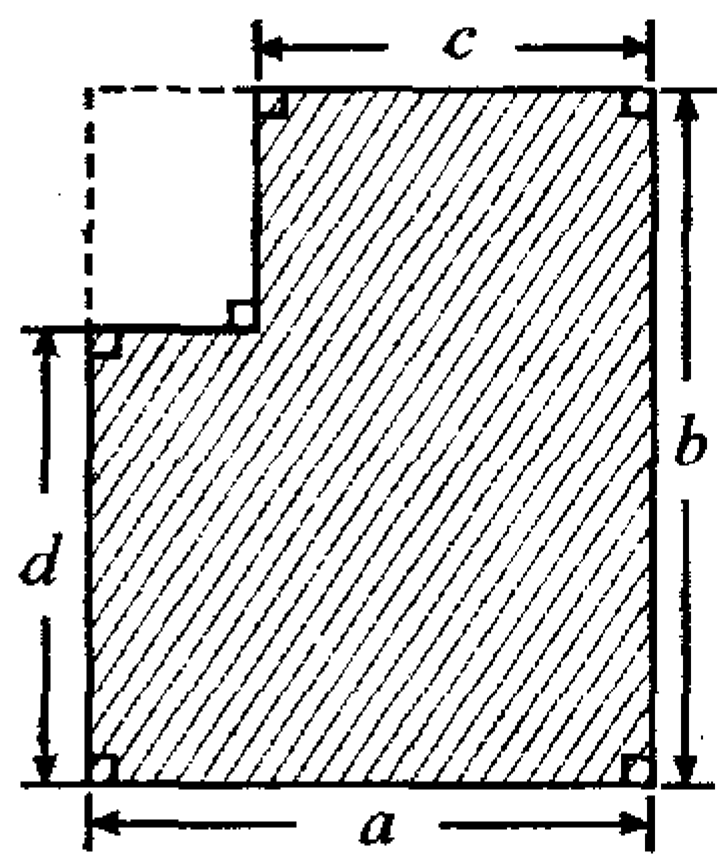


图 6

说明:计算阴影面积尚有其它方法.

1. 如图 6,阴影部分面积恰是一个大长方形面积减去一个小长方形面积.

大长方形面积　$S_{大}=a\times b$.

小长方形面积　$S_{小}=(a-c)(b-d)$.

所以阴影部分面积的代数表示为

$ab-(a-c)(b-d)$.

这个结果与选择支中的(A)、(B)、(C)、(D)哪个也“对不上号”. 其实这只是代数式的形式不同,经过变形后可以完全相同.

事实上$ab-(a-c)(b-d)$

$$
\begin{aligned}
&=ab-(ab-bc-ad+cd)\\
&=ab-ab+bc+ad-cd\\
&=ad+c(b-d).
\end{aligned}
$$

以上事实告诉我们,一个量的代数式表示形式并不唯一,但

变形后应当一致．另外，表达方法不同得到的表示形式也会存在差异，所以应求最直接最简单的表示方法．再有同一块面积两种不同形式的表示应当相等．也就是

$ad+c(b-d)=ab-(a-c)(b-d)$.

这表明，我们利用图形证明了代数式的相等．这为我们利用图形证明提供了契机．

2. 如图 7，将阴影部分面积分为左、右两个长方形面积之和，会得出阴影图形的面积表示为$(a-c)d+b\times c$.

当然，这与 $ad+c(b-d)$只是形式上不同．事实上

$(a-c)d+bc=ad-cd+bc=ad+c(b-d)$

所以选(C).

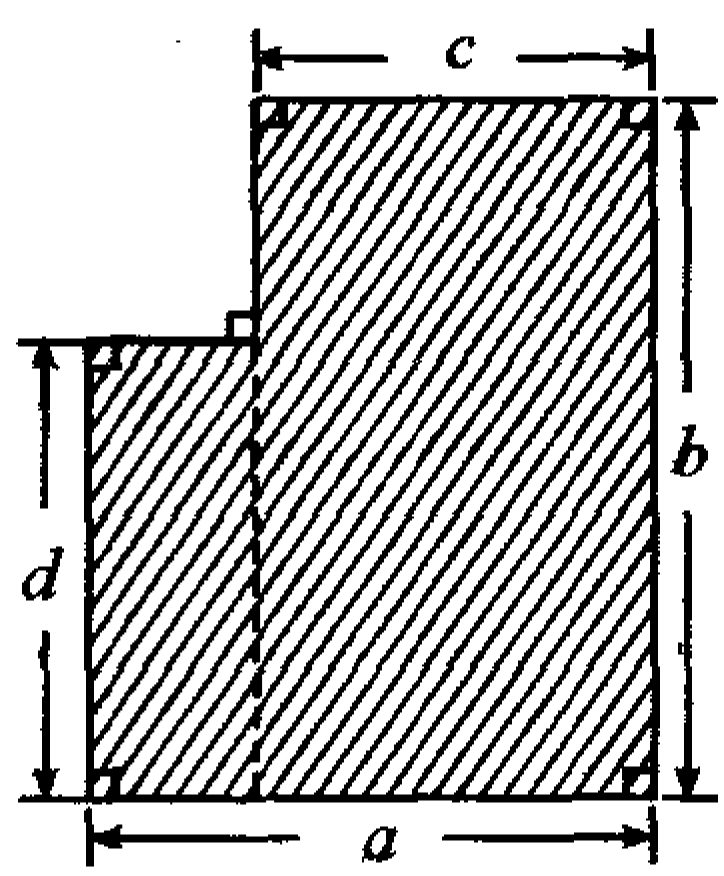


图 7

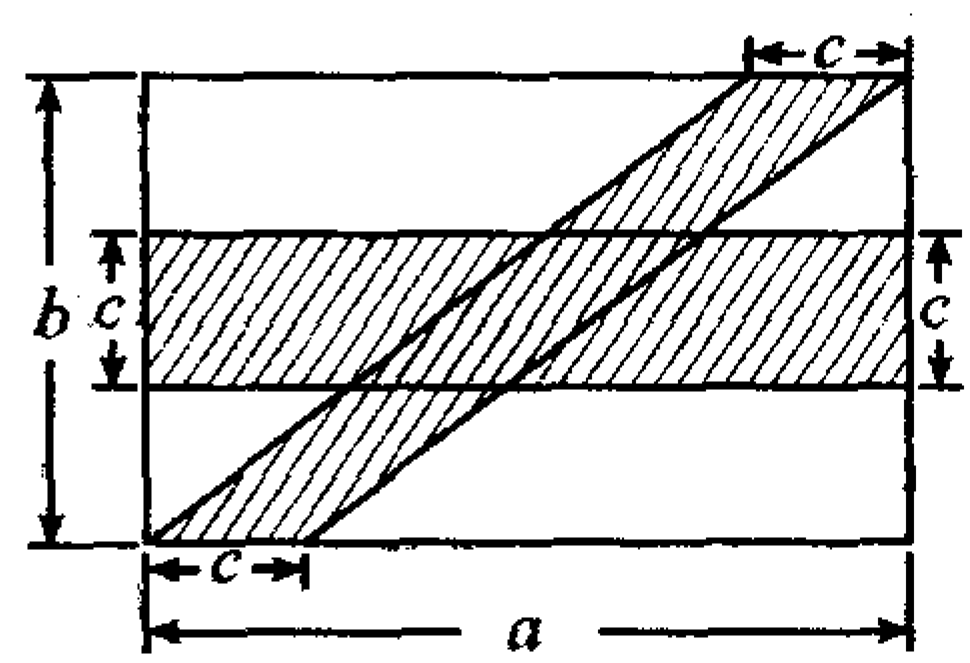


图 8

例 4. 如图 8，是一个长为 a，宽为 b 的矩形，两个阴影图形一个是一对长为 c 的底边在矩形对边上的平行四边形，另一个是一对长为 c 的底边在矩形另一组对边上的矩形．

试写出用 a、b、c 表示矩形中未涂阴影部分面积的代数式．

解 1：大矩形面积为 ab，两个阴影平行四边形（其中一个为长方形）面积分别为 ac 与 bc，重叠部分面积为 c^2.

所以未涂阴影部分面积为

$ab-ac-bc+c^2$.

解 2：如图 9，将阴影部分等积变形移到长方形边上，两个阴

影部分面积为 ac 与 bc，重叠部分面积为 c^2 均为改变．所以未涂阴影部分面积为空白矩形的面积，它的代数表示为

$$(a-c)(b-c).$$

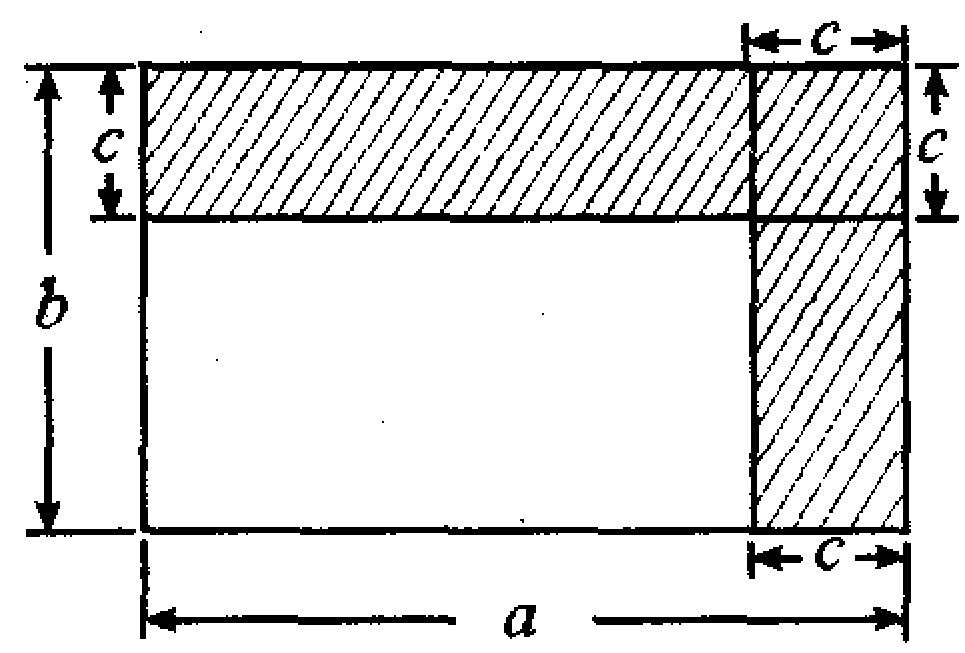


图 9

表面看形式上与解 1 的结果不同，但实质是一样的，因为

$$(a-c)(b-c)=ab-bc-ac+c^2.$$

这就是解 1 的结果．

例 5. 如图 10，边长为 a，b 的两个正方形拼在一起．试写出$\triangle ABC$面积的代数表达式．

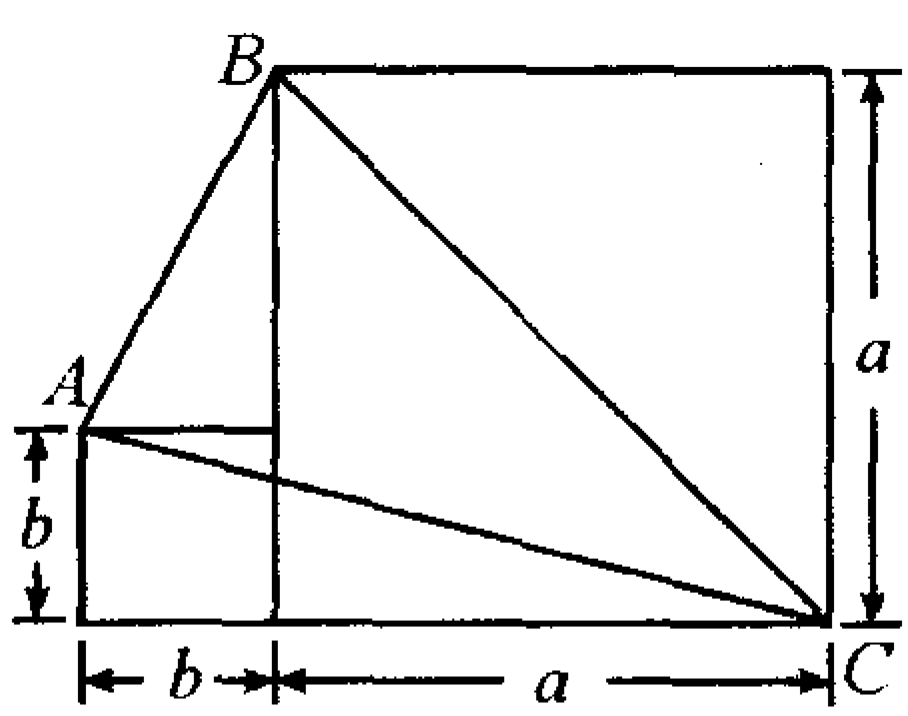


图 10

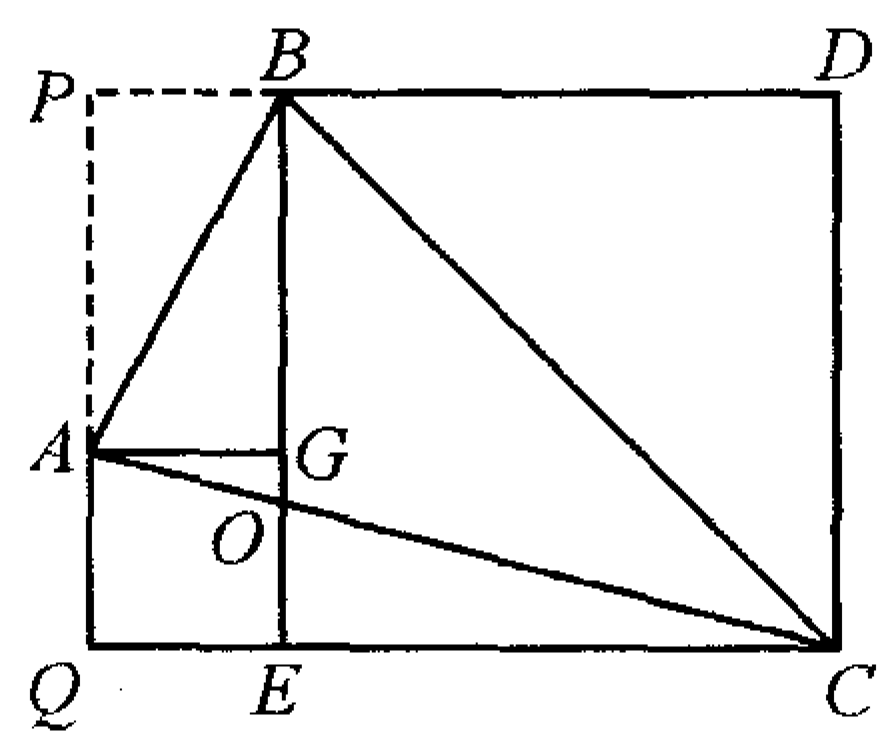


图 11

解：如图 11，延长 DB，QA 交于 P．也就是补成一个大矩形 $PQCD$．则$\triangle ABC$的面积等于矩形 $PQCD$ 面积减去$\triangle AQC$，$\triangle BCD$及$\triangle APB$的面积．

即　$\triangle ABC$面积的代数表示为

$$(a+b)\times a-\frac{1}{2}(a+b)\times b-\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{2}b(a-b)$$

$$=a^2+ab-\frac{1}{2}ab-\frac{1}{2}b^2-\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}b^2$$

$$=\frac{1}{2}a^2.$$

说明：有些同学得出代数表示为

$$(a+b)\times a-\frac{1}{2}(a+b)\times b-\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{2}b(a-b).$$

结果是正确的，但并没有简化，而简化后的结果得$\frac{1}{2}a^2$，又会令你大吃一惊！其实△ABC的面积确实为$\frac{1}{2}a^2$.

因为，连 AE，$AECB$ 是个梯形，△AOB 与△EOC 面积相等. 所以，△ABC 面积等于△BEC 面积，即为$\frac{a^2}{2}$.

例 6. 如图 12，13 个正方形纸片恰拼成一个大矩形，其中编号为①，②，③的三个小正方形的边长分别为 x、y、z.

试写出用 x、y、z 表示大矩形的长 AB 和宽 CB 的代数式.

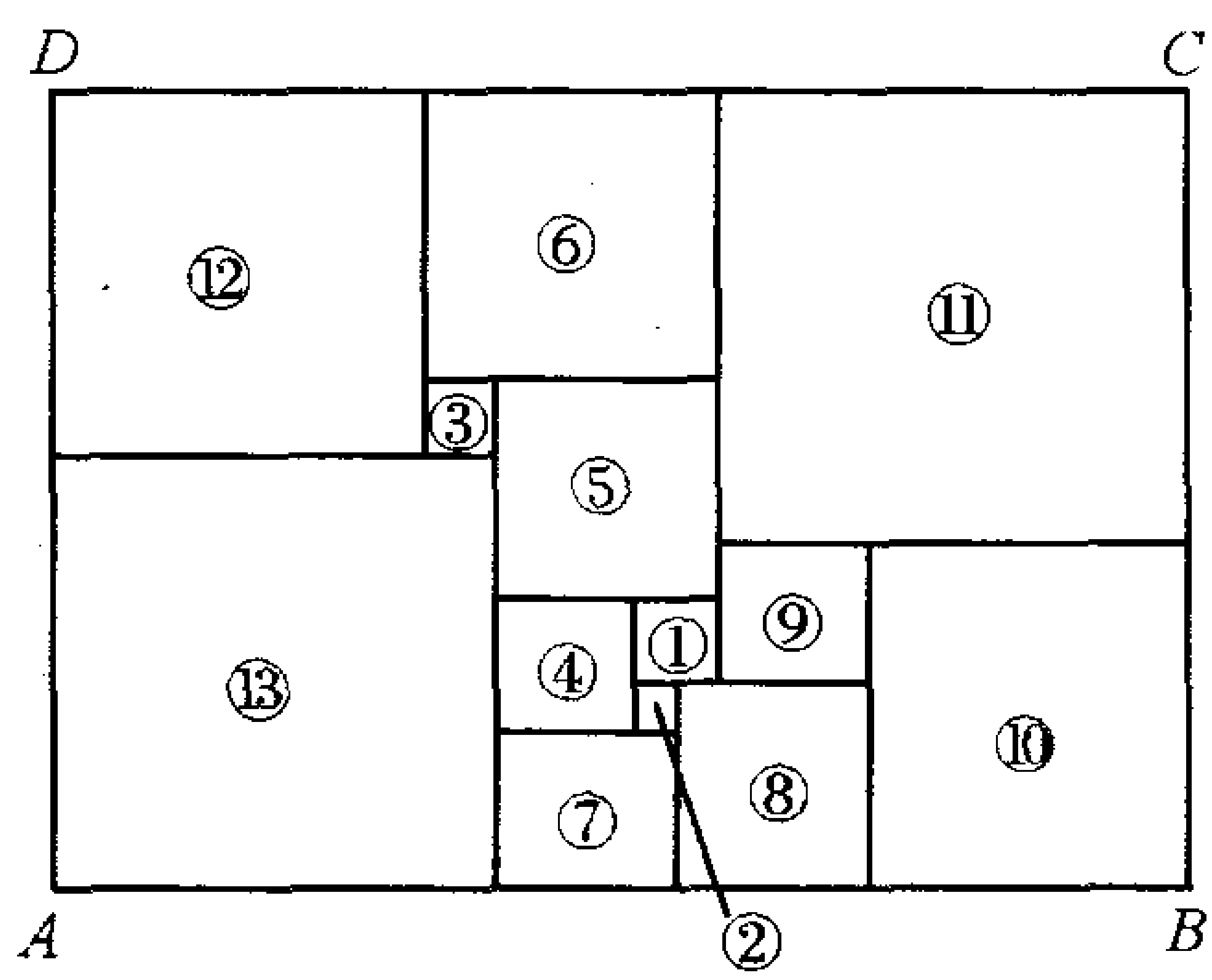


图 12

解：我们把小矩形编号

①的边长为　x；

②的边长为　y；

③的边长为　z；观察图形可见：

④的边长为　$x+y$；

⑤的边长为　$2x+y$；

⑥的边长为　$2x+y+z$；

⑦的边长为　$x+2y$；

⑧的边长为　$x+3y$；

⑨的边长为　$(x+2y)+(x+3y)-(2x+y)=4y$；

⑩的边长为　$x+7y$；

⑪的边长为　$x+(2x+y)+(2x+y+z)-4y=5x-2y+z$；

⑫的边长为　$2x+y+2z$;

⑬的边长为　$(2x+y)+(x+y)+(x+2y)-z=4x+4y-z$.

所以长 AB 的代数式表示为

$(4x+4y-z)+(x+2y)+(x+3y)+(x+7y)=7x+16y-z$.

宽 CB 的代数式表示为

$(5x-2y+z)+(x+7y)=6x+5y+z$.

答:大矩形 $ABCD$ 的长宽用 x、y、z 的代数表示为

长 AB:$7x+16y-z$　　宽 CB:$6x+5y+z$

当然由于计算角度不同,表达式形式可以不同.

以上六例都是结合图形,发现关系列出代数式,发现关系,列出表达关系的代数式的练习会对我们今后学习打下好的基础.

习题 1.2

1. 如图 13 所示,试用两种方法写出用 a、b 表示大正方形面积的代数式.并说明 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$.

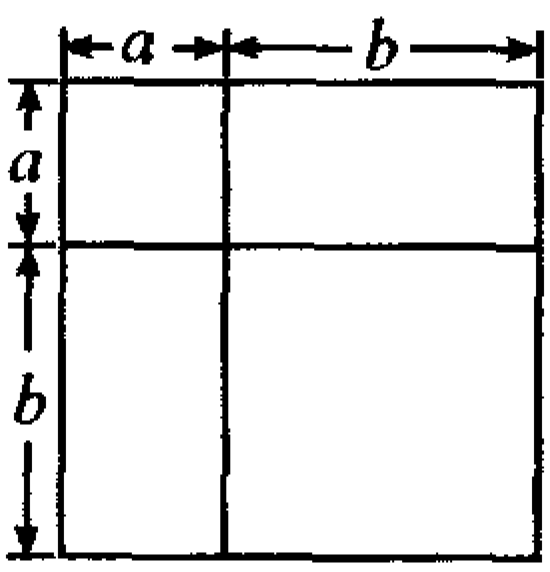


图 13

2. 如图 14,请用两种方法写出用 a、b、c、m、n 表示大矩形面积的代数式表达式,并说明

$(a+b+c)(m+n)=am+bm+cm+an+bn+cn$.

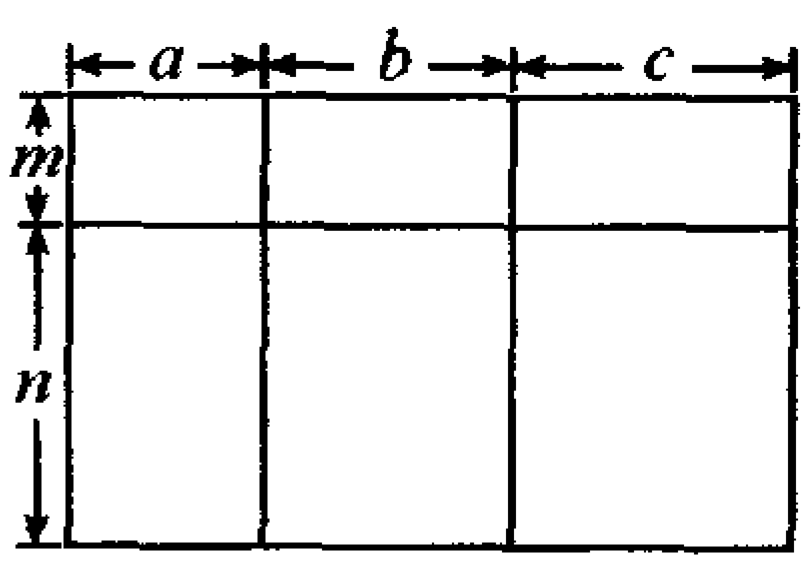


图 14

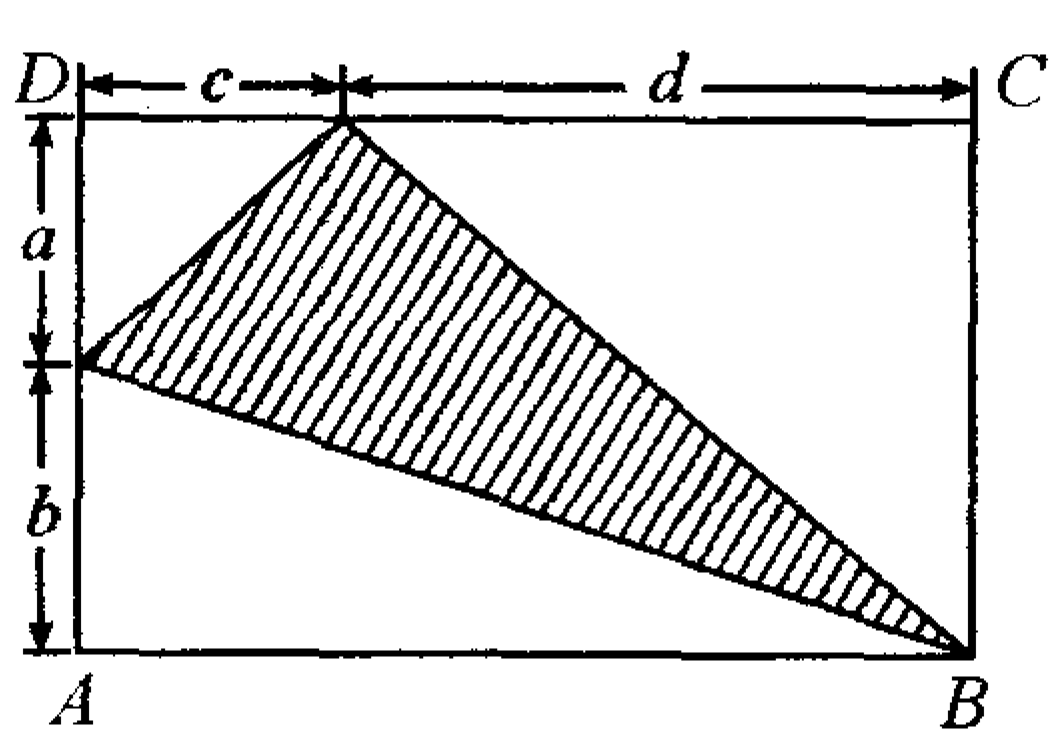


图 15

3. 如图 15,试用 a、b、c、d 写出大矩形中内接的阴影三角形面积的代数表达式.

4. 如图 16,圆 O 中,半径 OA 与 OB 成直角,$OB=OA=r$,M 是 OB 中点. 试写出阴影部分图形面积的表达式.

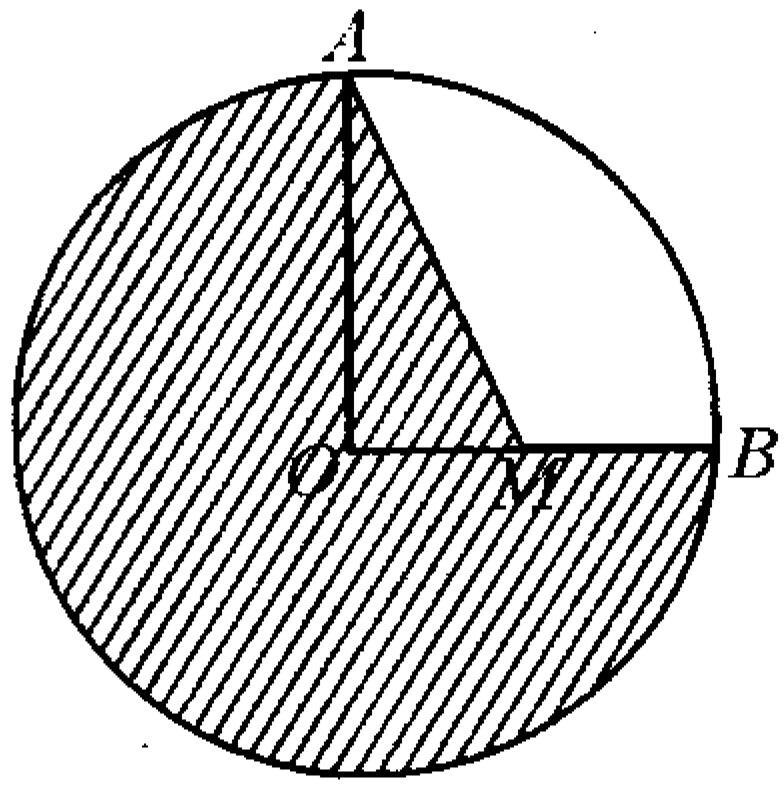


图 16

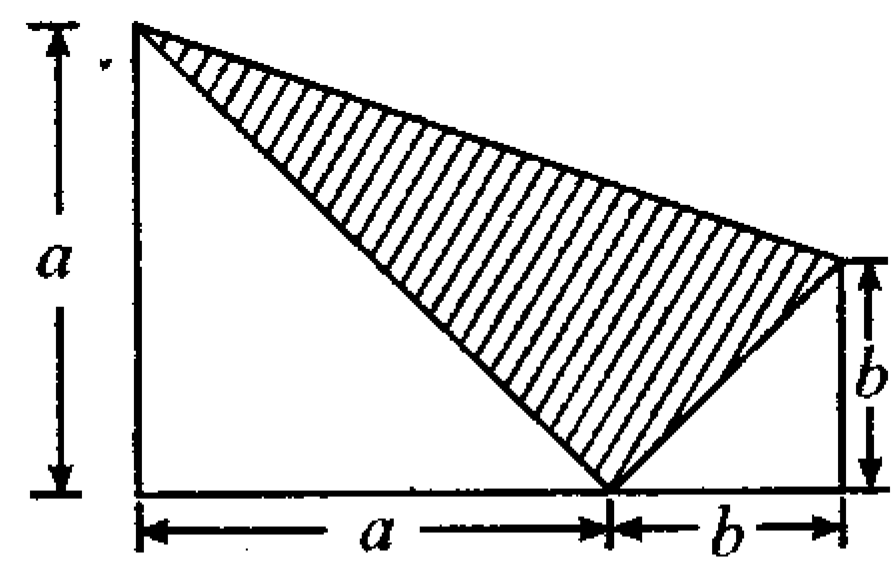


图 17

5. 如图 17,试写出用 a,b 表示阴影部分面积的代数表达式.

§1.3　通过一般化的算术四则学习代数式

在学习算术的过程中,大家做过许多类型相同的四则应用题. 比如"和差问题"、"鸡兔问题"、"工程问题"、"行程问题"等. 每类问题都是一种数学模型,都有特定的求解方式. 比如"和差问题":已知大小二数和与大小二数之差,求两数,其公式是

大数=(和+差)÷2;

小数=(和-差)÷2.

我们只要用文字(英文字母)来代替具体的数,变为已知大小二数之和为 a,大小二数之差为 b,求两数的问题.

设大数为 x,小数为 y,则上面的公式可以写成

$$x=\frac{a+b}{2},y=\frac{a-b}{2}.$$

这样一来,我们利用了字母来代表数,所解决的已经不是具体某个"和差问题",而是一般化了的"和差问题". 这时我们表面上是"明修栈道",实际上已经"暗渡陈仓",悄悄地进入了代数

学的领地.

学习代数式,一方面是给出代数式会理解其所代表的意义,更重要的是给出日常语言,要会表示成代数式.

例 1. x 的$\frac{4}{5}$与$\frac{1}{3}$的差是(　)

(A)$\frac{4}{5}x-\frac{1}{3}x$　　(B)$\frac{4}{5}x-\frac{1}{3}$

(C)$\frac{4}{5}(x-\frac{1}{3})$　　(D)$\frac{5}{4}x+3$

答:应选(B).

请你思考为什么选(A)、(C)、(D)都不正确,这对认读代数式是有好处的.

例 2. n 是整数,那么被 3 整除并且商恰为 n 的那个数是(　)

(A)$\frac{n}{3}$　(B)$n+3$　(C)$3n$　(D)n^3

答:被 3 整除的商恰为 n 的数是 $3n$. 选(C).

例 3. 认读代数式

$a+b^2$,a^2+b,$(a+b)^2$,a^2+b^2

答:$a+b^2$ 读作 a 与 b 的平方之和.

或　a 加上 b 的平方.

a^2+b 读作 a 的平方加上 b.

或　a 的平方与 b 之和.

$(a+b)^2$ 读作 a 与 b 之和的完全平方

或　a 加 b 的完全平方.

a^2+b^2 读作 a 平方与 b 平方之和

或　a 平方加上 b 平方.

需要注意的是$(\quad)^2$ 读作完全平方,以表示 $a+b^2$ 和 $(a+b)^2$读法意义上的区别. 比如$(a+b-c)^2$ 读作 a 加 b 减 c 的完全平方.

例 4. 若 a、b、c 都是阿拉伯数码，且 $c\neq0$

(1)代数式 $c\times10^2+b\times10+a$ 的意义是什么？

(2)代数式 $c\times10^3+c\times10^2+c\times10+c$ 的意义是什么？

(3)代数式$\frac{a+b+c}{3}$的意义是什么？

答：(1)$c\times10^2+b\times10+a$ 代表一个三位自然数，读作"c 百 b 拾 a 个".

(2)$c\times10^3+c\times10^2+c\times10+c$ 代表一个四位自然数，这个四位数的数码都相同，且不为 0.

容易看出，这样的四位数只有 1111，2222，3333，4444，5555，6666，7777，8888，9999 共九个.

(3)$\frac{a+b+c}{3}$其意义是"a、b、c 三数之和的三分之一"，也可读作"a、b、c 三数的平均数".

至于学习将日常语句翻译成代数式，通过"一般化的算术四则题"是极好的手段. 其好处是，一可复习算术问题解法；二又引申了算术问题解法，将过去一个个解具体的算术四则问题，变为一般化地解一类算术四则问题，由"个别生产"变成了"批量生产"；三可熟悉以文字代表数的运算，为学好代数式，向代数过渡打好基础.

例 5. 今有鸡兔同笼，共有 a 个头，b 个足，问鸡和兔各多少只？

解：设想 a 只都是兔子，则共有 $4a$ 只脚. 比题设 b 只脚多了 $4a-b$ 只脚，什么原因呢？只缘一只鸡当作一只兔子看待，这就多出 $4-2$ 只脚. 所以

鸡的只数应为$(4a-b)\div(4-2)=\frac{4a-b}{2}$.

兔子只数是 $a-(4a-b)\div(4-2)=a-\frac{4a-b}{2}=\frac{b-2a}{2}$.

显然问题有解应在 $4a>b>2a$，且 b 是偶数的条件下.

在解本题过程中 $4a$,$4a-b$,$\frac{4a-b}{2}$,$\frac{b-2a}{2}$都是代数式,都是在将日常语言翻译成数学语言过程中形成的.

例 6. 甲、乙、丙、丁四个数的平均数是 p,甲、乙、丙三数的平均数是 q,求丁数.

解:这里 p 和 q 要看作已知数,依题意,甲、乙,丙,丁四数之和为 $4p$,甲、乙、丙三数之和是 $3q$. 因此,丁数是 $4p-3q$.

例 7. 每公斤 45 元的 A 类花茶 m 公斤与每公斤 65 元的 B 类花茶 n 公斤混合成 C 类花茶出售. 问这 C 类花茶每公斤应售多少元?

解:每公斤 45 元的 A 类花茶 m 公斤共值 $45m$ 元. 每公斤 65 元的 B 类花茶 n 公斤共值 $65n$ 元. 混合为 C 类花茶 $m+n$ 公斤,共值 $45m+65n$ 元,所以 C 类花茶每公斤应售

$$\frac{45m+65n}{m+n}(\text{元}).$$

例 8. 杯子中有大半杯水,第二天较第一天减少了 10%,第三天又较第二天增加了 10%,那么第三天杯中的水量与第一天杯中水量之比等于多少?

解:设杯中第一天原有水量为 a,第二天杯中水量应为$a\times(1-10\%)=0.9a$.

第三天杯中水量为

$$(0.9a)\times(1+10\%)=0.9\times1.1\times a.$$

第三天杯中水量与第一天杯中水量之比为

$$\frac{0.9\times1.1\times a}{a}=0.99.$$

答:第三天杯中的水量与第一天杯中水量之比为 0.99.

例 9. A、B 两地为沿江的两个城市,张明乘船从 A 出发以每小时 v_1 千米的速度顺流而下到 B 地,并立即以每小时 v_2 千米的速度逆流而上返回 A 地. 问张明往返一次的平均速度是多少?

解：设 A、B 两地沿江航程为 S 千米．

张明以 v_1 千米/小时的速度乘船从 A 到 B 顺水行 S 千米，共用了 $\frac{S}{v_1}$ 小时．以 v_2 千米/小时的速度乘船从 B 到 A 逆水行 S 千米，共用了 $\frac{S}{v_2}$ 小时．

因此，张明从 A 到 B 再到 A 往返一次，共用了 $\frac{S}{v_1}+\frac{S}{v_2}$ 小时，行程为 $2S$ 千米．

所以平均速度为

$$\frac{2S}{\frac{S}{v_1}+\frac{S}{v_2}}=\frac{2v_1v_2}{v_1+v_2}\text{（千米/小时）}$$

在本题求解过程中，引入 S 这个未知数，最后消去了，可见，平均速度只与 v_1 与 v_2 有关，与所行路程无关．并且平均速度并不等于 $\frac{v_1+v_2}{2}$，而是等于 $\frac{2v_1v_2}{v_1+v_2}$. 大家可以看到，用文字代替数来研究问题，往往能看出在算术四则中不易看出的数量关系．

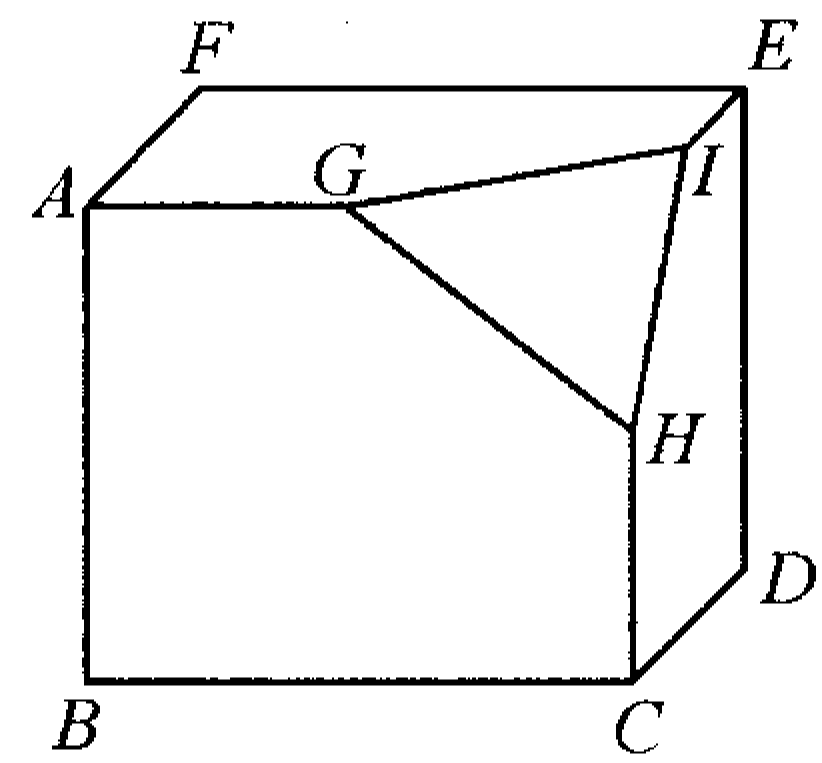
我们通过将算术题中日常生活语言翻译成代数式，又将两个代数式之间用等号联结，就轻而易举地认识到一些一般性的深层次的道理，看来，通过“一般化的算术四则题”学会将日常语言翻译成代数式，为进一步学习简易方程准备了必要的条件．

习题 1.3

1. 一个数减 a 的结果乘以 m 所得之积加上 b 的结果再除以 n 等于 c. 求这个数．

2. 今有 m 个数的平均数等于 p，再添上 n 个数后所得 $m+n$ 个数的平均数等于 q，求所添加的 n 个数的平均数等于多少．

3. 小红去商店买练习本，它所带的钱若买 m 个练习本尚余 a 元，若买 n 个练习本则不足 b 元($m<n$). 问每个练习本多少钱，小红共带多少钱？



4. 火车通过观察者身边需要 t_1 秒，通过 l 米长的桥需要 t_2 秒，火车通过桥的时间从车头进入桥梁算起到车尾离开桥梁为止．试求火车的长度和速度．

5. 把棱长为 2 厘米的正方体的一角削去，其中 AG 和 HC 的长均为 x，IE 的长为 $\frac{1}{2}x$. 求多边形 $ABCHG$，$AGIEF$ 及 $CDEIH$ 的面积之和．

§1.4 由代数式展开推理

作为代数式基本功的训练，要学习一些利用代数式的运算展开的推理．

例 1. 证明一个奇数与一个偶数之和是奇数．

分析：在小学阶段奇数加偶数等于奇数，是靠直接观察概括的结论．实际上并没有证明任一个奇数与任一个偶数之和都是奇数．现在我们通过奇数与偶数的代数式表示来进行证明．

证明：设任一个奇数 $a=2n+1$，其中 n 是整数，任一个偶数 $b=2m$，其中 m 是整数．

则 $a+b=(2n+1)+2m=2(m+n)+1=2N+1$

其中 $N=m+n$ 是个整数，所以 $2N+1$ 是个奇数．因此，任一个奇数与任一偶数之和必为奇数．

说明：任一奇数表为 $2n+1$，任一偶数表为 $2m$，而不表示为 $2n$. 因为若表示为 $2n$，这样只是对相邻的奇数与偶数之和进行了证明．并未对不相邻的奇数与偶数的情况进行证明．所以表

示奇数为 $2n+1$，表示偶数为 $2m$，n 与 m 分别独立地任意取值时才具有一般性．这点是初学者容易忽略的事实．

例 2. 已知两个数 a 与 b，. 证明：这两数之和与这两数之差的和，一定是第一个数的 2 倍．

证明：设第一个数为 a，第二个数为 b. 这两个数之和为 $a+b$，这两个数之差为 $a-b$.

这两个数之和与这两个数之差的和是

$(a+b)+(a-b)$，

而 $(a+b)+(a-b)=a+b+a-b=2a$，即等于第一个数的两倍．

例 3. 证明：两个奇数的乘积是奇数．

证明：设奇数 a、b 分别表示为

$a=2m+1$，$b=2n+1$（其中 m，n 为整数）

$$
\begin{aligned}
\text{则}\quad ab &= (2m+1)\times(2n+1)\\
&= 4mn+2n+2m+1\\
&= 2(2mn+m+n)+1=2N+1
\end{aligned}
$$

其中 $2mn+m+n=N$ 是个整数．所以 $2N+1$ 是个奇数．

这说明：任意两个奇数的乘积都是奇数．

例 4. 证明：如果两个整数之和是奇数，则它们的差也是奇数.

证明：设 a、b 均为整数，且 $a+b$ 是奇数，

即　$a+b=2k+1$　　（其中 k 是整数）

则　$a-b=a+b-2b=2(k-b)+1=2N+1$.

其中 $N=k-b$ 是个整数，所以 $a-b$ 是个奇数．

例 5. 一个三位数与它的反序三位数以大减小所得之差，其中间数码必是 9，其余两个数码之和也必是 9，请你证明．

证明：设原三位数是 $A\times100+B\times10+C$（设 $A>C>0$）则反序的三位数是 $C\times100+B\times10+A$.

由于 $A>C$ 可知，原三位数大于新三位数，其差为

$(100A+10B+C)-(100C+10B+A)$

$=(A-C)\times 100+(C-A)$

$=(A-C-1)\times 100+9\times 10+(10+C-A)$

由于 $A>C>0 \Rightarrow C-A<0$，

所以 $10+C-A<10$.

由于十位数码是 9，所以中间数码为 9. 百位数码是 $(A-C-1)$，个位数码是 $10+C-A$.

而 $(A-C-1)+(10+C-A)=9$. 所以"其余两个数码之和也必是 9"成立.

例 6. 证明：如果一个三位数被 37 整除，则存在由交换已知三位数数码组成的另外的三位数也能被 37 整除.

证明：设三位数是

$\overline{abc}=100a+10b+c=37p$

其中 a、b、c 为阿拉伯数码，p 是正整数 ①，

我们研究由 a、b、c 三个数码组成的另一个三位数．

$\overline{bca}=100b+10c+a$ ②

由①得 $10b=37p-100a-c$

∴由②得

$\overline{bca}=100b+10c+a$

$=(370p-1000a-10c)+10c+a$

$=370p-999a$

$=370p-27\times 37a$

$=37\times(10p-27a)$

其中 $10p-27a$ 是一个整数.

所以 $37\mid\overline{bca}$.

例 7. 一个两位数与其反序数之和是个完全平方数.

试求：满足上述条件的两位数.

解：设所求的两位数为 $N=10a+b$. 则其反序数为 $\overline{N}=10b+a$.

由条件 N 与$\overline{N}$之和是个完全平方数．

$(10a+b)+(10b+a)=k^2$，

即　$11a+11b=11\times(a+b)=k^2$

这表明 11 整除 k^2，则 $11|k\Rightarrow 121|k^2$ 不妨设 $k^2=121q$，

由　$11\times(a+b)=121\times q.$

$\therefore$　$a+b=11\times q$　$\therefore$　$11|a+b.$

但　$2\leqslant a+b<18$　$\therefore$　$a+b=11.$

实验得

a	1	2	3	4	5	6	7	3	9
b	10	9	8	7	6	5	4	3	2

其中 $a=1,b=10$ 不合要求，其余均合要求，所求的两位数是：

29,38,47,56,65,74,83,92.

习题 1.4

1. 证明，三个连续自然数之和被 3 整除．

2. 证明，不被 4 整除的偶数不能等于两个相邻奇数之和．

3. 求一个四位数，它等于抹去它的首位数字之后剩下的三位数的三倍与 42 之差．

4. 已知一个三位数，它的数码是连续的三个自然数，其反序数也是一个新的三位数．试证明：原三位数与其反序数之差的绝对值等于 198.

5. 证明一个三位数与其数字和的差是 9 的倍数．

§1.5 定义新运算

将数或字母用加、减、乘、除、乘方、开方这几种运算符号连结在一起组成的式子叫代数式．在代数式中某些相同的结构或某种特定程序的操作也可以用特定算符来表示．这样就形成一种新的运算．比如 $*$ 代表一种运算，对有理数 a、b，有 $a*b=\frac{a+b}{2}$．$*$ 就是大家所熟知的求两个数平均数的运算．代表着将两个数相加之和再除以 2 这个特定的结构——指定次序的操作．在国内外数学竞赛中，为了测试学生理解与掌握算符的抽象能力，经常有一些定义新运算的竞赛题问世．

例 1. 如果用四则运算的加法与除法定义一种新的运算"$*$"：对任意有理数 a、b，$a*b=\frac{a+b}{2}$.

试计算 $(1*9)*(9*5)$之值．

解：由于$1*9=\frac{1+9}{2}=5$

$$9*5=\frac{9+5}{2}=7$$

$$\therefore\quad (1*9)*(9*5)=5*7=\frac{5+7}{2}=6.$$

例 2. 设 a、b 都是有理数，规定操作"$*$"：

$$a*b=a^2+b^3.$$

试求：$(4*8)*[2*(-3)]$之值．

解：$4*8=4^2+8^3=16+512=528.$

$2*(-3)=2^2+(-3)^3=4-27=-23$

$$\begin{aligned}\therefore(4*8)*[2*(-3)]&=528*(-23)\\&=528^2+(-23)^3\\&=278784+(-12167)\end{aligned}$$

$=266617.$

例 3. 两个整数 a、b 依一定次序排在一起称为一个整数序偶．记为 (a,b)，当 $a\neq b$ 时，显然 $(a,b)\neq(b,a)$.

我们对整数序偶定义运算 $*$：

$(a,b)*(c,d)=(a-c,b+d)$，其中 a、b、c、d 均为整数．

若 $(3,2)*(0,0)$ 及 $(x,y)*(3,2)$ 表示相同的整数序偶．试求 x^2+xy+y^2 之值．

解：由定义得

$(3,2)*(0,0)=(3-0,2+0)=(3,2)$，

而　$(x,y)*(3,2)=(x-3,y+2)$

由已知 $(3,2)$ 及 $(x-3,y+2)$ 表示同一个序偶，所以 $3=x-3$，$2=y+2$. 因此 $x=6$，$y=0$

$\therefore x^2+xy+y^2=36.$

例 4. 设对有理数 a、b 定义运算“$*$”满足

$a*b=a\times b-a-b-1.$

试求 $(5*5)*(4*4)$ 之值.

解：$(5*5)=5\times5-5-5-1=14$

$4*4=4\times4-4-4-1=7$

$\therefore(5*5)*(4*4)=14*7=14\times7-14-7-1=76.$

例 5. 对正整数 a、b 定义一种新运算 $\triangledown$，$a\triangledown b$ 等于由 a 开始的连续 b 个正整数之和．

如 $2\triangledown3=2+3+4=9$，$5\triangledown4=5+6+7+8=26$.

试计算　$1\triangledown[9\triangledown(9\triangledown5)]$ 之值．

解：$9\triangledown5=9+10+11+12+13=55$

$9\triangledown(9\triangledown5)=9\triangledown55=9+10+11+\cdots+63=1980$

$\therefore\quad 1\triangledown[9\triangledown(9\triangledown5)]=1\triangledown1980$

$1+2+3+\cdots+1980=1961190.$

例 6. 令 $*$ 表示对有理数 a、b 的一种新运算．$a*b=2ab+1995$

试计算 $\frac{1}{2}*\frac{1}{3}*\frac{1}{6}=?$

解:$\frac{1}{2}*\frac{1}{3}=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+1995=1995\frac{1}{3}=\frac{5986}{3}$

$\therefore\quad \frac{1}{2}*\frac{1}{3}*\frac{1}{6}=\frac{5986}{3}*\frac{1}{6}=2\cdot\frac{5986}{3}\cdot\frac{1}{6}+1995=\frac{5986}{9}$

$+1995=\frac{5986+17955}{9}=\frac{23941}{9}=2660\frac{1}{9}$.

例 7. x 是正有理数,$\langle x\rangle$表示不超过 x 的质数的个数,如$\langle 5\rangle=3$,即不超过 5 的质数有 2,3,5 共有 3 个. 因此$\langle x\rangle$定义了对 x 的一种操作. 试求$\langle\langle 19\rangle\times\langle 9\rangle+\langle 1\rangle\rangle$的值.

解:$\langle x\rangle$对正有理数 x 规定了一种操作.

操作步骤是

①写出不超过 x 的正整数序列;

②将这个序列中的质数都标出来;

③数出这些质数的个数.

依上述操作方法,我们计算

$\langle\langle 19\rangle\times\langle 9\rangle+\langle 1\rangle\rangle$之值.

$\because\langle 19\rangle=8,\langle 9\rangle=4,\langle 1\rangle=0$

$\therefore\langle\langle 19\rangle\times\langle 9\rangle+\langle 1\rangle\rangle=\langle 8\times 4+0\rangle=\langle 32\rangle=11$.

例 8. 对不小于 3 的自然数 n,我们规定如下一种操作:

【n】表示不是 n 的约数的最小自然数.

试计算【【19】×【96】】=?

解:我们先将操作程序弄清楚.

【n】步骤如下:

第一步:写出 $1,2,3,\cdots,n$.

第二步:划去其中 n 的约数.

第三步:剩下的数中最小的一个即为【n】的值.

如求【8】:第一步写出:1,2,3,4,5,6,7,8

第二步划去 8 的约数,$\boxed{1}\,\boxed{2}\;3\;\boxed{4}\;5\;6\;7\;\boxed{8}$.

第三步　得出【8】=3.

我们计算　【【19】×【96】】

【19】=2.　【96】=5.

所以　【【19】×【96】】=【2×5】=3.

习题 1.5

1. 定义 $a*b=a\times b+a+b$. 例如 $9*2=9\times2+9+2=29$. 试计算　$1*2*3*4$ 之值.

2. 定义运算 $*$，使得 $a*b=a^2+b^2$. 试计算 $6*5$ 之值.

3. 对正有理数 a、b 定义运算"$*$"：$a*b=\dfrac{ab}{a+b}$.

试求 $4*(4*4)$之值.

4. 对任意有理数 a、b 用四则运算的减法与除法、定义一种新运算"$*$"：$a*b=\dfrac{a-b}{2}$. 试求$(1*9)*(9*5)$之值.

5. 对任意两个有理数 a、b，$\{a、b\}$表示其中较大者. 如

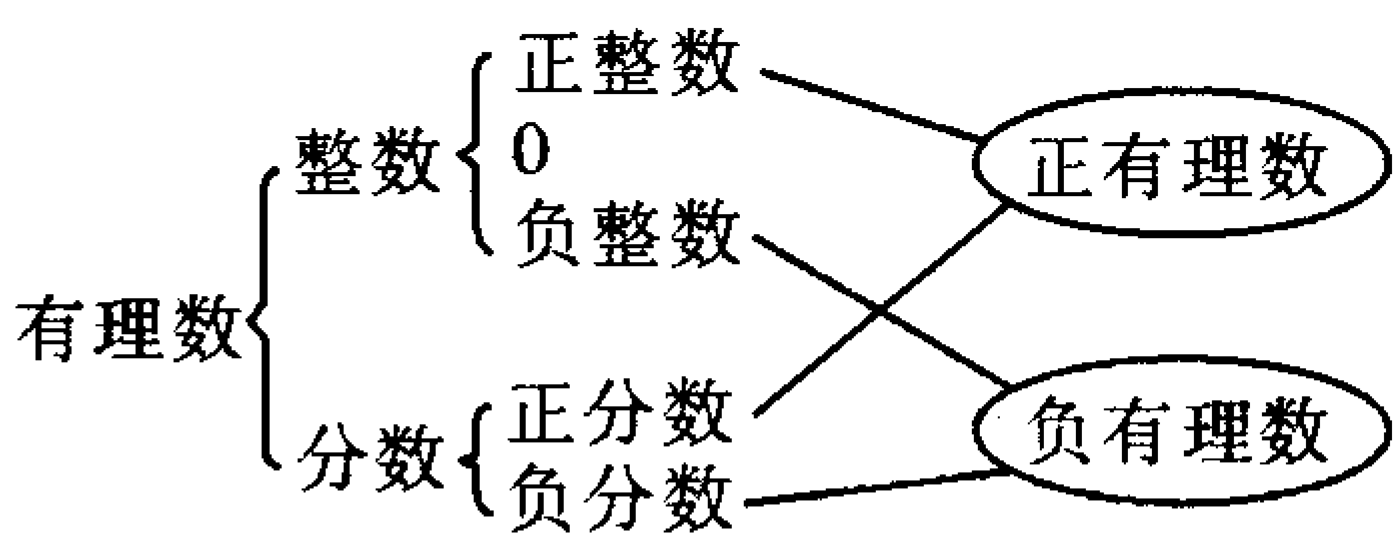
$\{3,\dfrac{1}{2}\}=3$，$\{3.3\}=3$，$\{-1,-\dfrac{1}{2}\}=-\dfrac{1}{2}$等.

试求$\left\{\left\{\dfrac{22}{7},\dfrac{355}{113}\right\},3.1416\right\}$之值.

第 2 章　有理数

在小学数学中曾介绍过 1,2,3,… 等自然数,还介绍过零、分数、小数和圆周率 π 这个数．小学阶段所学过的这些数,不妨统称为“算术数”.

到了初一年级,从算术跨入代数,从具体的数到以字母代表数,好似骤然进入了一个新天地,数的概念也被扩充了,由于表示具有相反意义的量的需要,引进了正与负的概念并区分正的量与负的量．与此相应,引入了正数与负数的概念．应当注意,零既不是正数也不是负数．今后再谈整数,它应包含正整数、零与负整数;再谈分数应包含正分数与负分数．整数与分数统称有理数．其间的关系如下表示



初学有理数,特别是以字母表示的有理数,认清它是正数还是负数,并学会比较它们的大小,是一个难点,学会用数轴直观表示数以及正确的分类讨论,是突破这一难点的关键．在有理数部分的竞赛数学训练中,重点在于通过问题练习,理解并掌握相关的概念．

§2.1　有理数初谈

例 1. a 是有理数，$-a$ 是负数吗？

分析：若 a 是不为 0 的“算术数”时，$-a$ 表示负数，但题设条件给的 a 是有理数，可正、可负还可能为 0，因此应分情况讨论．

解：若 a 是正有理数时，$-a$ 是负数；

若 a 是负有理数时，$-a$ 则是正数；

若 $a=0$，则 $-a=0$.

所以，当 a 是有理数时，$-a$ 不一定就是负数．

要想深刻理解正负数的有关概念，利用“形数结合”是极为有效的方法，我们可以用数轴上的点来表示有理数．

所谓数轴，就是规定了原点、正方向和单位长度的直线，其中原点、正方向与单位长度称为数轴三要素，只要画数轴，就应标明这三个要素．(如图 1)

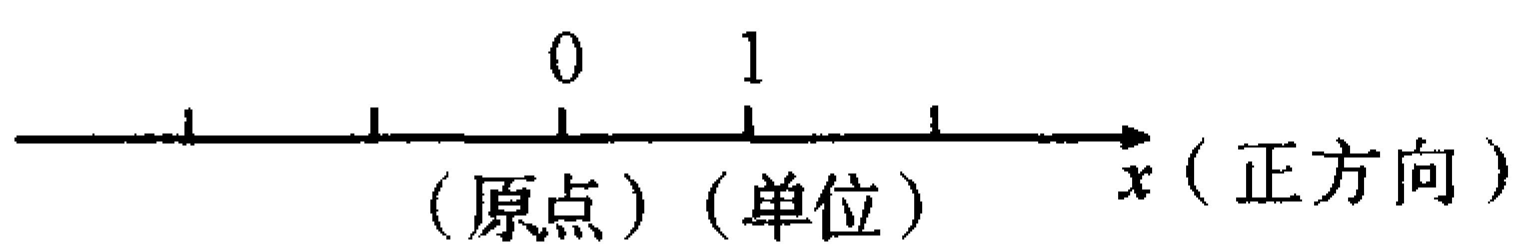


图 1

凡有理数都能用数轴上的点来表示．我们知道，只有符号不同的两个数，比如 -5 与 $+5$ 叫做互为相反数，零的相反数是零．显然，在数轴上与原点等距离的两点所表示的数是互为相反数．表示这个相等的距离的量，就叫做绝对值．因此，一个正数的绝对值是它自身；一个负数的绝对值是它的相反数；零的绝对值是零．结合数轴很容易理解相反数、绝对值的概念以及比较有理数的大小．

例 2. 文具店、书店和玩具店依次座落在一条东西走向的大街上．文具店在书店西边 20 米处，玩具店位于书店东边 100 米

处，小明从书店沿街向东走了 40 米，接着又向东走了 -60 米，此时小明的位置在（　）

（A）文具店　　　　　　　（B）玩具店

（C）文具店西边 40 米　　（D）玩具店东 -60 米

（第八届“希望杯”数学邀请赛初一试题）

解：这是一道运用建立简单的数轴模型来进行判断的问题，依题意可画出图 2.

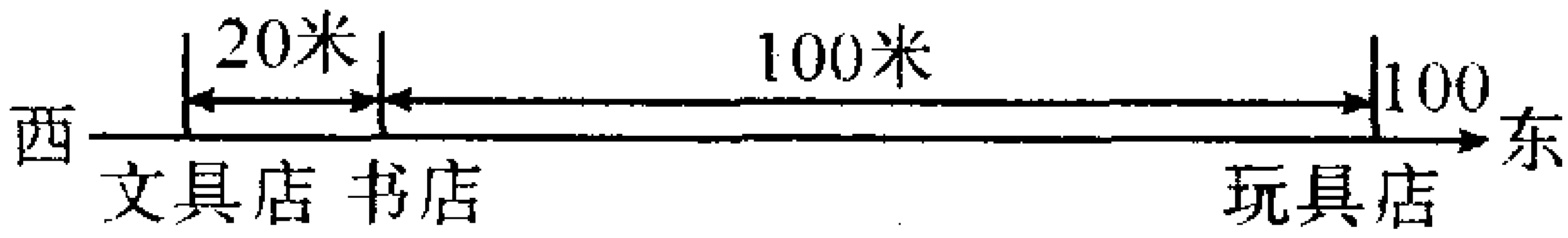


图 2

因为向东走了 -60 米就是向西走了 60 米，所以小明从书店沿街走了 40 米后，接着又向西走了 60 米，这时恰来到文具店，应选（A）.

事实上，若选书店为原点 O，向东为正方向，则小明先走了 $+40$ 米，再走了 -60 米，小明一共走了 $(+40)+(-60)=-20$（米），最后位置应在表示 -20 的点处，即小明的位置在文具店．

这种沿街走来走去的运动，可以画图求解，但往返次数多了，就容易弄错，如果抽象成数轴模型，转化为有理数加法运算就会很方便了．

例 3. 初一“数学晚会”上，有 10 个同学藏在 10 个大盾牌后面，男同学的盾牌前面写的是一个正数，女同学的盾牌前面写的是一个负数，

这 10 个盾牌如图 3 所示．

$(-30)^{30}$	$\dfrac{-5}{-25}$	$a^2+0.1$	$\dfrac{(-1)^{2000}}{1999}$	$\dfrac{8}{19-99}$
$\lvert -8\rvert$	$-\lvert -2\rvert$	$\dfrac{3}{(-3)^3}$	$4(-2)$	$5\lvert -1\rvert$

图 3

请你说出，盾牌后面男、女同学各几人？

分析与解：由于男同学对应表示正数的盾牌，女同学对应表示负数的盾牌．因此，只要判断每个盾牌所表示的是正数或是负数就足够了．

易知$(-30)^{30}$是正数，$\frac{-5}{-25}$是正数，

$a^2+0.1$是正数，$\frac{(-1)^{2000}}{1999}$是正数，

$\frac{8}{19-99}$是负数，$|-8|$是正数，

$-|-2|$是负数，$\frac{3}{(-3)^3}$是负数，

$4(-2)$是负数，$5|-1|$是正数．

这 10 个盾牌表示的数中有 4 个负数，6 个正数，所以盾牌后面的学生中有 4 个女同学，6 个男同学．

例 4．三个有理数 a、b、c 两两不等，那么在$\frac{a-b}{b-c}$，$\frac{b-c}{c-a}$，$\frac{c-a}{a-b}$中有几个是负数？

分析与解：这是判定$\frac{a-b}{b-c}$，$\frac{b-c}{c-a}$，$\frac{c-a}{a-b}$中负数的个数问题，可以用逻辑方法来判定．

因为$\left(\frac{a-b}{b-c}\right)\left(\frac{b-c}{c-a}\right)\left(\frac{c-a}{a-b}\right)=1$，

可以断定$\frac{a-b}{b-c}$，$\frac{b-c}{c-a}$，$\frac{c-a}{a-b}$中至少有一个为正数，为确定起见，不失一般性不妨设$\frac{a-b}{b-c}>0$.

此时，要么 $a-b>0$ 且 $b-c>0$，即 $a>b>c$；

要么 $a-b<0$ 且 $b-c<0$，即 $a<b<c$.

当 $a>b>c$ 时，有 $a-b>0$，$b-c>0$ 而 $c-a<0$.

易知$\frac{b-c}{c-a}$，$\frac{c-a}{a-b}$均为负数．

当 $a<b<c$ 时，有 $a-b<0$，$b-c<0$，而 $c-a>0$.

易知$\frac{b-c}{c-a}$，$\frac{c-a}{a-b}$也均为负数．

所以$\frac{a-b}{b-c}$，$\frac{b-c}{c-a}$，$\frac{c-a}{a-b}$中恰有两个负数．

关于有理数比较大小的问题，可结合数轴表示来灵活运用．

例 5. a、b、c 在数轴上的位置如图 4 所示．

试判定三个有理数$\frac{a-b}{a+b}$，$\frac{a+b}{a-b}$，$\frac{a+cb}{a-cb}$之间的大小关系．

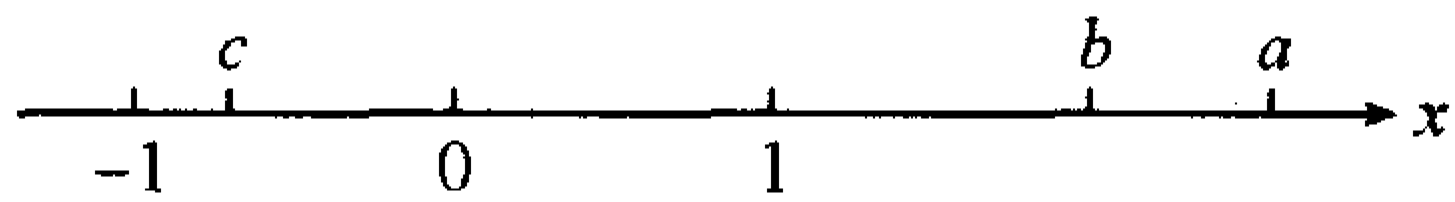


图 4

分析与解：由图 4 可见，$a>b>1$，$-1<c<0$，所以 $a+b>0$，$a-b>0$，$-b<cb<0$.

因此有 $0<a-b<a+cb<a-cb<a+b$.

由此可得$\frac{a+cb}{a-cb}<\frac{a+cb}{a-b}<\frac{a+b}{a-b}$. ①

又可得 $\frac{a-b}{a+b}<\frac{a-b}{a-cb}<\frac{a+cb}{a-cb}$ ②

综合①，②，可知$\frac{a-b}{a+b}<\frac{a+cb}{a-cb}<\frac{a+b}{a-b}$.

例 6. 若 n 是奇自然数，$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是 n 个互不相同的负整数．则（ ）

(A) $(a_1+1)(a_2+2)(a_3+3)\cdots(a_n+n)$是正整数

(B) $(a_1-1)(a_2-2)(a_3-3)\cdots(a_n-n)$是正整数

(C) $(\frac{1}{a_1}+1)(\frac{1}{a_2}+2)(\frac{1}{a_3}+3)\cdots(\frac{1}{a_n}+n)$是正数

(D) $(1-\frac{1}{a_1})(2-\frac{1}{a_2})(3-\frac{1}{a_3})\cdots(n-\frac{1}{a_n})$是正数

分析与解：这是一道选择题，需要认真思索来判定．

由于 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n$ 是 n 个互不相同的负整数，其中 n 是

奇自然数.

若 $a_1=-1$,则 $a_1+1=0$,那么有 $(a_1+1)(a_2+2)\cdots(a_n+n)=0$,因此可排除(A);

若 $a_1=-1,a_2=-2,a_3=-3,\cdots,a_n=-n$ 时

$$\begin{aligned}&(a_1-1)(a_2-2)(a_3-3)\cdots(a_n-n)\\&=(-2)(-4)(-6)\cdots(-2n)\\&=(-1)^n2\times4\times6\times\cdots\times(2n)<0\end{aligned}$$

(因 n 为奇数)故排除(B).

若 $a_1=-1$,则 $\frac{1}{a_1}+1=0$,此时

$\left(\frac{1}{a_1}+1\right)\left(\frac{1}{a_2}+2\right)\left(\frac{1}{a_3}+3\right)\cdots\left(\frac{1}{a_n}+n\right)=0$,可排除(C)

所以应选(D).

事实上,若 $a_1<0,a_2<0,a_3<0,\cdots,a_n<0$.

则 $-\frac{1}{a_1}>0,-\frac{1}{a_2}>0,-\frac{1}{a_3}>0,\cdots,-\frac{1}{a_n}>0$.

所以 $(1-\frac{1}{a_1})(2-\frac{1}{a_2})(3-\frac{1}{a_3})\cdots(n-\frac{1}{a_n})$ 是个正数.

例 7. 若四个有理数 a、b、c、d 满足

$$\frac{1}{a-1997}=\frac{1}{b+1998}=\frac{1}{c-1999}=\frac{1}{d+2000},$$

则 a、b、c、d 的大小关系是(　)

(A) $a>c>b>d$　　(B) $b>d>a>c$

(C) $c>a>b>d$　　(D) $d>b>a>c$

分析与解: 由 $\frac{1}{a-1997}=\frac{1}{b+1998}=\frac{1}{c-1999}=\frac{1}{d+2000}$,得 $a-1997=b+1998=c-1999=d+2000$.

由 $a-1997=b+1998$,得 $a-b=1998+1997>0$,知 $a>b$;

由 $a-1997=c-1999$,得 $a-c=-1999+1997=-2<0$,知 $c>a$;

由 $b+1998=d+2000$，得 $b-d=2000-1998=2>0$，知 $b>d$. 所以 a、b、c、d 四个有理数的大小次序是 $c>a>b>d$. 选择(C).

例 8. a 是有理数，按下表要求，填在空格中的十个数的乘积是什么？

a	19	94	3	27	5
a 的相反数					
a 的倒数					

分析与解：此题当然可以按规则填写表中的十个数后再计算乘积，但比较繁.

注意到 a 的相反数为 $-a$，a 的倒数为 $\frac{1}{a}$，二者乘积 $(-a)\times\frac{1}{a}=-1$，所以按表中要求填入的十个数之积是五个 -1 的乘积，其结果为 -1.

例 9. 三个互不相等的有理数，既可以表示为 $1, a+b, a$ 的形式，也可以表示为 $0, \frac{b}{a}, b$ 的形式，试求 $a^{2000}+b^{2001}$ 的值.

分析与解：由于三个互不相等的有理数，既可表示为 1，$a+b$，a 的形式，又可表示为 $0, \frac{b}{a}, b$ 的形式. 也就是说这两个三数组的元素分别对应相等. 于是可以判定 $a+b$ 与 a 中有一个是 0，$\frac{b}{a}$ 与 b 中有一个是 1，但若 $a=0$，会使 $\frac{b}{a}$ 无意义，所以 $a\neq0$，只能 $a+b=0$，即 $a=-b$，又 $a\neq0$，于是 $\frac{b}{a}=-1$. 于是 0，$\frac{b}{a}$，b 为两两不相等的有理数，在 $\frac{b}{a}=-1$ 的情况下，只能是

$b=1$，于是 $a=-1$.

所以 $a^{2000}+b^{2001}=(-1)^{2000}+1^{2001}=1+1=2$.

有理数是整数与分数的统称．由于整数可以看作分母为 1 的分数，所以有理数都是两个整数的比，为什么叫有理数？其"理"就在于它能表示为两个整数之比，有理数（Rational）原意就是"有比数"，是译为中文后沿称有理数的．

例 10. 求证任意两个有理数之间都存在无穷多个有理数．

证明：假如结论不成立，则至少存在两个有理数 a、b（设 $a<b$），它们之间的有理数只有有限个（n 个），不妨设这 n 个有理数由小到大的顺序为

$$a<c_1<c_2<c_3<\cdots<c_n<b.$$

这时，由 c_n 为有理数，b 为有理数，则$\dfrac{c_n+b}{2}$也为有理数．且

$$a<c_n<\frac{c_n+b}{2}<b.$$

即　在 a、b 之间找到了异于已给的 n 个有理数的新的第$n+1$个有理数，即 $c_{n+1}=\dfrac{c_n+b}{2}$. 这与假设矛盾．

所以，任意两个有理数之间都存在着无究多个有理数．

以上我们只是通过一些有趣的数学竞赛题帮助新进入中学的数学爱好者加深对有理数概念的认识，这只是开始，以后还要继续展开．

习题 2.1

1. a、b、c、m 都是有理数，并且 $a+2b+3c=m$，$a+b+2c=m$，那么 b 与 c（　）

(A)互为相反数　　(B)互为倒数

(C)互为负倒数　　(D)相等

2. 下列分数中，大于$-\frac{1}{3}$且小于$-\frac{1}{4}$的是(　)

(A)$-\frac{11}{20}$.　(B)$-\frac{4}{13}$.　(C) $-\frac{3}{16}$.　(D)$-\frac{6}{17}$.

3. 若 $a+1<0$，则在下列每组四个数中，按从小到大的顺序排列的一组是(　)

(A)$a,-1,1,-a$.　　(B)$-a,-1,1,a$,

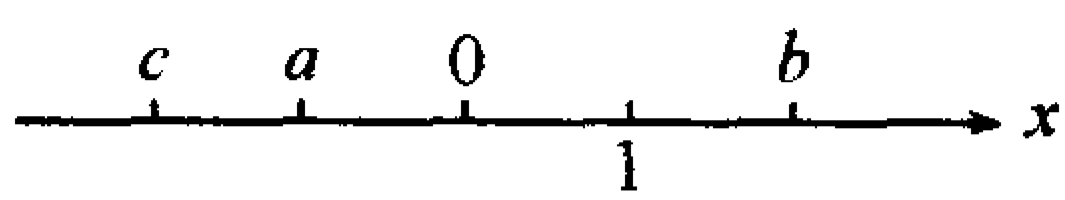
(C)$-1,-a,a,1$,　　(D)$-1,a,1,-a$.

4. 大于-8.14并且不是正整数的整数共有多少个？

5. 如图，数轴上标出的点中任相邻两点间的距离都相等，问 y 的值应是多少？

6. 若 a 是小于 1 的正数，试将$-a,-\frac{1}{a},\frac{1}{a},a,0,-1,1$ 由小到大排成一列，用“<”号连接起来.

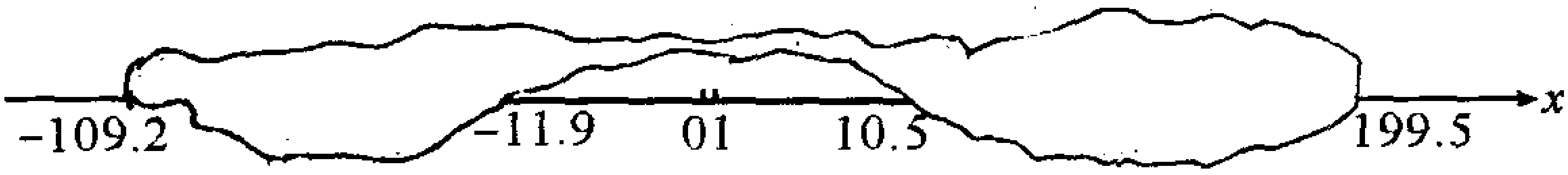
7. 如图，数轴上标出了有理数 a,b,c 的位置，其中 O 是原点. 则$\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c}$的大小次序是(　)



(A)$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}>\frac{1}{c}$.　　(B)$\frac{1}{b}>\frac{1}{c}>\frac{1}{a}$.

(C)$\frac{1}{b}>\frac{1}{a}>\frac{1}{c}$.　　(D)$\frac{1}{c}>\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$.

8. 一滴墨水洒在一个数轴上，如图所示，试根据图中标出的数值，判定墨迹盖住的整数共有多少个？



§2.2　含绝对值式子的化简与求值

我们给出一个代数式，不妨记为 $f(x)$，求 $x=a$ 时的值，也就是将 a 代入 $f(x)$ 中，设法计算出 $f(a)$ 的值，其一般模式是

已知　　　　求值

①代数式　　$f(x) \Rightarrow f(a)$

$\uparrow$

② $x=a$　　　代入

其中已知条件由两部分组成，

①代数式 $f(x)$，②x 的特值 $x=a$.

绝对值是初一代数中的重要概念，其定义是：正数的绝对值是其自身，负数的绝对值等于它的相反数，零的绝对值是零．

数 a 的绝对值记为 $|a|$，它的意义

$$|a|=\begin{cases} a, & (\text{当 } a\geqslant 0 \text{ 时}) \\ -a. & (a<0 \text{ 时}) \end{cases}$$

显然，数的绝对值是一个非负数．

现在我们将绝对值与代数式求值联系在一起，要么在 x 的特值 $x=a$ 的给出中出现绝对值符号，要么在代数式 $f(x)$ 中出现绝对值符号，也可能在上述两项中同时出现，这样就形成了一类"含绝对值式子的化简求值问题". 这类问题对培养分析问题及综合运用知识的能力是十分有益的．

例 1. 若 $m=-1998$，求

$|m^2+11m-999|-|m^2+22m+999|+20$ 的值．

分析：当然，可以直接将 $m=-1998$ 代入计算，但计算量大，所以我们可以选取先化简再代入求值的办法．

解：由 $m=-1998 \Rightarrow m+11=-1987, m+22=-1976$.

所以 $m^2+11m=m(m+11)=1998\times1987\Rightarrow m^2+11m-999>0$，
$m^2+22m=m(m+22)=1998\times1976\Rightarrow m^2+22m+999>0$.

因此

$$
\begin{aligned}
&|m^2+11m-999|-|m^2+22m+999|+20\\
&=(m^2+11m-999)-(m^2+22m+999)+20\\
&=11m-999-22m-999+20\\
&=-11m-1998+20\\
&=11\times1998-1998+20\\
&=19980+20=20000.
\end{aligned}
$$

例 2. 若 $|x+y|\leqslant2$，试确定 $|x+y-3|+|x+y+2|$ 的值.

解：∵ $|x+y|\leqslant2$，则 $-2\leqslant x+y\leqslant2$，
$x+y-3\leqslant-1<0,0\leqslant x+y+2$.

因此 $|x+y-3|=-(x+y-3)=3-x-y$
$|x+y+2|=x+y+2$

于是 $|x+y-3|+|x+y+2|=(3-x-y)+(x+y+2)=5$.

例 3. 已知三个有理数 a、b、c 的乘积为负数，其和为正数，且
$x=\frac{a}{|a|}+\frac{b}{|b|}+\frac{c}{|c|}+\frac{|ab|}{ab}+\frac{|ac|}{ac}+\frac{|bc|}{bc}$，

求 ax^3+bx^2+cx+1 的值.

解：由 $abc<0$，知 a、b、c 均不为 0，其中或一负二正，或三个均负. 若 a、b、c 均为负数，则 $a+b+c<0$，这与 $a+b+c$ 为正数矛盾. 所以只能有 a、b、c 中一负二正. 为确定起见，不失一般性可设 $a<0,b>0,c>0$. 则

$$
\begin{aligned}
x&=\frac{a}{|a|}+\frac{b}{|b|}+\frac{c}{|c|}+\frac{|ab|}{ab}+\frac{|ac|}{ac}+\frac{|bc|}{bc}\\
&=(-1)+1+1+(-1)+(-1)+1=0,
\end{aligned}
$$

所以 $ax^3+bx^2+cx+1|_{x=0}=1$.

即 ax^3+bx^2+cx+1 的值等于 1.

例 4. 当 $|x|=x+2$ 时，求 $19x^{94}+3x+27$ 的值.

解:x 的特值是通过 $|x|=x+2$ 给出的,我们分析 $|x|=x+2$,显然 $|x|\neq x$,因此,只能有 $|x|=-x$.

于是得　$-x=x+2,\Rightarrow 2x=-2\Rightarrow x=-1$.

所以 $|x|=x+2$ 的条件等价于给出 $x=-1$.

当 $x=-1$ 时,

$$
\begin{aligned}
&19x^{94}+3x+27|_{x=-1}\\
&=19(-1)^{94}+3(-1)+27\\
&=19-3+27=43.
\end{aligned}
$$

例 5. 已知　$2b-a<3,2a-b<5$.

求　$|a+b-9|-|2b-a-7|-|b-2a+8|$ 的值.

解:因为 $2b-a<3\Rightarrow 2b-a-7<2b-a-3<0$,

所以　$|2b-a-7|=-(2b-a-7)$.

因为 $2a-b<5\Rightarrow b-2a+5>0$,更有 $b-2a+8>0$.

所以 $|b-2a+8|=b-2a+8$

又　$b+a=(2b-a)+(2a-b)<5+3=8$,

所以　$a+b-9<b+a-8<0$,

因此　$|a+b-9|=-(a+b-9)$.

于是　
$$
\begin{aligned}
&|a+b-9|-|2b-a-7|-|b-2a+8|\\
&=-(a+b-9)+(2b-a-7)-(b-2a+8)\\
&=-7-8+9=-6.
\end{aligned}
$$

例 6. 若 $|x-y+3|$ 与 $|x+y-1995|$ 互为相反数.

求　$\dfrac{x+2y}{x-y}$ 的值.

解:显然,$|x-y+3|\geqslant 0$,$|x+y-1995|\geqslant 0$,但它们又互为相反数,只能有

$$|x-y+3|+|x+y-1995|=0.$$

即　$x-y+3=0$ 且 $x+y-1995=0$.

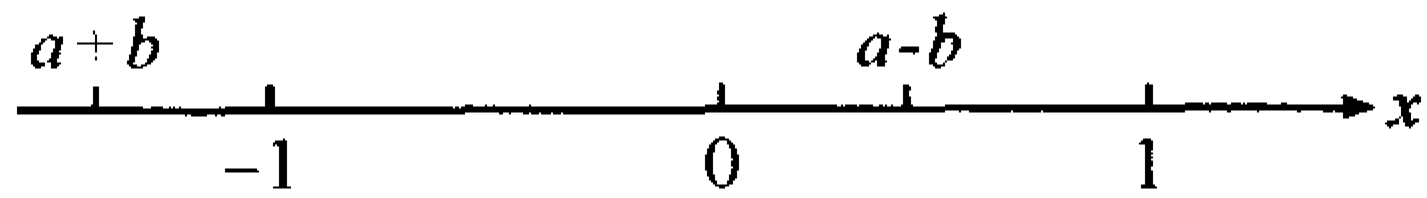
所以　$x-y=-3,x+y=1995$.

二式相减,得 $2y=1998\Rightarrow y=999$.

所以 $\dfrac{x+2y}{x-y}=\dfrac{(x+y)+y}{x-y}=\dfrac{1995+999}{-3}$

$=-\dfrac{2994}{3}=-998.$

例 7. 已知有理数 a、b,$a+b$、$a-b$ 在数轴上位置如图所示:



化简 $|2a+b|-2|a|-|b-7|$.

解:此题条件是由图给出,所以要通过图形观察得出

$$0<a-b<1,\quad a+b<-1$$

二式相加,可得 $2a<0\Rightarrow a<0$.

再考虑 b,若 $b\geqslant 0$,则 $a-b<0$. 这与 $a-b>0$ 不符,所以应有 $b<0$.

此时,在 $2a+b<0$,$b-7<0$ 的条件下有 $a<0$,$b<0$.

所以 $|2a+b|-2|a|-|b-7|$

$=-(2a+b)-2(-a)-[-(b-7)]$

$=-2a-b+2a+b-7$

$=-7.$

例 8. 若 a、b、c 为整数,且 $|a-b|^{19}+|c-a|^{95}=1$.

求 $|a-b|+|b-c|+|c-a|$ 的值.

解:因 a、b、c 均为整数,所以 $|a-b|$,$|c-a|$ 为非负整数,$|a-b|^{19}$,$|c-a|^{95}$ 两个非负整数之和等于 1,这只能

$$|a-b|^{19}=0 \text{ 且 } |c-a|^{95}=1 \qquad ①$$

或 $$|a-b|^{19}=1 \text{ 且 } |c-a|^{95}=0 \qquad ②$$

由①得 $a=b$ 且 $c=a\pm 1$,于是 $|b-c|=|c-a|=1$

由②,得 $a=b\pm 1$ 且 $c=a$,于是 $|b-c|=|a-b|=1$

无论①或②都有

$$|a-b|+|c-a|=1 \text{ 且 } |b-c|=1$$

所以 $|a-b|+|b-c|+|c-a|=2.$

例 9. 若 $1991<x<1999$，化简求

$(|x-1|-|x-1991|)(|x-1990|+|x-2000|)$的值．

解：在绝对值化简中

若 $a\leqslant b<p$ 时，则有

$$|p-a|-|p-b|=(p-a)-(p-b)=b-a,$$

所以对 $1<1991<x$ 有

$|x-1|-|x-1991|=1991-1=1990.$

又若　$a\leqslant p<b$ 时，

$|p-a|+|p-b|=(p-a)+(b-p)=b-a.$

所以对 $1990<x<2000$

$|x-1990|+|x-2000|=2000-1900=10,$

因此，对 $1991<x<1999$ 时，

$(|x-1|-|x-1991|)(|x-1990|+|x-2001|)=1990\times 10=19900,$

例 10. 若 $x=-0.279$，求

$|x-1|+|x-3|+\cdots+|x-1997|-|x|-|x-2|-\cdots-|x-1996|$的值．

解：由 $x\leqslant a<b$ 可得

$$|x-b|-|x-a|$$

$=(b-x)-(a-x)=b-a.$

则原式 $=(|x-1|-|x|)+(|x-3|-|x-2|)+\cdots\cdots+(|x-1997|-|x-1996|)$

$$=(1-0)+(3-2)+\cdots+(1997-1996)$$

$$=\underbrace{1+1+\cdots+1}_{1998\div 2=999\text{ 个}}=999.$$

从例 9，例 10 可见，巧用绝对值的运算性质，可以使化简过程大大简化．

例 11. 已知 $|x|\leqslant 3$，$|y|\leqslant 1$，$|z|\leqslant 4$ 且 $|x-2y+z|=9$，求 $x^2y^4z^6$ 之值．

解:只要$|x|<3$,$|y|<1$和$|z|<4$中至少有一个成立,则$|x-2y-z|\leqslant|x|+2|y|+|z|<9$,与$|x-2y+z|=9$不符,所以,当$|x|\leqslant3$,$|y|\leqslant1$,$|z|\leqslant4$的条件下,使$|x-2y+z|=9$成立,只能$|x|=3$,$|y|=1$,$|z|=4$同时成立.

所以$x^2y^4z^6=|x|^2|y|^2|z|^6=3^2\times1^4\times4^6=36864$.

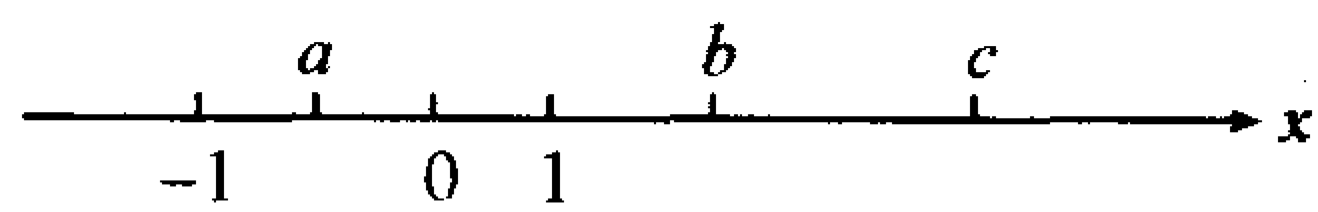
这里利用绝对值的条件估值判定x,y,z只能取的特值,是一项非常有益的逻辑推理练习.

以上几个问题都取自于近几年初中数学竞赛问题.如果初一同学能较顺利地解决这类问题,表明你的思维比较灵活,综合运算与推理能力较强,并且对绝对值概念的理解是深刻的.

习题 2.2

1. 计算 $\left|\frac{1}{1992}-\frac{1}{1991}\right|+\left|\frac{1}{1993}-\frac{1}{1992}\right|-\left|\frac{1}{1993}-\frac{1}{1991}\right|$.

2. 有理数a、b、c在数轴上的位置如图所示.



化简$|a|+|b|+|a+b|+|b-c|$.

3. 试计算 $||||1-2|-3|-4|-5|=?$

4. 如果$1<x<2$.求代数式$\frac{|x-2|}{x-2}-\frac{|x-1|}{1-x}+\frac{|x|}{x}$之值.

5. $\overline{abcde}$是一个五位自然数,其中a、b、c、d、e是阿拉伯数字,且$a<b<c<d$.试求$|a-b|+|b-c|+|c-d|+|d-e|$的最大值.

6. 求 $\dfrac{\left|\left(-\frac{355}{113}\right)-\left|-\frac{355}{113}\right|\right|}{\left(-\frac{355}{113}\right)}=?$

7. 已知$x>0$,$y<0$,$z<0$,且$|x|>|y|$,$|z|>|x|$

化简　　$|x+z|-|y+z|-|x-y|$.

8. 四个有理数 a,b,c,d 满足　$\frac{|abcd|}{abcd}=-1$

试求：$\frac{|a|}{a}+\frac{|b|}{b}+\frac{|c|}{c}+\frac{|d|}{d}$的最大值．

9. $\overline{abcd}$是一个四位数，a,b,c,d 是阿拉伯数字，且 $a\leqslant b\leqslant c\leqslant d$.

试求：$|a-b|+|b-c|+|c-d|+|d-a|$的最大值．

10. 三个有理数 a、b、c 其积是负数，其和是正数，当$x=\frac{|a|}{a}+\frac{|b|}{b}+\frac{|c|}{c}$时，试求代数式　$x^{19}-92x+2$ 的值．

§2.3　有理数的综合应用

下面我们举一些关于有理数与绝对值的综合性或应用性的例题．以期提高大家分析问题的能力，并激发对数学学习的兴趣．

例 1. 绝对值小于 100 的所有被 3 除余的 1 的整数之和是多少？

解：绝对值小于 100 的所有整数：

$-99,-98,\cdots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\cdots,98,99.$

共计 199 个数，其中在 0 到 99 被 3 除余 1 的整数是 $1,4,7,\cdots,91,94,97$ 共计 33 个，而在 -99 到 -1 被 3 除余 1 的整数是

$-98,-95,-92,-89,\cdots,-8,-5,-2$ 共 33 个．

将前 33 个正数由小到大，后 33 个负数由大到小排列为两行：

$1,4,7,10,13,\cdots,88,91,94,97$

$-2,-5,-8,-11,-14,\cdots,-89,-92,-95,-98.$

容易看出，这 66 个数之和为 -33.

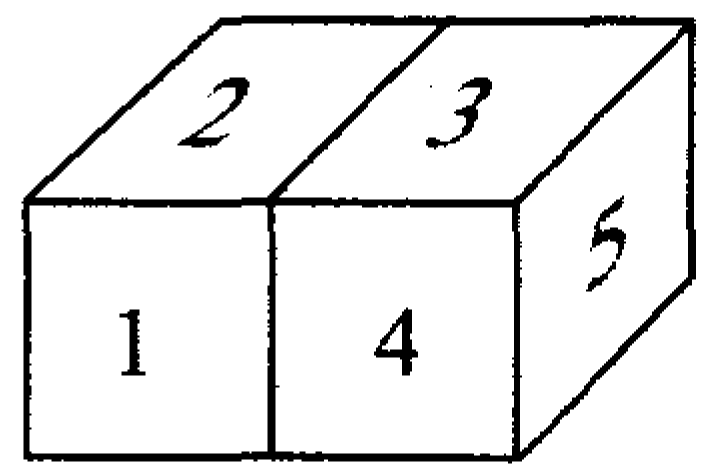
例 2. 如果 $a=-2$，问在集合$\left\{-3a,4a,\frac{24}{a},a^2,1\right\}$的元素中

的最小数的负倒数是多少?

解:当 $a=-2$ 时,$-3a=(-3)(-6)=6$,$4a=4(-2)=-8$,$\frac{24}{a}=\frac{24}{-2}=-12$,$a^2=(-2)^2=4$.

所以当 $a=-2$ 时,集合为$\{6,-8,-12,4,1\}$.其中最小的一个元素(数)是-12,它的负倒数为$-\frac{1}{(-12)}=\frac{1}{12}$.

例 3.两个同样大小的正方体积木,每个正方体上相对两个面上写的数之和都等于-1.现将两个正方体并列放置(如图).看得见的五个面上的数如图所标示.问看不见的七个面上所写的数之和等于多少?



解:两个立方体共有六对相对面(共 12 个面)写的数之总和为$(-1)\times 6$.而这 12 个面中已知五个面上数字之和为 $1+2+3+4+5=15$.所以看不见的七个面上所写的数字之和为

$$(-1)\times 6-(1+2+3+4+5)=-6-15=-21.$$

例 4.给出下列 20 个数.

87,91,94,88,93,91,89,87,92,86,90,92,88,90,91,86,89,92,94,88.

试求这 20 个数之和.

分析:如果直接计算加法,运算量较大,但发现,每个加数都在 90 附近,每个数与 90 之差可依次写出,求其代数和就比较简单了.

解:选 90 为 0 点,则原序列各数与 90 之差可依次写为

$-3,+1,+4,-2,+3,+1,-1,-3,+2,-4,0,+2,-2,0,+1,-4,-1,+2,+4,-2$.

这 20 个数的代数和为-2.

所以原 20 个数之和为 $90\times 20-2=1800-2=1798$.

例 5.一辆公共汽车由起点站到终点站在内共驶 8 个车站,

已知前 6 个车站共上车 100 人，除终点外前面各站共下车总计 80 人，问从前 6 站上车而在终点下车的乘客共有多少人？

解：设第 1 站到第 7 站上车的乘客依次为 $a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7$，第 2 站到第 8 站下车的乘客依次为 $b_2,b_3,b_4,b_5,b_6,b_7,b_8$，显然应有

$$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7=b_2+b_3+b_4+b_5+b_6+b_7+b_8$$

已知　$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6=100$，

$b_2+b_3+b_4+b_5+b_6+b_7=80$

所以　$100+a_7=80+b_8$

即　$b_8-a_7=100-80=20$.

这表明，从前 6 站上车而在终点站下车的乘客共 20 人.

例 6. 三个互不相等的有理数，既可表示为 $1,a+b,a$ 的形式，又可表示为 $0,\frac{b}{a},b$ 的形式．试求 $a^{2004}+b^{2003}$ 的值．

解：由于三个互不相等的有理数，既可表示为 $1,a+b,a$ 的形式，又可表示为 $0,\frac{b}{a},b$ 的形式，也就是说这两个三数组的数分别相等．于是可以断定：$a+b$ 与 a 中有一个为 0，$\frac{b}{a}$ 与 b 中有一个为 1. 但若 $a=0$，会使 $\frac{b}{a}$ 没意义，所以 $a\neq0$；只能是 $a+b=0$，即 $a=-b$，又 $a\neq0$，于是 $\frac{b}{a}=-1$.

由于 $\frac{b}{a},b$ 为两个不相等的有理数，在 $\frac{b}{a}=-1$ 的情况下，只能 $b=1$，于是 $a=-1$.

所以 $a^{2004}+b^{2003}=(-1)^{2004}+1^{2003}=(+1)+1=2$.

例 7. 在下面格表所示的每个小方格中都填入一个整数．

z			9				x				2					y

并且任意三个相邻格子中所填数之和都等于 5.

试计算 $\dfrac{x+y+z}{xyz}$之值.

解:容易断定与 x 相邻的两个数分别为 9 与 2,即

9	x	2

因为 $9+x+2=5$,则 $x=-6$.

依据任意三个相邻格子所填数之和都等于 5,分别确定出每个格子中所填的数如下:

z			9				x				2					y
9	-6	2	9	-6	2	9	-6	2	9	-6	2	9	-6	2	9	-6

$\therefore y=-6, z=9$.

因此

$$\frac{x+y+z}{xyz}=\frac{(-6)+(-6)+9}{(-6)(-6)\cdot 9}=\frac{-3}{324}=-\frac{1}{108}.$$

例 8. 一个负有理数 a 在数轴上的位置为 A.

问:在数轴上与 A 相距为 d 的点中与原点距离最远的点所对应的数是什么?(其中 $d>0$)

解:在数轴上 A 点对应的数为 a,与 A 相距为 d 的数有两个:$a+d$ 与 $a-d$,它们与原点的距离分别是 $|a+d|$ 与 $|a-d|$

由于 $a<0, d>0$

所以 $a-d<0$,于是 $|a-d|=-(a-d)=d-a$.

当 $a+d\geqslant 0$ 时,$|a+d|=a+d<-a+d=d-a=|a-d|$

当 $a+d<0$ 时,$|a+d|=-(a+d)=-a-d<-a+d=d-a=|a-d|$

因此，总有　$|a+d|<|a-d|$.

答：距原点最远的点对应的数是 $a-d$.

例 9. 在数 1,2,3,……,2005 前面无论如何放置"+","-"号，并且顺次完成所指出的运算．

求证：其代数和一定不等于 0.

证明：一个整数前面添加"+","-"号，并不改变整数的奇偶性．所以这 2005 个整数的代数和的奇偶性是确定的．由于代数和的奇偶性与 $(1-2)+(3-4)+\cdots+(2003-2004)+2005=-1002+2005=1003$ 的奇偶性相同，是个奇数．所以题设给出的 2005 个整数前面任意添加"+""-"号后的代数和永远不会等于偶数，当然更不会等于"0"这个特殊的偶数了．

例 10. 如图，a,b,c,d,e,f 均为有理数. 图中各行，各列及两条对角线上三个数之和都相等．试计算 $\left(\dfrac{a+b+c+e+f}{d}\right)^2$ 的值．

3.7	a	b
c	d	e
-1.1	4.9	f

解：由 $3.7+d+f=(-1.1)+4.9+f$，得 $d=0.1$

由 $3.7+a+b=(-1.1)+d+b$

得 $3.7+a=(-1.1)+0.1$

$\therefore a=(-1.1)+0.1-3.7=-4.7$.

由此得 $a+d+4.9=(-4.7)+0.1+4.9=0.3$

即　每行，每列，两对角线上三数之和均为 0.3.

于是　由　$3.7+c+(-1.1)=0.3$　得 $c=-2.3$

由 $3.7+a+b=0.3$　且 $a=-4.7$

得 $b=0.3-(-4.7)-3.7=1.3$

由　$(-1.1)+4.9+f=0.3$　得　$f=-3.5$

由　$b+e+f=0.3$　其中 $b=1.3, f=-3.5$

得　$e=0.3-1.3-(-3.5)=2.5$

于是 $\left(\frac{a+b+c+e+f}{d}\right)^2$

$$=\left(\frac{(-4.7)+1.3+(-2.3)+2.5+(-3.5)}{0.1}\right)^2$$

$$=\left(\frac{(-4.7)+(-1.0)+(-1.0)}{0.1}\right)^2$$

$$=\left(\frac{-6.7}{0.1}\right)^2=67^2=4489.$$

习题 2.3

1. 集合$\{-7,-5,-1,1,3\}$中，两个不同的数相乘所得的最小乘积是多少？

2. 小华写出四个有理数，其中每三数之和分别为 2，17，-1，-3. 那么小华写出的四个有理数的乘积等于多少？

3. 若 a,b,c,d,e,f 是六个有理数．并且

$$\frac{a}{b}=-\frac{1}{2},\frac{b}{c}=\frac{1}{3},\frac{c}{d}=\frac{-1}{4},\frac{d}{e}=\frac{1}{5},\frac{e}{f}=-\frac{1}{6}.$$ 求 $\frac{f}{a}$ 的值．

4. 绝对值不小于 1992 且不大于 2000 的所有整数之和是多少？

5. a、b 都是有理数，代数式 a^2+b^2，a^2-b^2，$(a-b)^2$，$(a+b)^2$，a^2b^2+1，a^3b+1，$a^2+b^2+0.1$，$2a^2+3b^4+1$ 中，其值恒为正数的是哪几个？

6. 在 1993.4 与它的负倒数之间的共有 a 个整数．在 1993.4 与它的相反数之间共有 b 个整数．在 $-\frac{1}{1993.4}$ 与它的绝对值之间共有 c 个整数．求 $a+b+c$ 之值．

7. 已知

$$A=\left(1+\frac{7}{1}\right)\left(1+\frac{7}{2}\right)\left(1+\frac{7}{3}\right)\left(1+\frac{7}{4}\right)\left(1+\frac{7}{5}\right)\left(1+\frac{7}{6}\right)$$

$$\times\left(1+\frac{7}{7}\right)\left(1+\frac{7}{8}\right)\left(1+\frac{7}{9}\right)$$

$$B=\left(1+\frac{9}{1}\right)\left(1+\frac{9}{2}\right)\left(1+\frac{9}{3}\right)\left(1+\frac{9}{4}\right)\left(1+\frac{9}{5}\right)\left(1+\frac{9}{6}\right)$$

$$\times\left(1+\frac{9}{7}\right)$$

求：$\left(\frac{A}{B}\right)^{2001}=?$

8. 代数式 M 表示 a 与 b 的和的平方．代数式 N 表示 a 与 b 的平方之和．当 $a=7,b=-5$ 时，求 $\frac{M}{N}$的值．

9. 在正整数列 1,2,3,4,5,……中，前 15 个质数之和的负倒数等于多少？

10. 如图所示，a,b,c,d,e,f 均为有理数. 图中各行，各列，两对角线上三数之和都相等．试求：$\frac{ab+cd+ef}{a+b+c+d+e+f}$之值．

a	b	6
c	d	e
f	7	2

第 3 章　一元一次方程

我们知道，含有未知数的等式叫做方程．使方程左右两边相等的未知数的值，叫做方程的解．求方程的解的过程叫做解方程．

在解方程过程中，要对等式变形，但在变形过程中方程的解应保持不变，这种变形叫做方程的同解变形，对方程施行同解变形依据等式的两条性质，结合方程术语可改造为方程同解变形的两个定理．

定理 1　方程两边都加上（或减去）同一个数或同一个整式，所得新方程与原方程同解．

定理 2　方程两边都乘以（或除以）同一个数（除数不能是 0）所得新方程与原方程同解．

在初一年级初学方程，学习最简单的只含一个未知数、并且未知数次数是 1 的方程，也就是一元一次方程．它的标准式是

$ax+b=0$

其中 x 是未知数，a、b 是已知数，并且 $a\neq 0$.

§ 3.1　基本概念与例题

例 1. 在解方程的过程中，为了使得到的方程和原方程同解，可以在原方程的两边（　）

（A）乘以同一个数．　　　（B）乘以同一个整式．

（C）加上同一个代数式．　（D）都加上 1.

解：对方程同解变形，要求方程两边同乘不等于 0 的数，所以排除（A）.

我们考察方程 $x-2=0$，易知其根为 $x=2$，若该方程两边同乘以一个整式 $x-1$，得 $(x-1)(x-2)=0$，其根为 $x=1$ 及 $x=2$，不与原方程同解，排除(B). 若在方程 $x-2=0$ 两边加上同一个代数式 $\frac{1}{x-2}$，得 $\frac{1}{x-2}+(x-2)=\frac{1}{x-2}$，此方程无解，失去了原方程的 $x=2$ 的根，所以排除(C). 事实上，方程两边同时加上一个常数，新方程与原方程同解，对于(D)，这里所加的常数为 1，因此选(D).

例 2. 方程甲：$\frac{3}{4}(x-4)=3x$ 与方程乙：$x-4=4x$ 同解，其根据是(　)

(A)甲方程两边都加上了同一个整式 x.

(B)甲方程的两边都乘以 $\frac{4}{3}x$.

(C)甲方程的两边都乘以 $\frac{4}{3}$.

(D)甲方程的两边都乘以 $\frac{3}{4}$.

答：甲方程两边都乘以同一个非 0 的数 $\frac{4}{3}$，所得新方程 $x-4=4x$ 与原方程同解．选(C).

例 3. 方程

$\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x-1\right)-1\right]-1\right\}-1=1993$ 的根是 $x=$ ______.

解：由 $\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x-1\right)-1\right]-1\right\}-1=1993$

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x-1\right)-1\right]-1\right\}=1994$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x-1\right)-1\right]=2\times1994+1=3989$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x-1\right)=2\times3989+1=7979$$

$$\frac{1}{2}x-1=15958$$

$$\frac{1}{2}x=15959, x=31918.$$

例 4. 如果等式 $1992+1994+1996+1998=5000-\square$ 成立，则 $\square$ 中应当填的数是（　）

(A) 5.　(B) -980.　(C) -1990.　(D) -2980.

解：设 $\square$ 中填的数是 x，则

$1992+1994+1996+1998=5000-x$.

即　$7980=5000-x$.

$\therefore$　$x=5000-7980=-2980$. 选(D)

说明　含有未知数的等式叫做方程，

$1992+1994+1996+1998=5000-\square$ 是含有未知数 $\square$ 的等式，因此是个方程．在代数中，未知数一般用字母 x,y,z 表示，在中国古代数学中，未知数用天、地、人等表示，称为"天元术". 在本题中，未知数是用 $\square$ 表示的，因此，本题实质是解方程求未知数 $\square$ 的问题．

例 5. 若 p,q 都是质数，以 x 为未知数的方程 $px+5q=97$ 的根是 1，则 $p^2-q=$______．

解：因为 1 是方程 $px+5q=97$ 的根，所以将 1 代入方程，等式两边应当相等．

$$p\times1+5q=97$$

即　$p+5q=97$.

进一步分析，p 与 $5q$ 必一个是奇数，另一个是偶数．

若 p 为奇数，$5q$ 为偶数，只能 q 是偶质数 2. 此时 $p=97-5\times2=87=3\times29$，与 p 为质数的条件不符．所以只能 p 为偶质

数 2，$5q=95$，$q=19$，是个质数．

$\therefore\quad p^2-q=4-19=-15.$

说明　本题是将方程根的概念与奇偶分析结合考察的例题．检验一个数是否为方程的根，只须将该数代入方程．看这个数是否满足方程即可．

例 6. 有理数$\frac{1}{2}$，$\frac{11}{5}$，8 恰分别是下列三个方程：

$$\frac{2x-1}{3}-\frac{10x+1}{12}=\frac{2x+1}{4}-1$$

$$3(2y+1)=2(1+y)+3(y+3)$$

$$\frac{1}{2}\left[z-\frac{1}{2}(z-1)\right]=\frac{2}{3}(z-1)$$

的根，则$\frac{x}{y}-\frac{z}{x}$的值等于(　)

(A) $-\frac{171}{40}$.　(B) $-\frac{347}{80}$.　(C) $\frac{71}{220}$.　(D) $\frac{142}{55}$.

解：将$\frac{1}{2}$，$\frac{11}{5}$，8 分别代入所给三个方程知：$x=\frac{1}{2}$是方程$\frac{2x-1}{3}-\frac{10x+1}{12}=\frac{2x+1}{4}-1$ 的根.

$y=8$ 是方程 $3(2y+1)=2(1+y)+3(y+3)$的根．

$z=\frac{11}{5}$是方程$\frac{1}{2}\left[z-\frac{1}{2}(z-1)\right]=\frac{2}{3}(z-1)$的根．

$$\therefore\quad \frac{x}{y}-\frac{z}{x}=\frac{\frac{1}{2}}{8}-\frac{\frac{11}{5}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{16}-\frac{22}{5}$$

$$=\frac{5-352}{80}=-\frac{347}{80}$$

选(B).

说明：本题是将解方程与代数式求值相结合的问题，关键是确定$\frac{1}{2}$，$\frac{11}{5}$，8 各是三个方程中哪 一个的根，可以这样进行，先

解一个方程，比如解第一个方程，求得 $x=\frac{1}{2}$，然后取$\frac{11}{5}$与 8 中较易运算的 8 代入第二个方程，若 8 满足第二个方程，则$\frac{11}{5}$必满足第三个方程；若 8 不满足第二个方程，则$\frac{11}{5}$必满足第二个方程，而 8 满足第三个方程.

例 7. 解方程$|1990x-1990|=1990$.

分析：这是含有绝对值符号的方程，去掉绝对值符号可以变为两个一元一次方程求解，因此是可化为一元一次方程的方程.

解法 1：原方程两边同除 1990 得

$$|x-1|=1.$$

当 $x\geqslant 1$ 时，$x-1=1\Rightarrow x=2$.

当 $x<1$ 时，$x-1=-1\Rightarrow x=0$.

经验证，$x=2, x=0$ 都是原方程的根.

解法 2：若 $1990x\geqslant 1990$，则 $1990x-1990=1990$.

得 $1990x=3980\Rightarrow x=2$.

若 $1990x<1990$，则

$$1990x-1990=-1990$$

得 $1990x=0\Rightarrow x=0$.

经验证，$x=2, x=0$ 都是原方程的根.

例 8. 在计算一个正数乘以 $3.5\dot{7}$ 的运算时，某同学误将 $3.5\dot{7}$ 错写作 3.57，结果与正确答案相差 1.4. 求正确的乘积应是多少？

解：设乘以的正数是 x，由于 $3.5\dot{7}=3\frac{52}{90}$，所以正确乘积为 $3.5\dot{7}x$，错误乘积为 $3.57x$. 依题意有 $3.5\dot{7}x-3.57x=1.4$，即得简易方程.

$$\left(3\frac{52}{90}-3\frac{57}{100}\right)x=1.4$$

解得　$x=180.$

所以，正确的乘积结果为

$$3.5\dot{7}\times180=\frac{322}{90}\times180=644.$$

习题 3.1

1. 解方程$\frac{1+x}{4}-\frac{x-2}{8}=1.$

2. 方程$\frac{x}{22.2}=\frac{5}{3.7}$的根是（　）

(A)27.　　(B)28.　　(C)29.　　(C)30.

3. 解方程 $1+\frac{x}{2}+\frac{x}{4}+\frac{x}{8}+\frac{x}{16}=x.$

4. 解方程$\frac{2x-1}{3}-\frac{10x+1}{12}=\frac{2x+1}{4}-1.$

5. 下面判断中正确的是（　）

(A)方程 $2x-3=1$ 与方程 $x(2x-3)=x$ 同解．

(B)方程 $2x-3=1$ 与方程 $x(2x-3)=x$ 没有相同的解．

(C)方程 $x(2x-3)=x$ 的解都是方程 $2x-3=1$ 的解．

(D)方程 $2x-3=1$ 的解都是方程 $x(2x-3)=x$ 的解．

6. 若关于 x 的方程 $19x-a=0$ 的根为 $19-a$，问 $a=?$

§3.2　怎样布列方程

学了方程的基本知识，以及一元一次方程的解法，并且看到了简易方程的优越性，这时总有一种跃跃欲试的心理，要用方程知识去解应用问题，这是一种非常可贵的用数学的意识．

大家都知道，代数是以字母来替代具体的数，把各种实际的数量关系都要“翻译”成代数的语言——代数式．通过代数式来表达数量的相等关系，从而构成方程式，布列方程本质上是把实际应用题转化为代数方程式，是一种“建模”过程．因此，正确地布列方程是列方程解应用问题中关键的一步．

如何布列方程？大科学家牛顿讲过：要解答一个问题，里面含有数量间的抽象关系的，只要把题目由日常的语言译成代数的语言就行了．

例 1．海滩上有一堆核桃，第一天猴子吃掉了这堆核桃的个数的$\frac{2}{5}$，又扔掉 4 个到大海中，第二天吃掉的核桃数若再加上 3 个就是第一天所剩核桃的$\frac{5}{8}$，若第二天剩下 6 个核桃，问海滩上原有核桃多少个？

解：设海滩上原有核桃 x 个，依题意．

第一天，吃掉$\frac{2}{5}x$，扔掉 4 个，则剩余$\frac{3}{5}x-4$ 个．

第二天，吃掉的核桃数为$\frac{5}{8}\left(\frac{3}{5}x-4\right)-3$.

剩余$\frac{3}{8}\left(\frac{3}{5}x-4\right)+3$.

已知，第二天剩下 6 个核桃，所以得方程

$$\frac{3}{8}\left(\frac{3}{5}x-4\right)+3=6.$$

解之得　$x=20$.

验算知 $x=20$ 合于题意，所以，海滩上原来共有 20 个核桃．

例 2．古代数学家刁番图的墓碑有如下碑文：“过路人，这儿埋着刁番图的骨灰，下面的数目可以告诉你他一生寿命究竟有多长．他生命的六分之一是幸福的童年，再活了十二分之一，颊上长起了细细的胡须．刁番图结了婚，可是还不曾有孩子，这样

又度过一生的七分之一，再过五年，他得了头胎儿子，感到很幸福．可是命运给这个孩子在这世界上的光辉灿烂的生命只有他父亲的一半．自从儿子死了以后，这老者在深深的悲痛中活了四年，也结束了尘世的生涯．”请您讲，刁番图活到多少岁才和死神相见？

解：我们采用对照方法把日常语言翻译成代数语言，列表如下：

日　常　语　言	代数语言
刁番图一生寿命	设为 x 岁
生命$\frac{1}{6}$是童年	$\frac{x}{6}$
再活了$\frac{1}{12}$，颊上长了胡须	$\frac{x}{12}$
结婚后度过了生命的$\frac{1}{7}$	$\frac{x}{7}$
再过 5 年，得到儿子	5
儿子寿命是父亲的一半	$\frac{x}{2}$
儿子死后父亲又活了四年	4

这时，刁番图结束了尘世生涯与与死神相见，依题意，整个年龄等于各阶段年数之和，有

$$x=\frac{x}{6}+\frac{x}{12}+\frac{x}{7}+5+\frac{x}{2}+4$$

解之得　$x=84$.

答：刁番图一生活了 84 岁．

本题以慢镜头的形式显现了布列方程的过程，其步骤要点是：

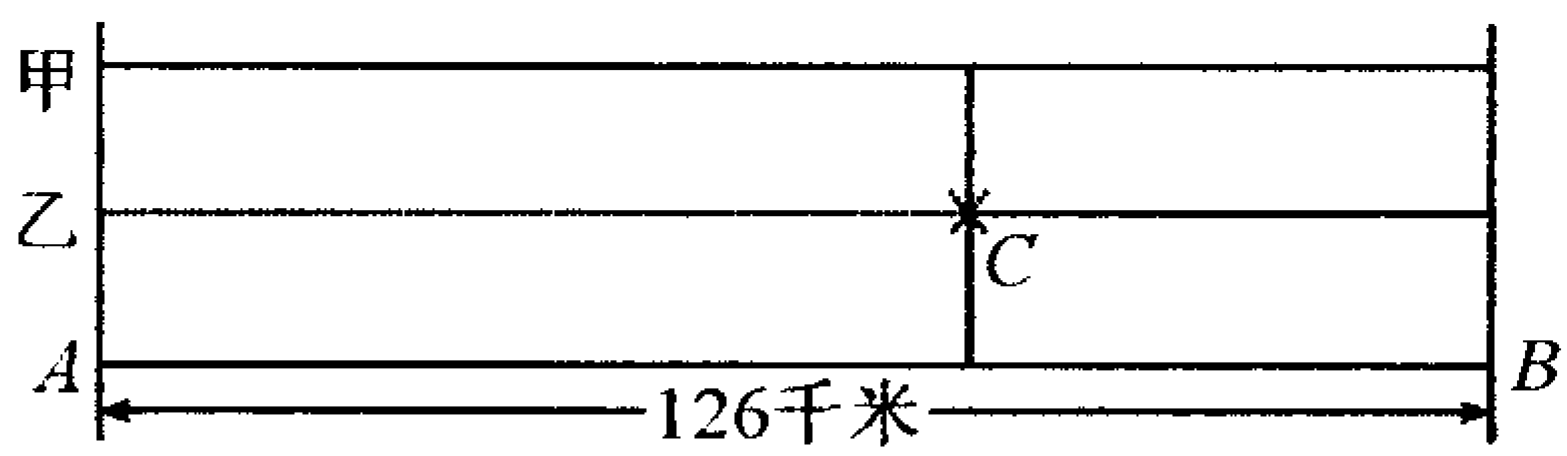
1. 弄清题意，正确理解、准确把握题目条件中的数量关系，必要时可用图表辅助分析．

2. 用字母 x 表示问题中的一个未知数．

3. 将题设条件中的语句都“翻译”成含 x 的代数式.

4. 寻找等量关系,根据这个关系组成含 x 的代数式间的等式,这样就列出了方程.

例 3. A、B 两地距离 126 千米,甲每小时行 20 千米,乙每小时行 16 千米,甲、乙二人同时由 A 地出发向 B 地行进,甲到 B 地后立即返回.问从 A 出发后几小时乙在去路上恰遇甲于归途中?



分析:(1)这是一个匀速运动的行程问题,甲时速 20 千米,乙时速 16 千米,其行进过程如图所示:甲由 A 到 B 即刻返回,在途中与乙相遇在 C 点,其中 $A \to B \to C$ 表示了甲行的路程,虚线 $A \to C$ 表示乙行的路程.

(2)设从 A 出发后 x 小时甲在归途中与乙相遇在 C 点.

(3)甲 x 小时共走了 $20x$ 千米($AB+BC$ 的路程),乙 x 小时共走了 $16x$ 千米(AC 的路程).因此,甲、乙二人从 A 出发到在 C 相遇共走了$(20x+16x)$千米的路程.

(4)我们发现$(20x+16x)$千米的路程恰等于 $AB+BC+AC=2AB=2\times126$ 千米,抓住这个等量关系我们列出方程

$20x+16x=2\times126$

(5)解之,得 $x=7$,即从 A 出发后 7 小时甲与乙相遇.

例 3 是个行程问题,解行程问题的基本公式是

路程=速度×时间

其中多数情况下是在路程或时间上寻求等量关系,上面的解法是在路程方面寻求等量关系,现在我们再从时间方面寻求相等关系来列方程.

另解:设乙走的路程 AC 为 x 千米,则甲由 $A \to B \to C$ 的路

程为$(2\times126-x)$千米，乙行 x 千米用$\frac{x}{16}$小时，甲行$(2\times126-x)$千米用$\frac{2\times126-x}{20}$小时，由于这两个时间相等，于是可列出方程

$$\frac{x}{16}=\frac{2\times126-x}{20}$$

解得 $x=112$(千米)，所以乙从 A 出发后$\frac{112}{16}=7$(小时)在去的路上恰遇甲于归途中．

例 4. 一架飞机飞行在两个城市之间，风速为每小时 24 千米，顺风飞行需 $2\frac{5}{6}$小时，逆风飞行需 3 小时，求两个城市间的距离．

解:(1)设两个城市为 A、B，若由 A 向 B 飞行是顺风，则由 B 向 A 飞就是逆风，在匀速飞行中．

顺风速＝无风时飞行速度＋风速

逆风速＝无风时飞行速度－风速

(2)设两个城市之间的距离为 x 千米，则顺风飞行速度为$\frac{x}{2\frac{5}{6}}$，逆风飞行速度为$\frac{x}{3}$.

(3)由于飞机在无风时飞行速度是个定值．

即　顺风速－风速＝逆风速＋风速

所以得方程式

$$\frac{x}{2\frac{5}{6}}-24=\frac{x}{3}+24$$

解之，得　$x=2448$(千米).

另解:设无风时飞机速度为 x 千米/小时，则飞机顺风时速度为$(x+24)$千米/小时．逆风时的速度为$(x-24)$千米/小时，但顺风飞行 $2\frac{5}{6}$小时与逆风飞行 3 小时的路程相等，于是可列

出方程.

$$2\frac{5}{6}(x+24)=3(x-24)$$

解得　$x=840$(千米/小时).

进而求出两城距离为 $3\times(840-24)=2448$(千米).

请你总结一下,例 4 的两种列方程方法中都是抓住什么样的量作为等量关系?

例 5. 有含盐 8%的盐水 40 千克,要配成含盐 20%的盐水,需要加盐多少千克?

分析:例 5 是溶液浓度问题,先要弄清一些概念,两种物质的均匀的分子混合物叫做溶液,被溶解的物质(如盐)叫溶质.溶解物质的介质(比如水)叫做溶剂,在一定量的溶液中所含溶质的量叫做"溶液的浓度",以下的关系式是基本的:

溶液重量=溶质重量+溶剂重量

$$溶液浓度=\frac{溶质重量}{溶液重量}\times100\%$$

$$=\frac{溶质重量}{溶质重量+溶剂重量}\times100\%$$

解:(1)设需加盐 x 千克.

(2)配成的盐水为$(x+40)$千克,其中含盐为$(40+x)\times20\%$千克,而 40 千克 8%的盐水中含盐 $40\times8\%$千克.

(3)由溶质(盐)的总量=原溶液中含盐量+加入的盐量,得方程

$$(40+x)\times20\%=40\times8\%+x$$

解之,得　$x=6$(千克).

另解:加盐后溶质的量虽然改变,但溶剂(水)的量未发生变化,是个不变量.因此设需加盐 x 千克,可列出方程

$$(40+x)\times80\%=40\times92\%$$

解之,得　$x=6$(千克).

用一元一次方程求解溶液浓度问题主要有两种基本类型,

其一，在溶液中添加溶质．这时新溶液中，溶质质量等于原溶液中溶质量加上加入的溶质量作为等量关系；其二，添加溶剂稀释溶液浓度，其中溶质在稀释前后保持不变，是个不变量，可以作为等量关系．以上两种类型又可统一为同种不同浓度的溶液混合问题．

一般地，浓度为 $p\%$的盐水 M 克要变为浓度为 $q\%$的盐水 N 克，需加入浓度为 $r\%$的盐水多少克？

抓住甲溶液中溶质与乙溶液中溶质含量之和等于混合液中溶质的含量这个等量关系．设加入浓度为 $r\%$的盐水 x 克，则可列出方程式：

$$M \cdot p\% + x \cdot r\% = N \cdot q\%$$

总之，寻求等量关系的途径因题而异，但有一点是共同的，就是在变化的诸未知量中找不变的量，从运动变化的关系中找相对稳定的相等关系，这就是寻求等量关系的要点之所在．

习题 3.2

1. 今年弟弟的年龄恰是哥哥年龄的$\frac{1}{2}$，而九年前弟弟的年龄只是哥哥年龄的$\frac{1}{5}$，问哥哥现年多少岁？

2. 把 45 分为四个整数，使第一个数加上 2，第二个数减去 2，第三个数乘以 2，第四个数除以 2 后，所得结果都相等．问所分的四个数各是多少？

3. 某商店有幸福金笔和英雄金笔共 143 只，幸福金笔每只 6 元，英雄金笔每只 3.78 元，某学校购了该商店的全部英雄金笔和部分幸福金笔，经过核算后，发现应付款的总数与幸福金笔总数无关，问购买的幸福金笔是该商店幸福金笔总数的百分之几？

4. 要将含盐15%的盐水20千克，变为含盐20%的盐水，问需加入纯盐多少千克?

5. 某缝纫师做成一件衬衣、一条裤子、一件上衣所用的时间为1:2:3. 他用十个工时能做成2件衬衣，3条裤子和4件上衣，那么他要做成14件衬衣，10条裤子和2件上衣，共需多少工时?

6. 甲用40秒可绕一环形跑道跑一圈，乙反方向跑每隔15秒与甲相遇一次，问乙跑一圈的时间需要多少秒?

§3.3 行程问题的基本模型

物体的运动，最简单的情形是匀速直线运动，设物体作匀速直线运动的速度为v，在时间t内运动的距离为S，则有

$S=v\cdot t$

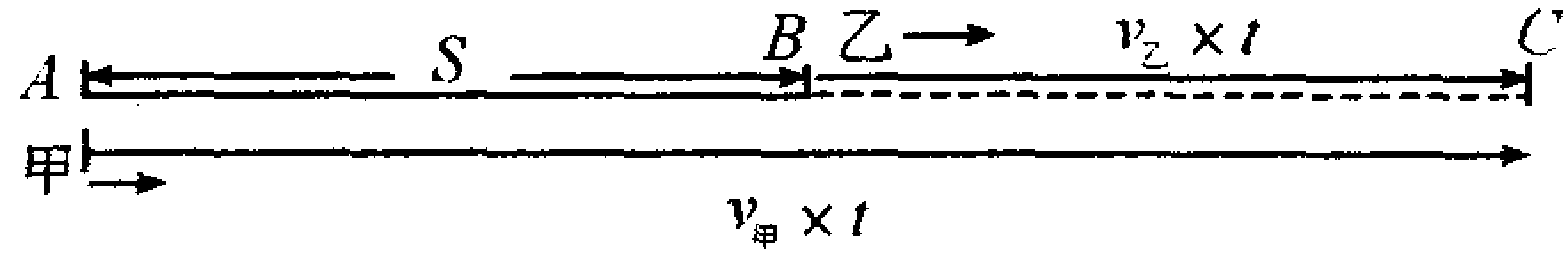
这就是物体作匀速直线运动的数学模型.

由于实际物体运动未必都是匀速的，比如汽车在行程中，开动时速度是由小变大，停止时速度是由大变小的. 这些我们都忽略不计，而将汽车速度看成是“平均速度”，这样就将实际上并不是均速运动的情形加以简化，近似地看成匀速运动. 在小学、初中阶段我们研究行程问题，都是在匀速运动模型中进行的.

行程问题中，追及、相遇又是两种最基本的模型.

追及模型 甲、乙二人分别由距离为S的A、B两地同时同向(由A到B的方向)行走. 甲速$v_甲$大于乙速$v_乙$，设经过t时间后，甲可追及乙于C，则有

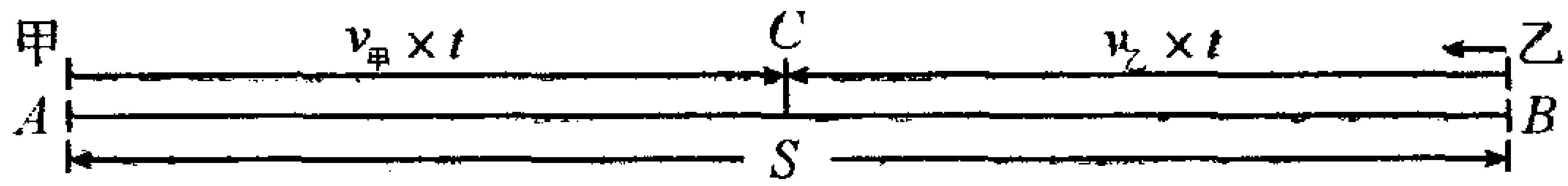
$S=(v_甲-v_乙)\times t$



相遇模型 甲、乙二人分别由距离为S的A、B两地同时相

向行走，甲速为 $v_甲$，乙速为 $v_乙$，设经过 t 时间后，二人相遇于 C. 则有

$$S=(v_甲+v_乙)\times t$$



利用一元一次方程及二元一次方程组所解的行程问题，大体都可纳入追及或相遇两种模型.

例 1. 时速 4 千米的 A 追赶时速 3 千米的 B，两人相距0.5 千米时，有一只蜜蜂从 A 的帽子上开始来回在两人中间飞，直飞到 A 追及 B 为止，若蜜蜂时速 10 千米. 问蜜蜂飞了多少千米？（选自古代的问题）

解：设蜜蜂飞了 x 千米.

由于蜜蜂飞的时间等于 A 追及 B0.5 千米所用的时间，依此为等量关系列得方程.

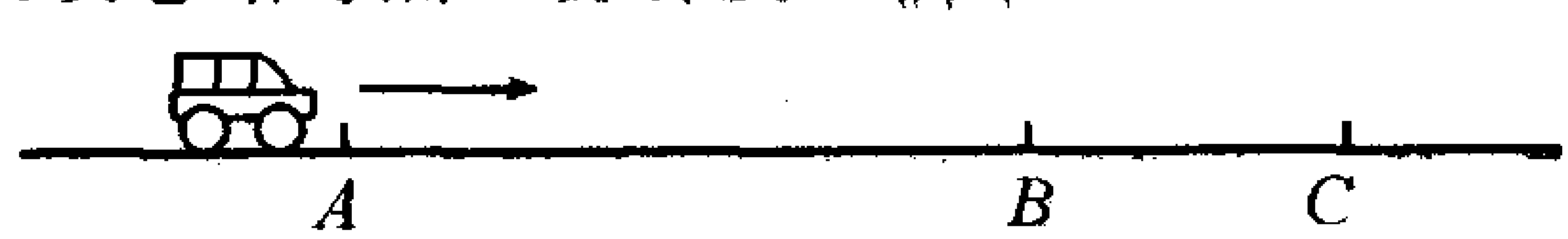
$$\frac{0.5}{4-3}=\frac{x}{10}$$

解这个方程，得 $x=5$.

答：蜜蜂飞了 5 千米.

例 2. 总站每隔一定时间发车一次，有人在街上匀速行走，发现从背后每隔 6 分钟开过一辆汽车，而迎面每隔 $4\frac{2}{7}$ 分钟有一辆汽车驶来，问总站每隔多少时间发一辆车？

分析：设总站每隔 x 分钟发一辆车.

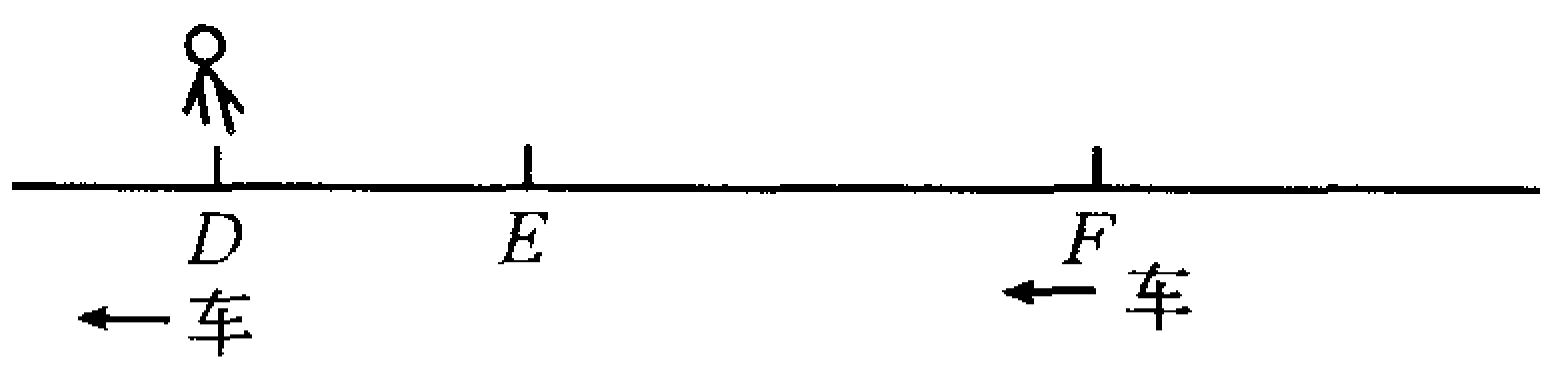


若人在 A 处时正好有一辆车开过，对于 A 处来讲必须再等 x 分钟后才又有一辆车从背后开来，但 x 分钟后人已从 A 走到 B 处，这时 A 处的车与 B 处的人成同时同向行走并在 C 处车可

追上人．依题意人由 A 到 C 花了 6 分钟，显然人由 B 到 C 用 $6-x$ 分钟，这与汽车从 A 到 C 花的时间相等．于是对行 AC 距离而言，汽车速度 $\times(6-x)=$ 人的速度 $\times 6$

$$\therefore \quad \frac{\text{汽车的速度}}{\text{人的速度}}=\frac{6}{6-x} \qquad ①$$

另一方面，如下图若人在 D 处时迎面有一辆车开过，设再过 x 分钟才到达 D 的后一辆车正在 F 处，也就是说 DF 这段路程汽车需要走 x 分钟(因为每隔 x 分钟发车一次)．但当人继续前进时，汽车也从 F 与人相向而行．由题意走了 $4\frac{2}{7}$ 分钟后在 E 处与车相遇，因为车从 F 到 D 需 x 分钟．从 F 到相遇点 E 已用了 $4\frac{2}{7}$ 分钟．所以车从 E 到 D 需 $x-4\frac{2}{7}$ 分钟同样行走 DE.



汽车的速度 $\times(x-4\frac{2}{7})=$ 人的速度 $\times 4\frac{2}{7}$

$$\therefore \quad \frac{\text{汽车的速度}}{\text{人的速度}}=\frac{4\frac{2}{7}}{x-4\frac{2}{7}} \qquad ②$$

由①,②得 $\quad \dfrac{6}{6-x}=\dfrac{4\frac{2}{7}}{x-4\frac{2}{7}}$

解之得，$x=5$.

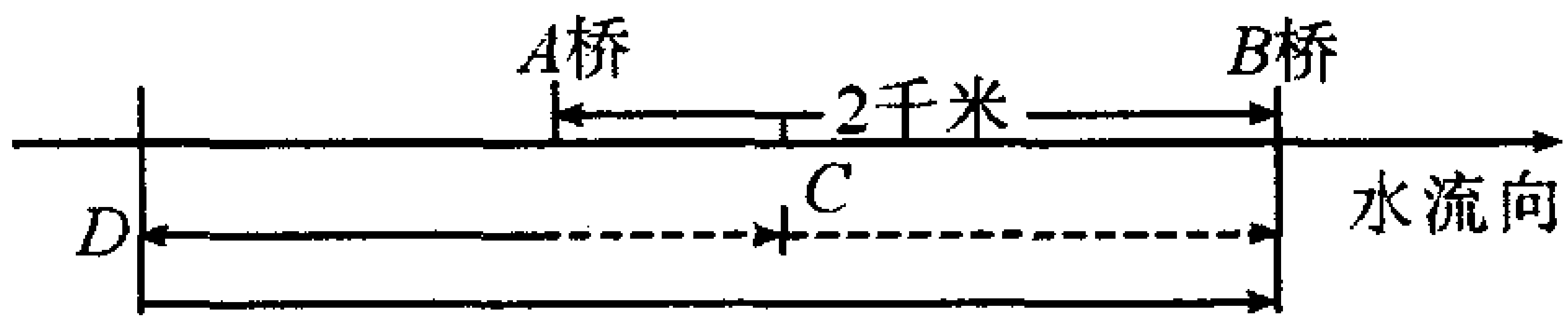
答：总站每隔 5 分钟发一辆车．

说明：本题实质上是由相遇模型与追及模型组合而成的，因此在解题过程中要分别为两个模型寻求关系．

例 3. 游泳者在河中逆流而上，于桥 A 下面将水壶遗失被水

冲走，继续前游 20 分钟后他发现水壶遗失，于是立即返回追寻水壶．在桥 A 下游距桥 A2 千米的桥 B 下面追到了水壶．问该河水速每小时多少千米？

解：设该河水速每小时 x 千米，游泳者每小时游 a 千米，则游泳者逆游每小时行 $a-x$ 千米，顺流速 $a+x$ 千米/小时．



题意表明，在 A 处游泳者失去水壶，他逆游 20 分钟（$\frac{20}{60}$小时）到了 D 处，发现水壶遗失，这时水壶已顺流漂下 20 分钟到 C 处．AC 距 $x\times\frac{20}{60}$千米．游泳者距水壶为$\frac{20}{60}(a-x)+x\cdot\frac{20}{60}$千米，形成游泳者与水壶分别从 D、C 顺流而下，游泳者速度为每小时 $a+x$ 千米，水壶每小时速为 x 千米的追及问题．换言之，游泳者顺流行 DB 的时间与水壶顺流漂 CB 的时间相等．于是可列方程如下

$$\frac{2+\frac{20}{60}(a-x)}{a+x}=\frac{2}{x}-\frac{20}{60}$$

$$2+\frac{a}{3}-\frac{x}{3}=\left(\frac{2}{x}-\frac{1}{3}\right)(a+x)$$

即　$$2+\frac{a}{3}-\frac{x}{3}=\frac{2a}{x}-\frac{a}{3}+2-\frac{x}{3}$$

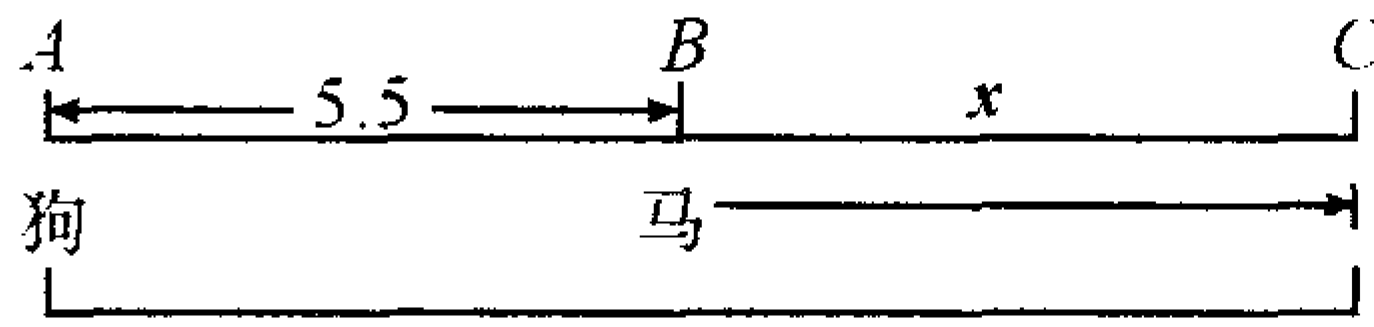
$$\frac{2a}{x}=\frac{2a}{3}.$$

$\because\ a\neq0\quad\therefore x=3.$

答：该河水速每小时 3 千米．

说明：本题只要游泳者游速大于每小时 3 千米时都是合理的．

例 4．马跑 5 步的时间狗跑 6 步，狗跑 4 步的距离与马跑 7 步的距离相同，马已跑出 5.5 千米时，狗开始追它，马再跑多远，狗可追及马？（选自古代的问题）



分析:设马再跑 x 千米,狗可追及马在 C 点,这表明狗跑 $5.5+x$ 千米与马跑 x 千米所用时间相同.因此,关键在马与狗的速度之间关系的分析.

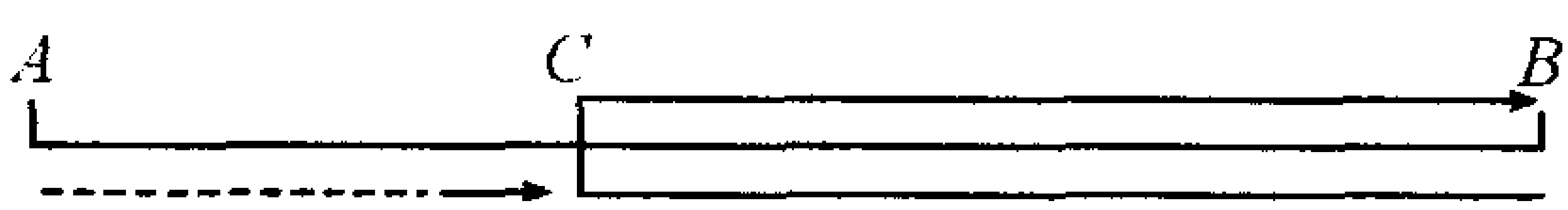
由题设狗跑 4 步的距离与马跑 7 步的距离相同.这就是说,狗跑一步的距离是马跑一步距离的$\frac{7}{4}$倍;又题设马跑 5 步的时间狗跑 6 步,这就是说,马跑一步的时间是狗跑一步时间的$\frac{6}{5}$倍,所以在同一时间内,狗跑的距离是马跑距离的$\frac{7}{4}\times\frac{6}{5}$倍,由此得方程:

$$1:x=\frac{7}{4}\times\frac{6}{5}:(x+5.5)$$

解这个方程,得 $x=5$.

答:马再跑 5 千米狗可追及马.

例 5.某人每天下午 5 点下班时,有汽车按时到达接他回家.有一天,他提前一小时结束工作因汽车未到遂步行回家,在途中遇到接的汽车又乘车因而比平日早 10 分钟到家.问某人步行多少分钟遇到汽车的?



解:设某人工作地点在 A,家在 B,下午 4 点某人步行出发向 B 走与按时开出来接他的汽车相遇于 C 点.这样汽车由 C 返回到 B 比往常提前 10 分钟.这表明汽车由 $C\to A\to C$ 共需 10 分钟,因此,汽车由 C 到 A 共需 5 分钟,但某人从下午 4 点动

身自 A 行至 C 与汽车相遇后若汽车继续由 C 向 A 行驶 5 分钟可到 A 此时恰是下午 5 点，设某人步行了 x 分钟，则

$x+5=60$　　　$x=55$.

答：某人共步行了 55 分钟．

例 6. 今给 1000 名徒步行进时速为 5 千米的某部队配备每辆载人 50 名时速为 25 千米的大汽车 5 辆，于上午 6 时协同部队同时出发．开赴相距 100 千米的某地集结，设上车下车所需的时间略去不计，试编拟一行军计划，标明徒步行军与汽车运送如何同时进行，方能使全体部队于最短时间内到达集结地点，并作一简图表明汽车往返行驶的路线．

解：在汽车不够的情况下，要使全体部队在最短时间内到达集结地点，必须汽车运送与步行同时进行，且汽车运送的起先几批人，必须各在中途适当的地点下车，然后继续步行前进到达终点，决不能先把一批人直接运到终点停留在那里，这样就浪费时间；而空车往回开时遇到后面步行的部队，应当即行载上向前方前进，最后乘车的一批人与其他几批已乘过车而继续步行的人应同时到达集结地点，因此每人乘车的时间应相等，步行的时间也应相等．

现 5 辆车可载 250 人，故把 1000 人分成每队 250 人的四个分队，每个分队轮流乘车一次，设每队乘车的时间是 x 小时，汽车把第一分队人运到距出发地点 $25x$ 千米处后即往回开，而第一分队下车后继续步行前进．当汽车和其他三个分队相遇时，汽车和他们步行合计路程是 $50x$ 千米，而汽车的速度和步行的速度之比是 5∶1，所以相遇地点与出发点的距离是 $\frac{50x}{6}$ 千米，相遇的汽车把第二分队人载上前进，到和相遇地点距离 $25x$ 千米处第二分队人下车后再往回接运第三分队的人，而第二分队的人继续步行前进，这样继续进行，最后把第四分队人直接运至终点，而其他三个已乘过车而中途下车步行的分队和载第四分队

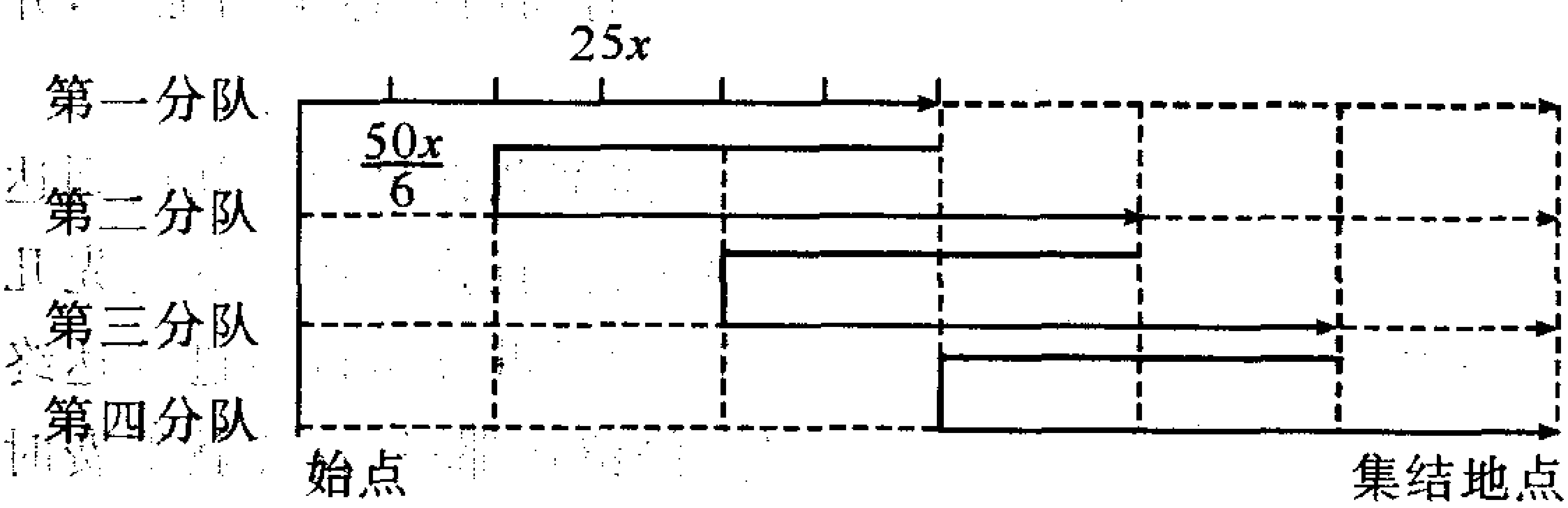
的汽车一齐到达终点．这样就得到了方程式

$$3\cdot\frac{50x}{6}+25x=100$$

解之得　$x=2$.

即每队乘车 2 小时共行 50 公里，其余 50 公里步行需 10 小时，所以经过 12 个小时后全体部队都可同时到达集结地点，也就是全体部队于下午 6 点到达集结地点．

下面可作出一简图表明四个分队的行军路线，其中实线表示汽车行进的运行图，虚线表示徒步行军的路线．



例 7. 已知猫跑 5 步的路程与狗跑 3 步的路程相同；猫跑 7 步的路程与兔跑 5 步的路程相同，而猫跑 3 步的时间与狗跑 5 步的时间相同；猫跑 5 步的时间与兔跑 7 步的时间相同．猫、狗、兔沿着周长为 300 米的圆形跑道，同时同向同地出发．问：当它们出发后第一次相遇时各跑了多少路程．

解：设猫速为 $v_{猫}$，狗速为 $v_{狗}$，兔速为 $v_{兔}$，依例 4 的方法分析，得出

$$\frac{v_{狗}}{v_{猫}}=\frac{25}{9},\frac{v_{兔}}{v_{猫}}=\frac{49}{25}$$

可见狗跑得最快，兔次之，猫最慢．

设经过时间 t 后猫、狗、兔三者相遇，那么可以假定，狗比猫多跑 n_1 圈，兔比猫多跑 n_2 圈，狗比兔多跑 n_3 圈，所以有

$$t(v_{狗}-v_{猫})=n_1\times300$$

$$t(v_{兔}-v_{猫})=n_2\times300$$

$t(v_{狗}-v_{兔})=n_3\times 300$

因此，$\dfrac{v_{狗}-v_{猫}}{v_{兔}-v_{猫}}=\dfrac{n_1}{n_2}$　　　$\dfrac{v_{狗}-v_{兔}}{v_{兔}-v_{猫}}=\dfrac{n_3}{n_2}$

或 $\dfrac{\dfrac{v_{狗}}{v_{猫}}-1}{\dfrac{v_{兔}}{v_{猫}}-1}=\dfrac{n_1}{n_2}$；$\dfrac{\dfrac{v_{狗}}{v_{兔}}-1}{1-\dfrac{v_{猫}}{v_{兔}}}=\dfrac{n_3}{n_2}$

即 $\dfrac{\dfrac{25}{9}-1}{\dfrac{49}{25}-1}=\dfrac{n_1}{n_2}=\dfrac{50}{27}$；$\dfrac{\dfrac{625}{441}-1}{1-\dfrac{25}{49}}=\dfrac{n_3}{n_2}=\dfrac{23}{27}$

所以 $n_1=\dfrac{50}{27}n_2$，　$n_3=\dfrac{23}{27}n_2$

n_1 与 n_3 都是正整数，所以 n_2 为 27 的倍数，第一次相遇，取 $n_2=27$，得 $n_1=50$，$n_3=23$.

而 $t\times v_{狗}(1-\dfrac{v_{猫}}{v_{狗}})=50\times 300=15000$

$$tv_{狗}=\frac{15000}{1-\dfrac{9}{25}}=23437.5(\text{米})$$

即　出发后三者第一次相遇时，狗跑了 23437.5 米，而猫跑了 $23437.5-15000=8437.5$(米)，兔跑了 $23437.5-23\times 300=16537.5$(米).

答：出发后，猫、狗、兔第一次相遇时，狗跑了 23437.5 米，兔跑了 16537.5 米，猫跑了 8437.5 米 .

说明：例 7 是第 5 届华杯赛决赛一试第 4 题 . 他的来源是由例 4 发展深化而来的，这是华杯赛中很多试题的一种来源途径 .

习题 3.3

1. 一个人骑车上班每分钟比平时快 10 米，结果提前 5 分

钟到达工作地点;下班时每分钟比平时慢 10 米,结果晚到家 7 分钟. 问这个人的家与他工作地点相距多少米?

2. 甲、乙二人分别从 A、B 两地同时相向匀速行进,第一次相遇在距 A 点 700 米处,然后继续前行甲到 B 处,乙到 A 处后都立即折回,第二次相遇在距 B 点 400 米处. 求 A、B 两地的距离是多少米?(1993 年北京市中学生数学竞赛试题)

3. 某手表每小时比准确时间慢 3 分钟,若在清晨 4 点 30 分与准确时间对准,则当天上午该手表指示时间是 10 点 50 分时,准确时间应该是几点几分?(1988 年全国初中通讯赛试题)

§3.4 要培养设元分析的意识

初一年级是从小学算术向中学代数实现飞跃的时期. 设未知数(元),寻求等量关系列方程的思想不但在行程问题,溶液配比问题中应用,而应该有设元的意识,在分析各种类型的问题中设法应用,这对我们思考问题,弄清数量之间的关系是非常有益的.

例 1. 六张大小不同的正方形纸片拼成如图 1 所示的图形. 已知最小的正方形面积是 1. 问:图中红色正方形的面积是多少?

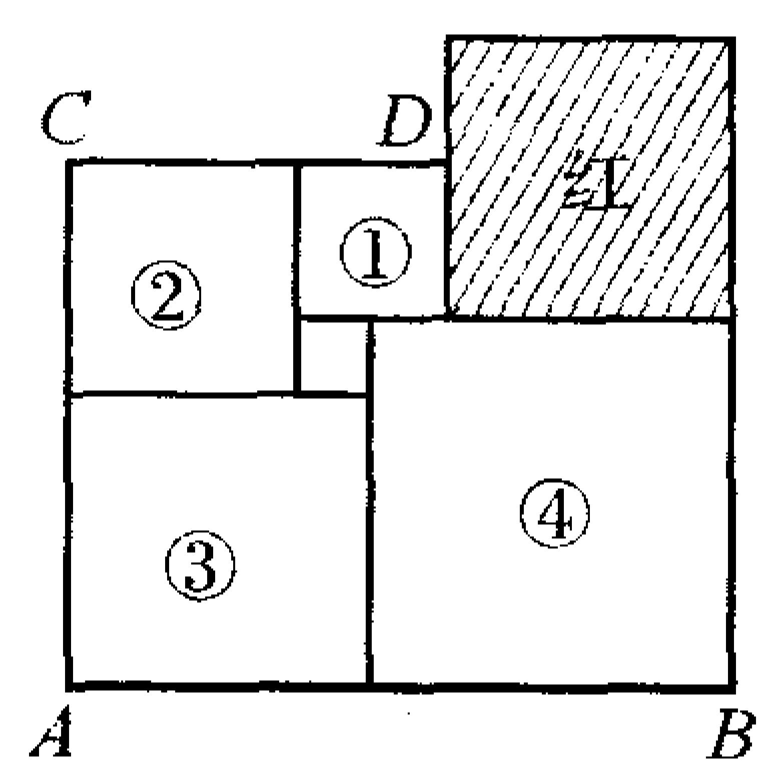


图 1

解:设正方形①的边长为 x,由图 1 中可见,正方形②的边长是 $x+1$,正方形③的边长是 $x+2$,正方形④的边长是 $x+3$. 所以 $CD=x+(x+1)=2x+1$.

$AB=(x+2)+(x+3)=2x+5$

所以红色正方形的边长等于$(2x+5)-(2x+1)=4$.

所以红色正方形面积等于 16.

例 2. 十个人围成一圈,每个人心里想好一个数,并把自己

想的数如实告诉自己左、右两旁的人，每个人都把两旁人告诉自己的数的平均数报出来．报出的数依次是 1、2、3、4、5、6、7、8、9、10（如图 2 所示），问报 3 的人心里想的数是几？请把每个人心里想的数都写出来．

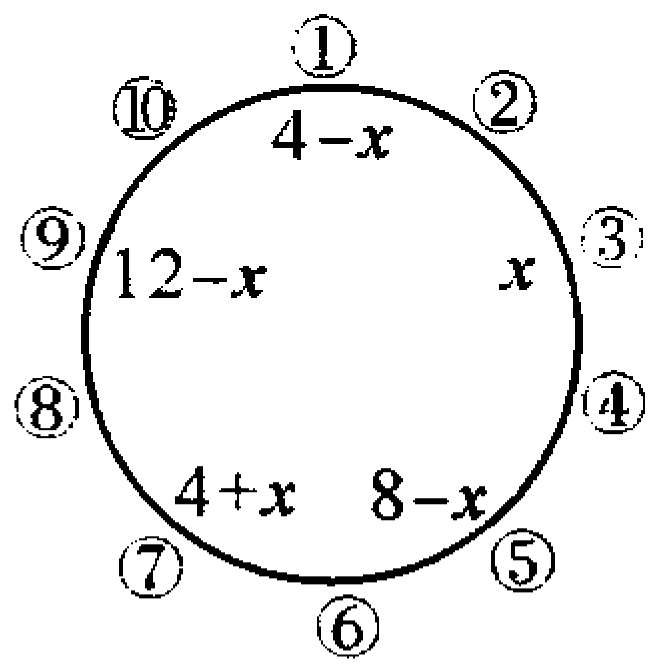


图 2

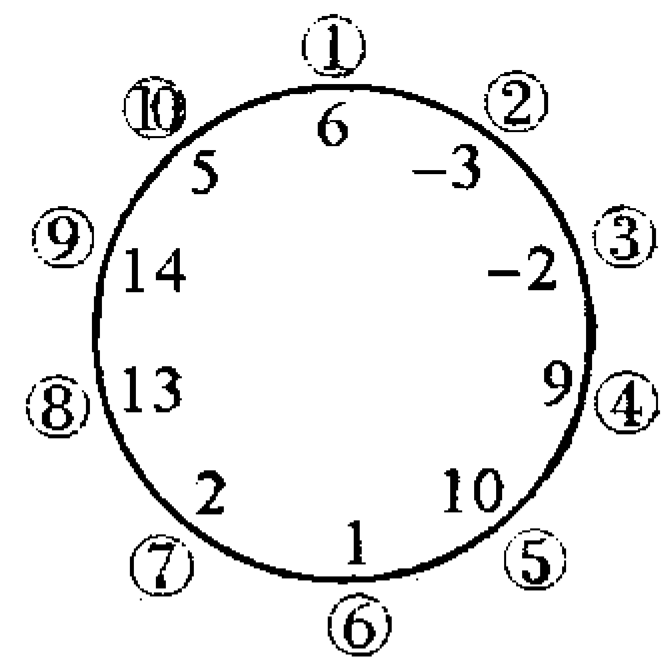


图 3

解：设报 3 的人心里想的数是 x，则报①的人想的数应是 $4-x$，报⑤的人心里想的数是 $8-x$，进而报⑦的人心里想的数是 $12-(8-x)=4+x$，报⑨的人心里想的数是 $16-(4+x)=12-x$，由报⑩的人所报的数是报⑨的人心里想的数 $12-x$ 与报①的人心里想的数 $4-x$ 的平均数，则

$$(12-x)+(4-x)=2\times 10$$

解得　$x=-2$.

答：报③的人心里想的数是 -2. 由此可以得出报①的人心里想的数是 6，报⑤的人心里想的数是 10，报⑦的人心里想的数是 2，报⑨的人心里想的数是 14.

同法，设报②的人心里想的数为 y，则报⑩的人心里想的数是 $2-y$，报④的人心里想的数是 $6-y$，报⑥的人心里想的数是 $10-(6-y)=4+y$，报⑧的人心里想的数是 $14-(4+y)=10-y$. 于是列得方程 $(10-y)+(2-y)=2\times 9$.

解得 $y=-3$.

即　报②的人心里想的数是 -3，进而可得报 10 的人心里想的数是 5，报④的人心里想的数是 9，报⑥的人心里想的数是 1，报⑧的人心里想的数是 13.

每个人心里想的数如图 3 中所示．

例 3. 一块长为 5 厘米、宽为 2 厘米的长方形纸板，一块长为 4 厘米、宽为 1 厘米的长方形纸板，与一块正方形以及另两块长方形纸板，如图 4 恰拼成一个大正方形．问大正方形的面积是多少平方厘米？

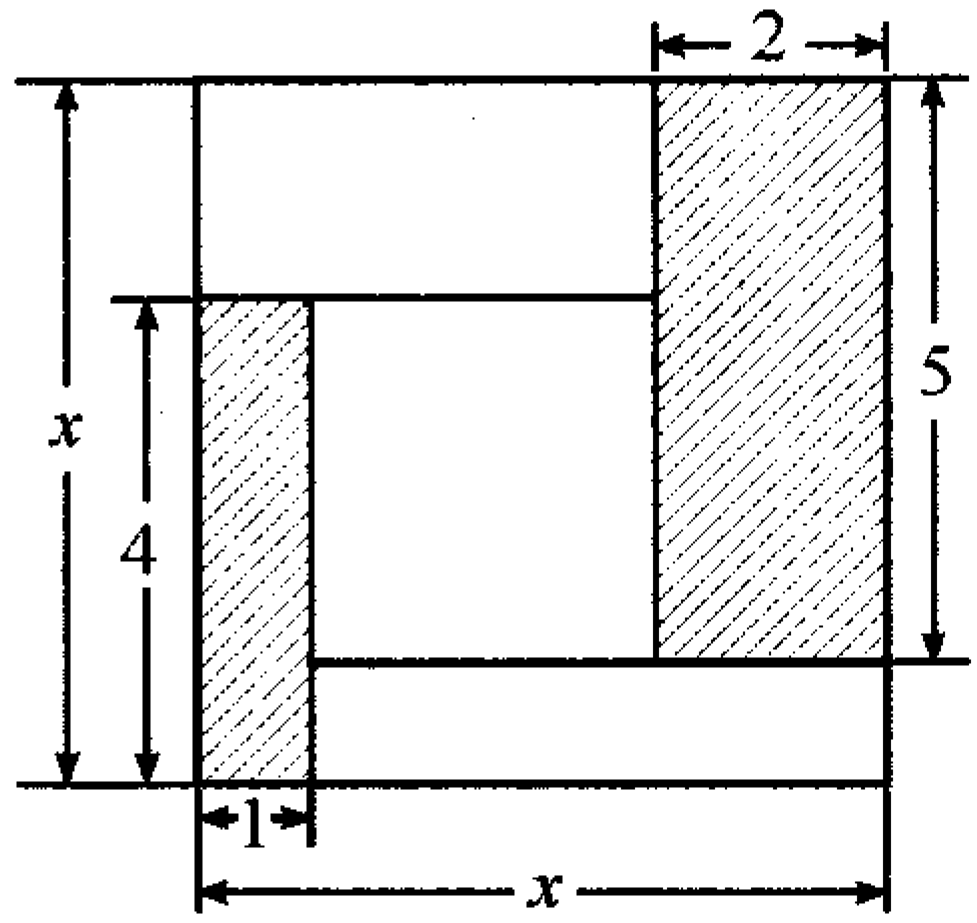


图 4

解：设大正方形的边长为 x，则从水平方向看小正方形的边长为 $x-1-2$，从竖直方向看小正方形的边长为 $5-(x-4)$.

由于正方形的边长相等，可列出方程

$x-1-2=5-(x-4)$

解得　$x=6$(厘米)

所以大正方形的面积是 36 平方厘米．

例 4. 在计算一个正数乘以 $3.5\dot{7}$ 的运算时，某同学误将 $3.5\dot{7}$ 错写作 3.57，结果与正确的答案相差 1.4. 求正确的乘积结果应是多少？

解：设 $3.5\dot{7}$ 所乘的那个正数为 x，由于 $3.5\dot{7}=3\frac{52}{90}$.

依题意

$3.5\dot{7}x-3.57x=1.4$

$(3\frac{52}{90}-3\frac{57}{100})x=1.4$

解得　$x=180$.

所以，正确的乘积结果为

$3.5\dot{7}\times180=\frac{322}{90}\times180=644$.

例 5. 在图 5 中有 9 个方格，要求每个方格填入不同的数，

使得每行、每列、每条对角线上三个数之和都相等，问：图 5 左上角的数是多少？

?		
		19
	13	

图 5

x	x_1	x_2
	x_3	19
	13	x_4

图 6

解：如图 6，设相应方格中的数为 x_1，x_2，x_3 和 x_4，问号处填的数为 x.

由已知条件：行、列及对角线的三个数的和都相等，可以列出下面的等式

$$x+x_1+x_2=x+x_3+x_4=x_1+x_3+13=x_2+19+x_4$$

这样，前面两个式子之和等于后面的两个式子之和

即　$2x+x_1+x_2+x_3+x_4=13+19+x_1+x_2+x_3+x_4$

∴　$2x=13+19$

因此　$x=16$.

例 6. 用边长相同的正六边形白色皮块、正五边形黑色皮块总计 32 块．缝制成一个足球．如图 7 所示，每个黑色皮块邻接的都是白色皮块；每个白色皮块相间地与 3 个黑色皮块及 3 个白色皮块相邻接．

图 7

请你回答：这个足球上共有多少块白色皮块？

解：设这个足球上共有 x 块白色皮块，则共有 $3x$ 条边是黑白皮块共有的．另一方面，黑色皮块有 $32-x$ 块，共有 $5(32-x)$ 条边是黑白皮块共有的．

由于在这个足球上黑、白皮块共有的边是个定值，列得关系式　$3x=5(32-x)$

解得　$x=20$.

即　这个足球上共有 20 块白色皮块.

例 7. 将 1—16 这十六个整数填入 4×4 的正方形表格中，使得每行、每列、每条对角线上四个数之和都相等，如图 8 所示，恰有 8 个小方格中填的数被一个淘气的小朋友擦掉了. 请你将擦掉的 8 个数设法恢复出来.

解:设所填表中每行、每列、每条对角线四数之和为 S,则可得

$$4S=1+2+3+4+\cdots+15+16=\frac{16*17}{2}$$

所以　$S=34$.

再设左上角所擦的数为 x,则左下角擦的数应为 $14-x$. 右下角擦掉的数为 $15+x$,其余各格中擦掉的数都可表为 x 的代数式如图 9 中所示.

现将主对角线上的数相加应得 34,

于是 $30+4x=34$.　解得　$x=1$.

		14	4
12			9
8	10		
	3	2	

图 8

x	$16-x$	14	4
12	$5+x$	$8-x$	9
8	10	$10+x$	$6-x$
$14-x$	3	2	$15+x$

图 9

于是可以依次算出被擦掉的各数,恢复后填如图 10 所示.

1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

图 10

于是可以依次算出被擦掉的各数，恢复后填如图 10 所示．

例 8. 在一个立方体顶点的圆圈中标上 1—9 的数码中的 8 个．使得每个面上 4 个顶点所标数码之和彼此相等，并且这个和数不能被那个未被标上的数码整除．

试求：未被标上的数码是几？并给出一种填数的方法．

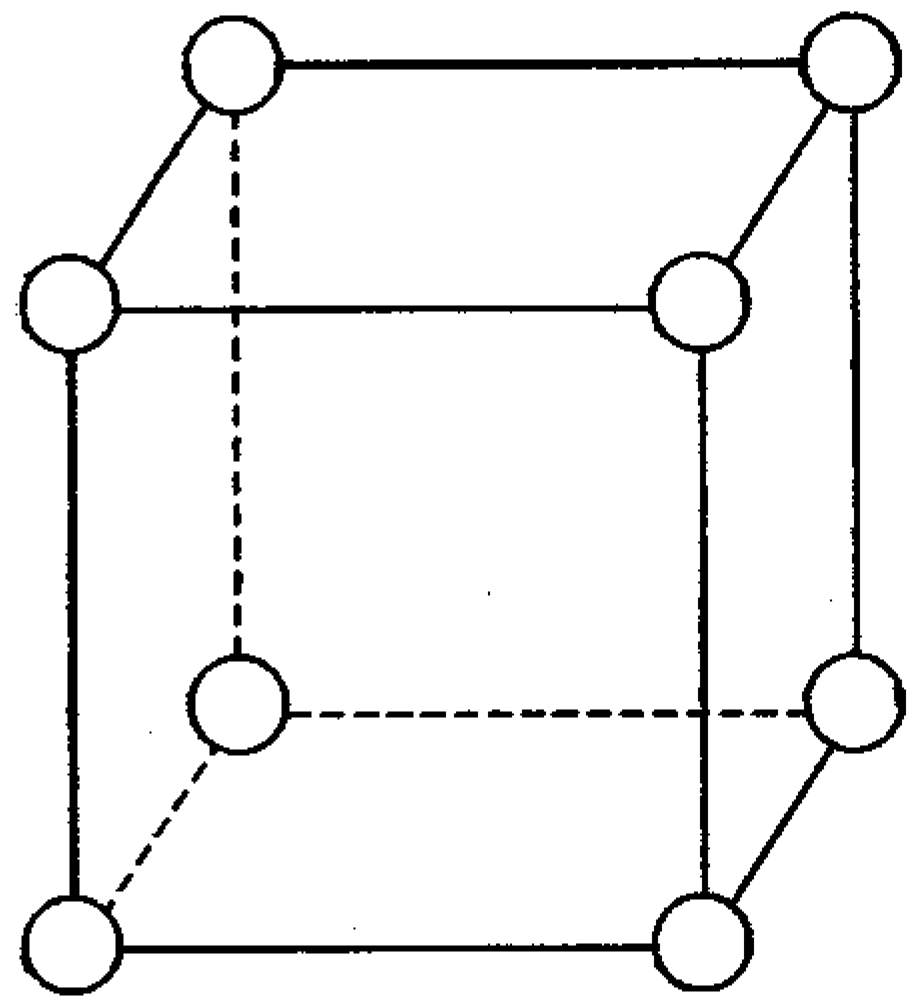


图 11

解：设 a 是未被标出的数码，S 是每个面上四个顶点所填的数码之和，由于每个点都属于 3 个面，所以

$$6S=3\times(1+2+3+4+5+6+7+8+9)-3a$$

即　$6S=3\times45-3a$

$$2S=45-a \qquad (*)$$

由$(*)$式判知 a 必为奇数，因为 S 不能被 a 整除，而 2 与 a 互质，所以 $2S$ 不能被 a 整除，进而判知 45 一定不被 a 整除．

在奇数码 1,3,5,7,9 中，只有 7 不能整除 45，所以确定 $a=7$.

$$S=\frac{45-7}{2}=19.$$

于是可以得出图 12 所示的一种填数法．

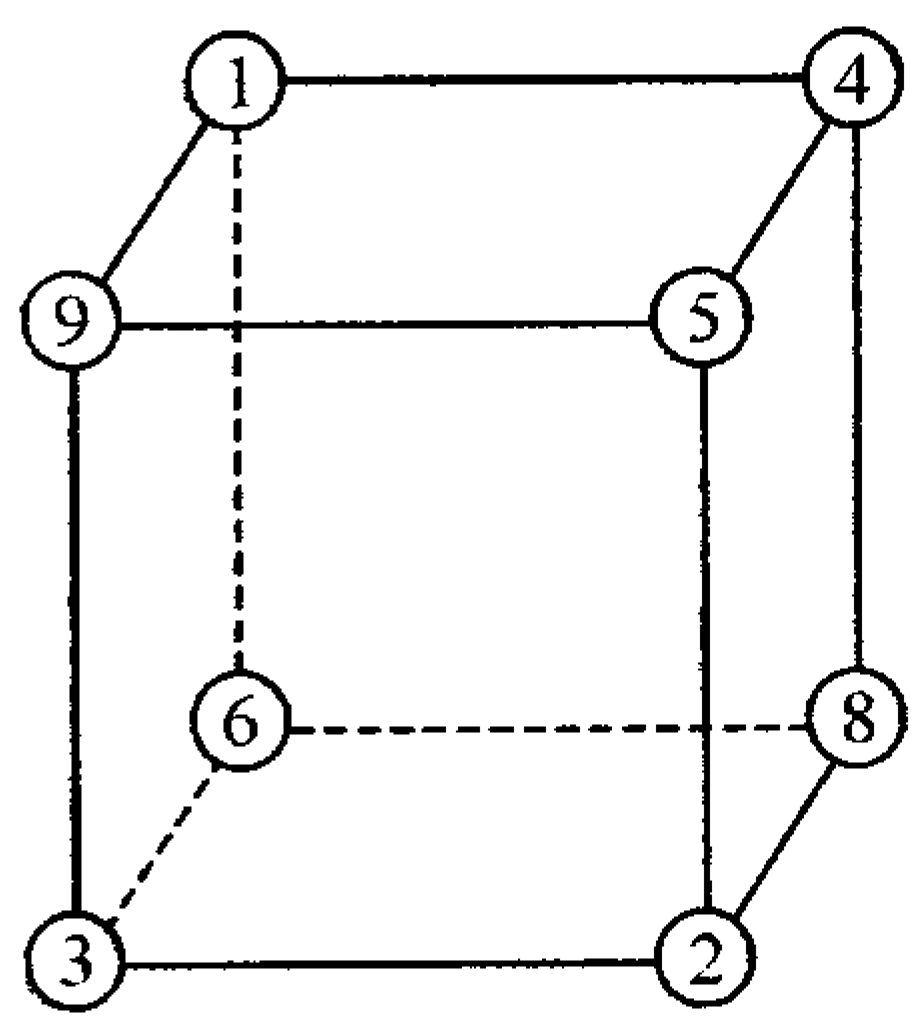


图 12

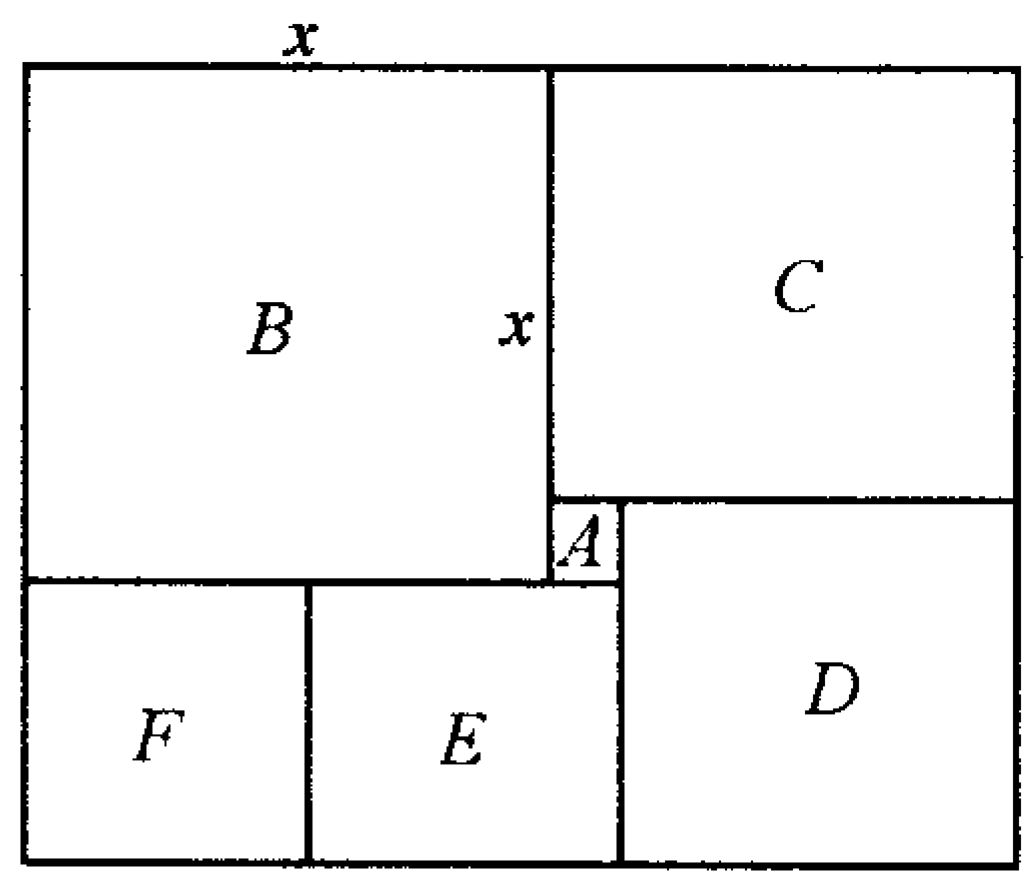
设元（设文字未知数），有利于利用代数式揭示问题中的数量关系．便于对问题进行本质的分析，找到数量的相依关系或相等关系，具有设元意识，会用代数式表示，是由算术习惯向代数过渡的重要步骤，是突破算术方法思维定势的关键．

上面我们列举了多种数学竞赛

中的趣味问题，都是用设元方法进入分析的，同学们可以从中领悟设元的要领，从而增强你的设元分析问题的意识．

习题 3.4

1. 一个长方形如下图所示，恰分成六个正方形，其中最小的正方形面积是 1 平方厘米，求这个长方形的面积．



2. 一个数的相反数的负倒数是$\frac{1}{19}$，求这个数．

3. 有一份选择题试卷共六道小题，其得分标准是：

一道小题答对得 8 分，答错得 0 分，不答得 2 分，某同学共得了 20 分．问这个同学选对，选错，不选各几题？

第 4 章　简乘公式与因式分解

§4.1　从简乘公式谈起

初一代数中，大家学过一些乘法公式，如：

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$，

$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$，

$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$，

……　　　　……

这些公式，不难直接通过多项式乘法来验证．它们统称为简乘公式．下面想和同学们交流一下学习心得与体会，逐步引伸，以期揭示独立思索、分析问题与解决问题的能力的形成过程．

一、乘法公式的几何解释

在规定字母为正数的情况下，可用表示长为 a 的线段来表示 a，用边长为 a 的正方形面积表示 a^2. ab 可用边长为 a 和 b 的矩形来表示，这样一来，可以从直观上帮助我们对简乘公式加深理解．

一块大矩形面积，可以像图 1 那样分为四块小矩形面积之和，这可以看成是多项式$(a+b)$与$(m+n)$相乘的几何解释．

$$\underbrace{(a+b)(m+n)}_{\text{大矩形面积}} = \underset{\text{(Ⅰ)的面积}}{am} + \underset{\text{(Ⅱ)的面积}}{bm} + \underset{\text{(Ⅲ)的面积}}{bn} + \underset{\text{(Ⅳ)的面积}}{am}$$

如果 $b=m$，$a=n$，则图 1 变成了图 2，

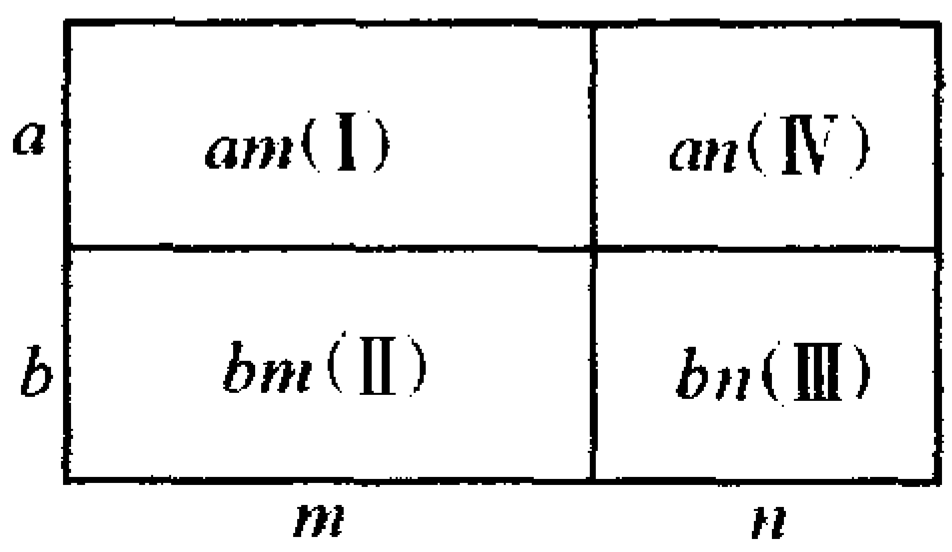


图 1

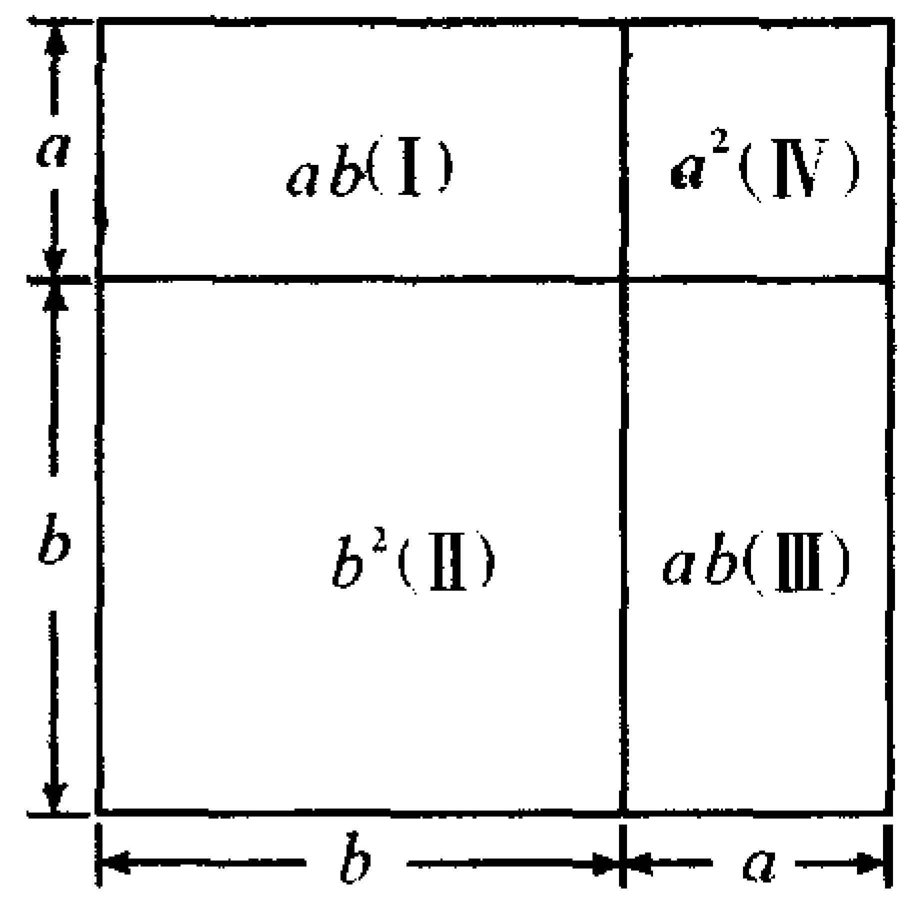


图 2

从图 2 中可见，大正方形面积为 $(a+b)^2$，

正方形Ⅱ面积为 b^2，

正方形Ⅳ面积为 a^2，

矩形Ⅰ、Ⅲ面积都是 ab.

因为大正方形面积等于Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ面积之和．所以

$(a+b)^2=a^2+ab+ab+b^2=a^2+2ab+b^2$.

图 2 就是公式 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ 的几何解释．

思考：若 $a=b$ 时，图形与公式变为何种形式？有人常认为 $(a+b)^2=a^2+b^2$，你能从图中直观判定这是错误的吗？

我们再看　$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$ 的几何解释．

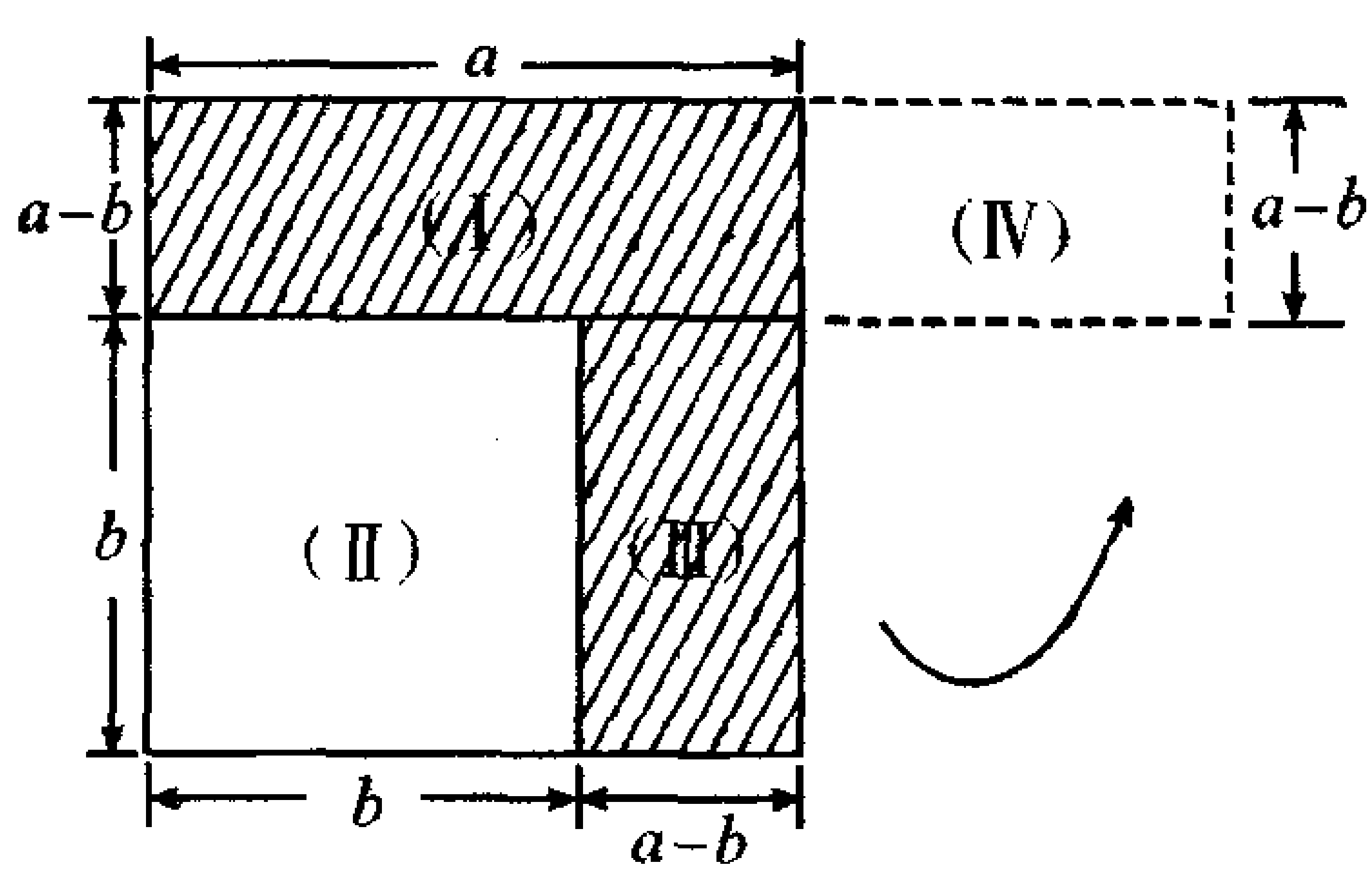


图 3

如图 3，阴影部分的（Ⅰ）和（Ⅲ）表示从大正方形 a^2 减去小

正方形(Ⅱ)(即 b^2)后所余的部分

$S(\text{Ⅰ})+S(\text{Ⅲ})=a^2-b^2$.

我们不妨把(Ⅲ)移到(Ⅳ),得一新的矩形,它的长为 $(a+b)$,宽为 $a-b$. 所以面积为 $(a+b)(a-b)$.

即　$S(\text{Ⅰ})+S(\text{Ⅲ})=S(\text{Ⅰ})+S(\text{Ⅳ})=(a+b)(a-b)$

所以　$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$.

由代数计算知

$(a+b)^2-(a-b)^2$

$=(a^2+2ab+b^2)-(a^2-2ab+b^2)=4ab$.

当 $a>0,b>0$ 且 $a>b$ 时,ab 表示长为 a 宽为 b 的长方形面积,则图 4 表示由四个面积为 ab 的长方形拼成一个边长边 $a+b$ 的大正方形,中间恰空一块边长为 $a-b$ 的小正方形.

$\therefore$　$(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$.

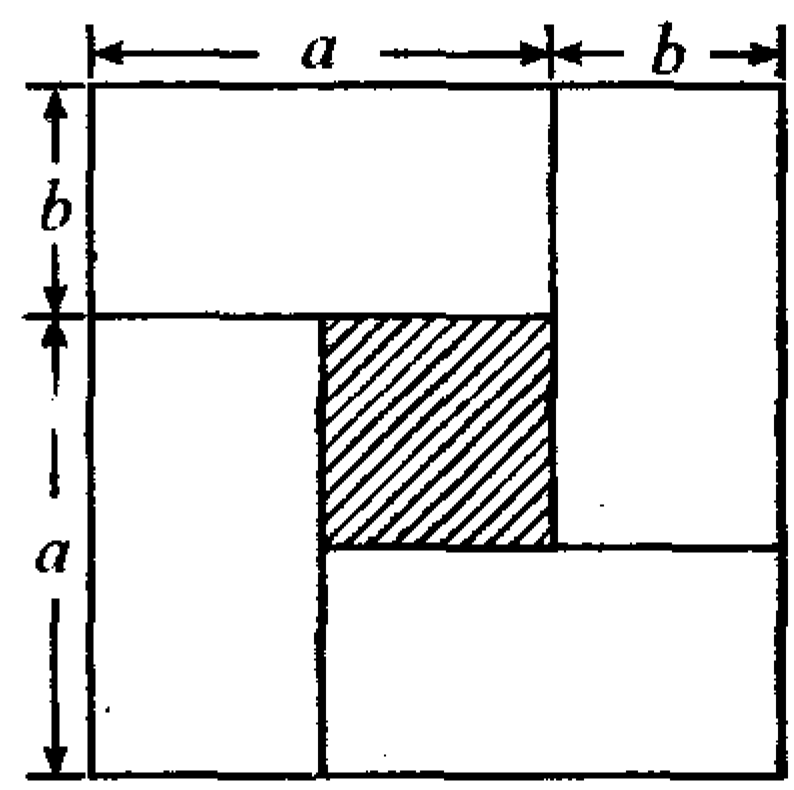


图 4

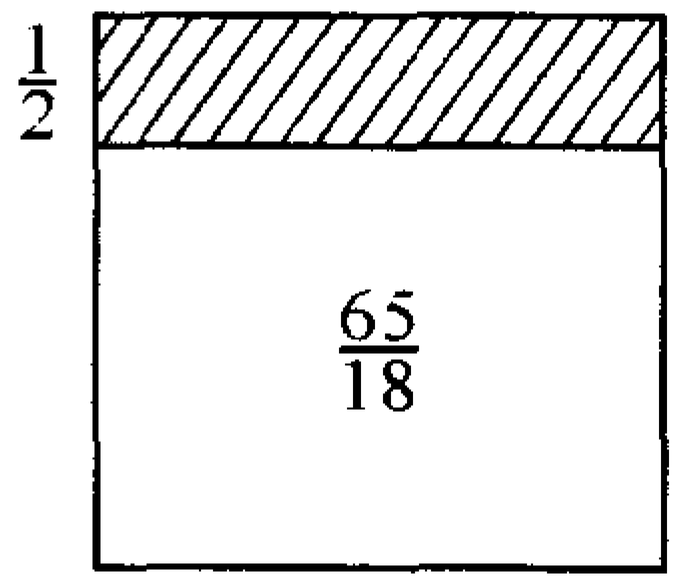
例 1. 四个一样的长方形和一个小的正方形拼成一个大正方形(如图 4). 大正方形的面积是 49 平方米,小正方形的面积是 4 平方米. 问长方形的短边长度是几米?

解:大正方形边长为 7 米,小正方形边长为 2 米,所以长方形的短边长是

$(7-2)\div 2=2.5$(米).

例 2. 如图 5,从一块正方形木板锯下宽为 $\frac{1}{2}$ 米的一个木条以后,剩下的面积是 $\frac{65}{18}$ 平方米. 问锯下的木条面积是多少平方米?

解:我们用拼图的方法来求正方形的边长. 用剩下的面积是 $\frac{65}{18}$ 平方米的长方形四块,拼成一个中间空出面积为 $(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=)\frac{1}{4}$



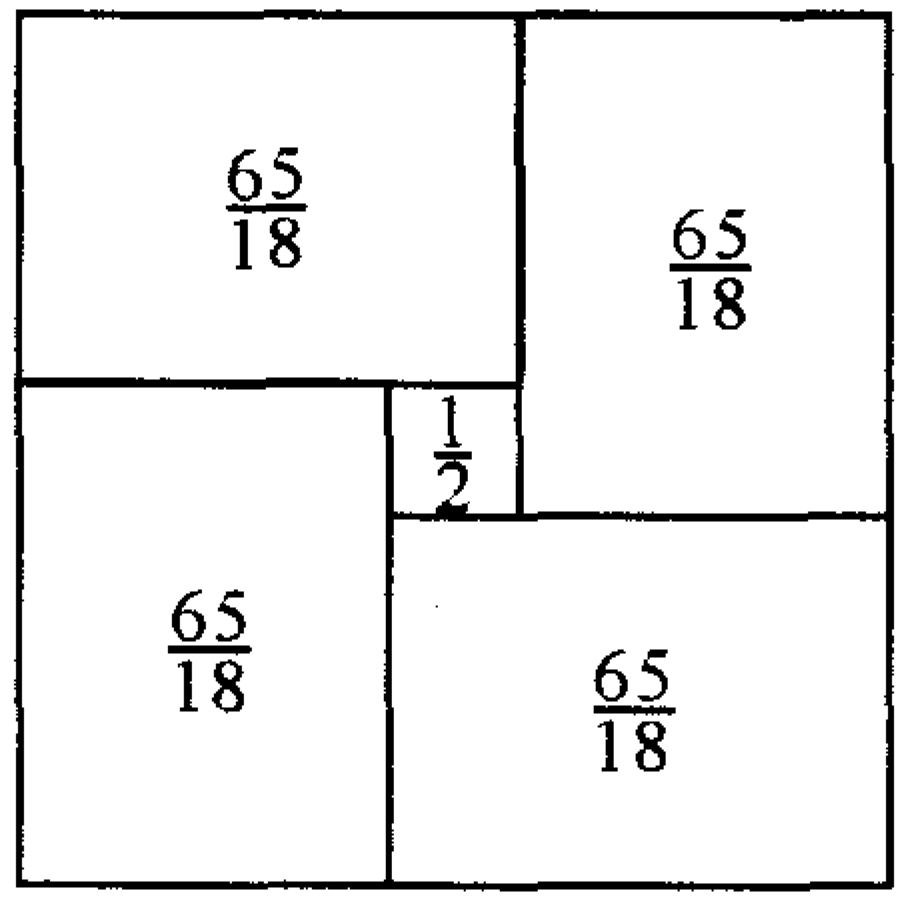


图 5

的大正方形，这个大正方形的边长正好是该长方形的长宽和，而大正方形的面积等于

$$4\times\frac{65}{18}+\frac{1}{4}=\frac{529}{36}=\frac{23}{6}\times\frac{23}{6},$$

所以大正方形的边长是$\frac{23}{6}$，从而正方形木板的边长（长方形的长）等于$\left(\left(\frac{23}{6}+\frac{1}{2}\right)\div 2\right)=\frac{13}{6}$. 所以锯下的木条面积是$\left(\frac{13}{6}\times\frac{1}{2}\right)=\frac{13}{2}$（平方米）.

例 3. 如图 6 中正方形 $GFCD$ 与正方形 $AEHG$ 面积之差为 20 平方厘米，求图中阴影三角形 BCH 的面积.

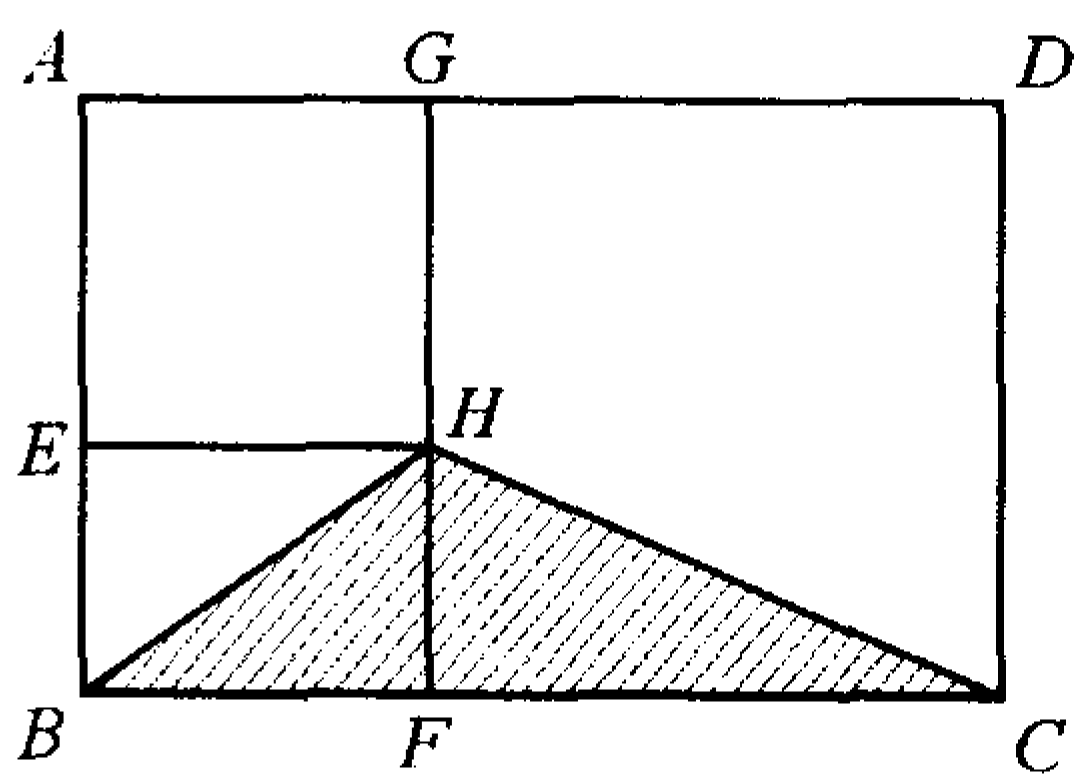


图 6

解：设正方形 $GFCD$ 的边长为 a，正方形 $AEHG$ 的边长为 b.

由题设可知：$a^2-b^2=20$.

又　$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

而$\triangle BCH$ 的底边 $BC=a+b$. 高 $HF=a-b$.

所以$\triangle BCH$ 的面积为

$$\frac{1}{2}(a+b)(a-b)=\frac{1}{2}\cdot 20=10(\text{平方厘米}).$$

上述的面积拼补法是我国古代算学书常用的证明方法．公元 3－4 世纪，我国数学家赵爽设计（图 7 所示）的“弦图”，边长为 a,b 的长方形被对角线分为两个直角三角形，长方形的对角线长（即直角三角形斜边长）为 c，从图 7 易知，

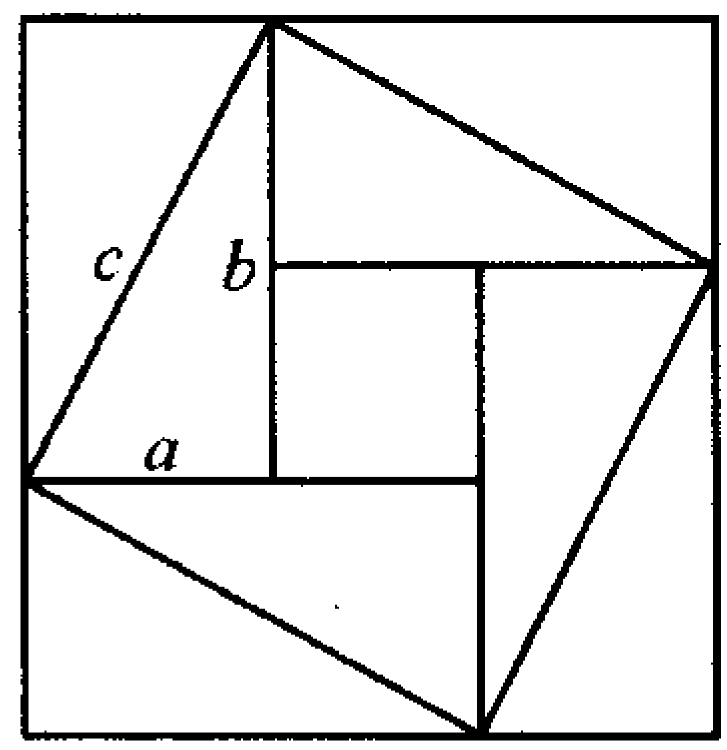


图 7

$$c^2=(\frac{1}{2}ab)\times 4+(b-a)^2$$
$$=(b-a)^2+2ab$$
$$=a^2+b^2.$$

这样就证明了勾股定理．

二、简乘公式的简单应用

简乘公式是代数恒等式，从左向右应用，即乘法展开，从右向左应用也就是将多项式写成若干个因式乘积的形式，叫做分解因式．

例 4. 计算 $1.2345^2+0.7655^2+2.469\times 0.7655=?$

解：令 $x=1.2345, y=0.7655$

则　$2xy=2.469\times 0.7655$.

$\therefore$　$1.2345^2+0.7655^2+2.469\times 0.7655$

$=(x+y)^2=(1.2345+0.7655)^2$

$=2^2=4$.

例 5. 由 $(a+1)^2=a^2+2a+1=a^2+(a+1)+a$ 可知，由自然数 a 的平方再加上 a 与 $a+1$，就可得出相邻的自然数$a+1$的

平方.

比如,求 $101^2=?$

解:∵ $100^2=10000$

∴ $101^2=10000+101+100=10201.$

当然,已知 $a+1$ 的平方,也可以求 a 的平方.

比如,求 $339^2=?$

解:∵ $400^2=160000$

∴ $399^2=160000-400-399=159201.$

因此,只要我们记住一些基本的完全平方数,就可以通过心算算出相邻的完全平方数.

例 6. 末位是 5 的自然数平方速算法.

末位是 5 的自然数,可以表示为 $10a+5$ 的形式,其中 a 是正整数.

$(10a+5)^2=100a^2+100a+5^2=100\times a(a+1)+25$

写成竖式,即

$$\begin{array}{rr:l} & 10a & 5 \\ \times & 10a & 5 \\ \hline & \underline{a\times(a+1)\times 100} & \underline{25} \end{array}$$

如

$$\begin{array}{rr:l} & 1 & 5 \\ \times & 1 & 5 \\ \hline & \underline{2} & \underline{25} \\ & \Vert & \\ & 1\times(1+1) & \end{array}$$

$$\begin{array}{rr:l} & 7 & 5 \\ \times & 7 & 5 \\ \hline & \underline{56} & \underline{25} \\ & \Vert & \\ & 7\times(7+1) & \end{array} \qquad \begin{array}{rr:l} & 10 & 5 \\ \times & 10 & 5 \\ \hline & \underline{110} & \underline{25} \\ & \Vert & \\ & 10\times(10+1) & \end{array}$$

末位是 5 的数 $10a+5$ 的平方，末两位是 25，百位及百位前写上 $a\times(a+1)$后即得所求结果．如

$$45^2=\underbrace{2\ 0}_{4\times(4+1)}\underline{2\ 5}$$

例 7．求 25～75 之间的整数平方的速算法．

要求记住 1—25 诸整数的平方值

a	1，	2，	3，	…，	19，	20，	21，	22，	23，	24，	25
a^2	1，	4，	9，	…，	361，	400，	441，	484，	529，	576，	625

25～75 之间的整数，以 50 为其中间数．

设 x 为 25～75 之间一个整数，则

$x=50\pm a$ （a 为不大于 25 的正整数）

$$x^2=(50\pm a)^2=50^2\pm100a+a^2$$
$$=100(25\pm a)+a^2.$$

如求 43^2，$a=50-43=7$，

$\therefore\ 43^2=100(25-7)+49=1849.$

再如 求 74^2，$a=74-50=24$

$\therefore\ 74^2=100(25+24)+24^2=4900+576=5476.$

例 8．1995 年 8 月 3 日去海南省三亚市乘车返海口途中，我和王寿仁、梅向明、龚升、石生明、那吉生同乘一辆面包车，车号是 1849，龚升教授看大家有些倦意，就出了一个题目说：我试过 3，5，7，11，13 都不整除 1849，1849 会不会是个质数？”一听这个题，我立即提起了精神，略加思索，不到一分钟就说出 $1849=43^2$ 是个合数．其实正是初中学的简乘公式帮了我的忙．由例 6 的算法知 $45^2=2025$，由例 5 的方法知 $44^2=2025-45-44=1936$，$43^2=1936-44-43=1849$．我的速算方法，完全得益于初中阶段总结的速算常识．

众所周知，求边长为 a 的正方形的面积用乘方运算．反过

来，已知正方形面积求正方形边长，就要用开平方运算．已知 $a>0$，存在一个 $x>0$，使得 $x^2=a$ 成立，则 x 就称为 a 的算术平方根，记为 $x=\sqrt{a}$，那么已知一个正数 a，如何求$\sqrt{a}$呢？对一个完全平方数，我们可以查表，对于形式复杂的完全平方数求其算术平方根，简乘公式可以帮我们的忙．

例 9. 若 $a=1995^2+1995^2\cdot1996^2+1996^2$，

求$\sqrt{a}=?$

解：设 $x=1995$，则 $x+1=1996$.

$$
\begin{aligned}
a &=1995^2+1995^2\cdot1996^2+1996^2\\
&=x^2+x^2(x+1)^2+(x+1)^2\\
&=(x+1)^2-2x(x+1)+x^2+2x(x+1)+x^2(x+1)^2\\
&=[(x+1)-x]^2+2x(x+1)+x^2(x+1)^2\\
&=1^2+2x(x+1)+[x(x+1)]^2\\
&=[1+x(x+1)]^2\\
&=(1+1995\times1996)^2=(3982021)^2,
\end{aligned}
$$

$\therefore\quad \sqrt{a}=3982021.$

例 10. 求 $\sqrt{13}$的近似值．

解：根据 $3^2<13<4^2$

令　$\sqrt{13}=3+x\quad(0<x<1)$，

平方得　$13=9+6x+x^2$，

由于 x^2 相对$|x|$来说很小，舍去 x^2 得

$$
\begin{aligned}
&13\approx9+6x\\
&6x\approx4\\
&x\approx0.67.
\end{aligned}
$$

$\therefore\quad \sqrt{13}\approx3.67$

如果再精确一些，

可设 $\sqrt{13}=3.6+x$，　$(0.01<x<0.1)$

平方得　$13=12.96+7.2\times x+x^2$.

舍去 x^2 得

$$13 \approx 12.96 + 7.2x$$

$$7.2x \approx 0.04,$$

$$x \approx 0.005555\cdots\cdots,$$

$$\therefore \quad \sqrt{13} \approx 3.605555\cdots\cdots.$$

这与计算器显示的结果 $\sqrt{13} = 3.6055512\cdots\cdots$ 已经相当接近了.

三、乘法公式与不等式

设 a、b 均为正数,易知 $(a-b)^2 \geqslant 0$.

用简乘公式稍加变形,就可推出非常有用的结果:

Ⅰ) $\because \quad (a-b)^2 \geqslant 0,$

$\therefore \quad a^2 - 2ab + b^2 \geqslant 0,$

即 $a^2 + b^2 \geqslant 2ab$ ……………………………………… (1)

两个正数的平方和不小于两个正数乘积的两倍.

如图 8 可以直观看出这一结果的正确性:a^2+b^2 为两个正方形面积拼在一起,$2ab$ 为图中阴影面积. 显然 $a^2+b^2 \geqslant 2ab$,当 $a=b$ 时,空白部分面积为 0,等号成立.

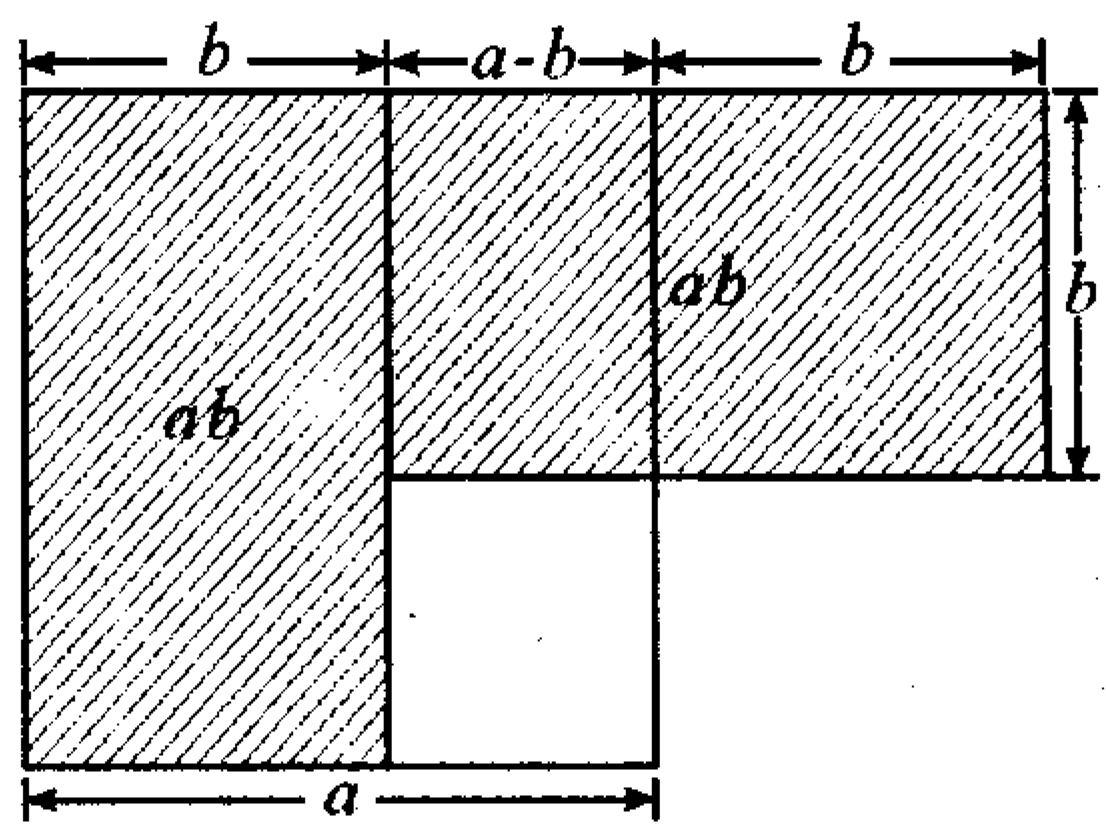


图 8

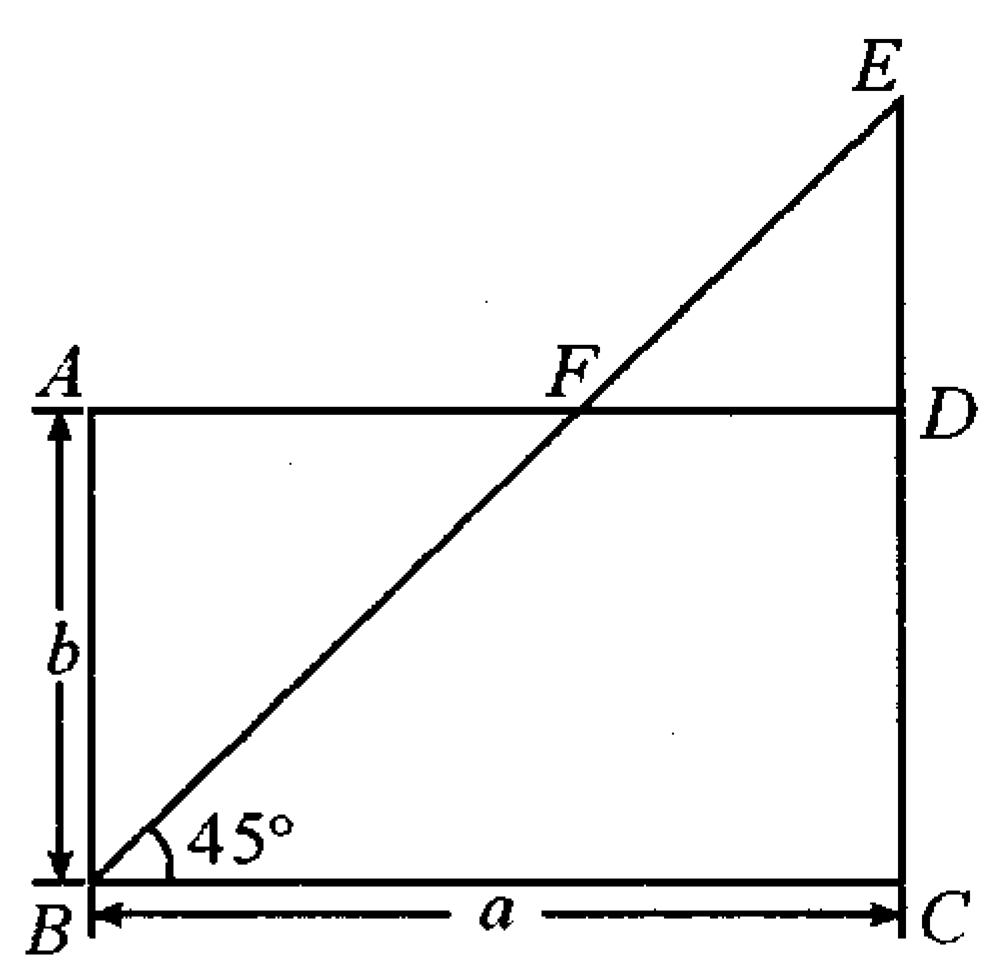


图 9

再有，如图 9，也可提供一个简单的几何模型．矩形 $ABCD$ 中 $BC=a$，$AB=b(a\geqslant b)$．矩形 $ABCD$ 面积为 ab．作$\angle ABC$ 平分线交 AD 于 F，交 CD 延长线于 E，$\triangle ABF$、$\triangle BCE$ 都是等腰直角三角形．其面积的和不小于矩形面积．

$$\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}b_2\geqslant ab$$

$$\therefore\quad a^2+b^2\geqslant 2ab.$$

Ⅱ）　用 ab 除(1)式两边得

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geqslant 2,$$

若 $b=1$，则 $a+\dfrac{1}{a}\geqslant 2$.

即　一个正数与其倒数之和不小于 2，且仅当一个正数与其倒数相等，即 $a=1$ 时，等号成立．

Ⅲ）　设 $a=\sqrt{x}$，$b=\sqrt{y}$，　则(1)式变为

$$x+y\geqslant 2\sqrt{xy},$$

$$\therefore\quad \frac{x+y}{2}\geqslant\sqrt{xy}.$$

在数学中，$x>0$，$y>0$，$\dfrac{x+y}{2}$称为 x、y 的**算术平均**，$\sqrt{xy}$称为 x、y 的**几何平均**．

以上结果表明：**两个正数的算术平均不小于它们的几何平均**．

其实，我们也可以用图形证明这个关系：利用四个边长为 x，y 的矩形（如图 10）拼成边长为 $x+y$ 的正方形，中间小正方形面积为 $(x-y)^2\geqslant 0$，显然 $(x+y)^2\geqslant 4xy$.

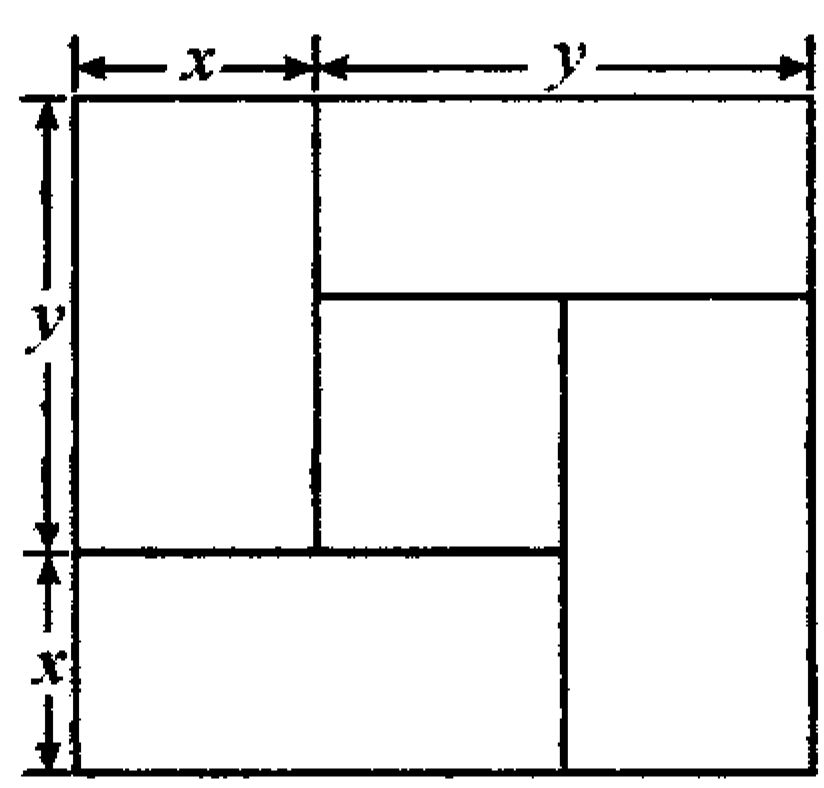


图 10

开平方得　$x+y\geqslant 2\sqrt{xy}$,

$\therefore \quad \dfrac{x+y}{2} \geqslant \sqrt{xy}.$

例 11. 甲、乙二人要完成同样一件工作，甲以每小时完成 a 件的效率工作了一半时间，又以每小时 b 件的效率工作了另一半时间，而乙用效率 a 完成工作的一半，用效率 b 完成工作的另一半．问甲、乙二人哪个完成工作要用的时间少一些？（设 $a \neq b$）.

解：设全部工作为 1，甲完成全部工作用时间为 T_1，乙完成全部工作用时间为 T_2，以效率 a 每小时完成全部工作的 $\dfrac{1}{a}$，以效率 b 每小时完成全部工作的 $\dfrac{1}{b}$．因此，

对甲而言：$\dfrac{T_1}{2} \cdot \dfrac{1}{a} + \dfrac{T_1}{2} \cdot \dfrac{1}{b} = 1,$

即 $\quad T_1 = \dfrac{2ab}{a+b} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots$ ①

对乙而言：$T_2 = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{a}} + \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{b}} = \dfrac{a+b}{2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots$ ②

现在要比较　T_1 与 T_2 的大小．

事实上，由 $a \neq b$，$\therefore \quad a^2 + b^2 > 2ab.$

更有　$a^2 + 2ab + b^2 > 4ab,$

即　$(a+b)^2 > 4ab.$

因此　$\dfrac{a+b}{2} > \dfrac{2ab}{a+b},$

即　$T_1 < T_2.$

答：甲用的时间要省一些．

例 12. 若 x、y 为正数，且 $x+y=1$.

证明：$\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(1+\dfrac{1}{y}\right) \geqslant 9.$

分析：要证　$\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(1+\dfrac{1}{y}\right) \geqslant 9$，等价于证明

$(x+1)(y+1)\geqslant 9xy.$

由 $x+y=1, x+1=x+x+y,$

$y+1=y+x+y.$

以 $x+1, y+1$ 为边作矩形，由图 11 易知

$(x+1)(y+1)=5xy+2(x^2+y^2).$

但　$x^2+y^2\geqslant 2xy.$

$\therefore\quad (x+1)(y+1)\geqslant 5xy+4xy=9xy,$

即　$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\geqslant 9$ 成立．

	y	x	y
x	xy	x^2	xy
x	xy	x^2	xy
y	y^2	xy	xy

图 11

四、乘法公式与极值定理

利用乘法公式不难算得

$$(a+b)^2-(a-b)^2=4ab \quad ①$$

即　$$(a+b)^2=(a-b)^2+4ab \quad ②$$

当 $a>0, b>0$，若 ab 为定值，由②知当 $a=b$ 时，$(a+b)^2$ 最小，$a+b$ 也最小．由此得

定理 1　两正数乘积为定值，当两数相等时其和最小．

把①变形为 $$ab=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 \quad ③$$

从③式可知，若 $a>0, b>0, a+b$ 为定值，当 $a=b$ 时 ab 最大．由此得

定理 2　两正数之和为定值，当两数相等时其积最大．

从几何角度来看，上述两条结论分别是：

面积为定值的矩形以正方形周长最小，周长为定值的矩形以正方形面积最大．

例 13. $\triangle ABC$ 中，$BC=AC=5$，$\angle ACB=90°$，D 为斜边 AB 上任一点．作 $DE\perp AC$ 于 E，$DF\perp BC$ 于 F．试求长方形

$DECF$ 面积的最大值.

解:如图 12,连结 CD.

由 $S_{\triangle ACD}+S_{\triangle BCD}=S_{\triangle ABC}$ 得

$\frac{1}{2}\cdot DE\cdot AC+\frac{1}{2}DF\cdot BC=\frac{1}{2}AC\cdot BC$,

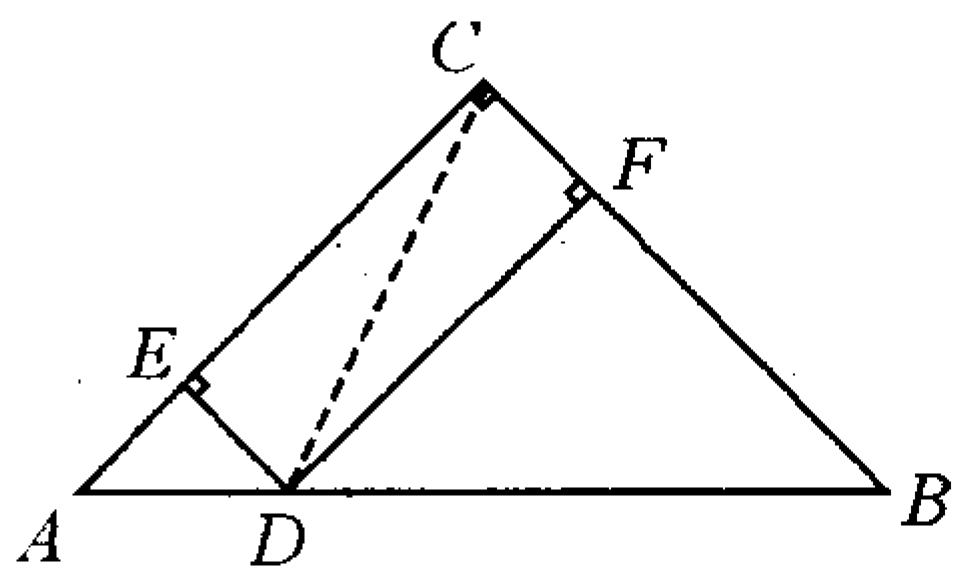


图 12

即　$\frac{5}{2}\cdot DE+\frac{5}{2}\cdot DF=\frac{5}{2}\cdot 5$

$\therefore$　$DE+DF=5$(定值).

根据定理 2,当 $DE=DF=\frac{5}{2}$ 时,长方形 $DECF$ 变为正方形,其面积取最大值$(\frac{5}{2})\times(\frac{5}{2})=\frac{25}{4}$. 这时 D 点取在 AB 边中点.

我们可以把定理 1、2 推广到三个正数的情形.

例 14. 三个正数的乘积为定值,当三数相等时其和最小.

分析:设三数为 $x>0,y>0,z>0$.

由题意　$xyz=a$(定值).

若三数不等,不妨设 $x\neq y$,则可找到这样三个正数:$\sqrt{xy}$、$\sqrt{xy}$和 z,满足

$(\sqrt{xy})(\sqrt{xy})\cdot z=xyz=a$,

即　$\sqrt{xy}+\sqrt{xy}+z<x+y+z$.

这就是说,若三个正数中有两数不等,就可找出乘积为 a 的另三个数,其和比 $x+y+z$ 更小. 也就是只有当 $x=y=z$ 时,才找不到另外的乘积为 a 而其和比 $x+y+z$ 小的三个正数,因此 $x=y=z$ 时,$x+y+z$ 最小.

例 15. 三个正数的和为定值,当三数相等时其积最大.

分析:设三数为 $x>0,y>0,z>0$.

由题意，$x+y+z=a$（定值）.

假设　$x\neq y$，则可以找到这样三个正数

$\frac{x+y}{2},\frac{x+y}{2},z$，满足$(\frac{x+y}{2})+(\frac{x+y}{2})+z=x+y+z=a.$

但因　$(\frac{x+y}{2})(\frac{x+y}{2})>xy,$

$\therefore\quad(\frac{x+y}{2})(\frac{x+y}{2})\cdot z>xyz.$

这就是说，若三个正数中有两数不等，就可以找到其和为定值 a 的另外三个正数，它们的积比 xyz 要大. 因此，只有当 $x=y=z$ 时，才找不到另外的其和为 a 其积比 xyz 大的三个正数，所以 $x=y=z$ 时，xyz 取最大值.

例 16. P 为等边三角形 ABC 内任一点，P 到 BC 边距离为 x，P 到 CA 边距离为 y，P 到 AB 边距离为 z. 若该等边三角形的高线长为 9，

问：点 P 在何处时 $x\cdot y\cdot z$ 取得最大值？

解：如图 13，设 $AB=AC=BC=a$，正$\triangle ABC$ 的三条高线长都等于 9. 连结 AP、BP、CP.

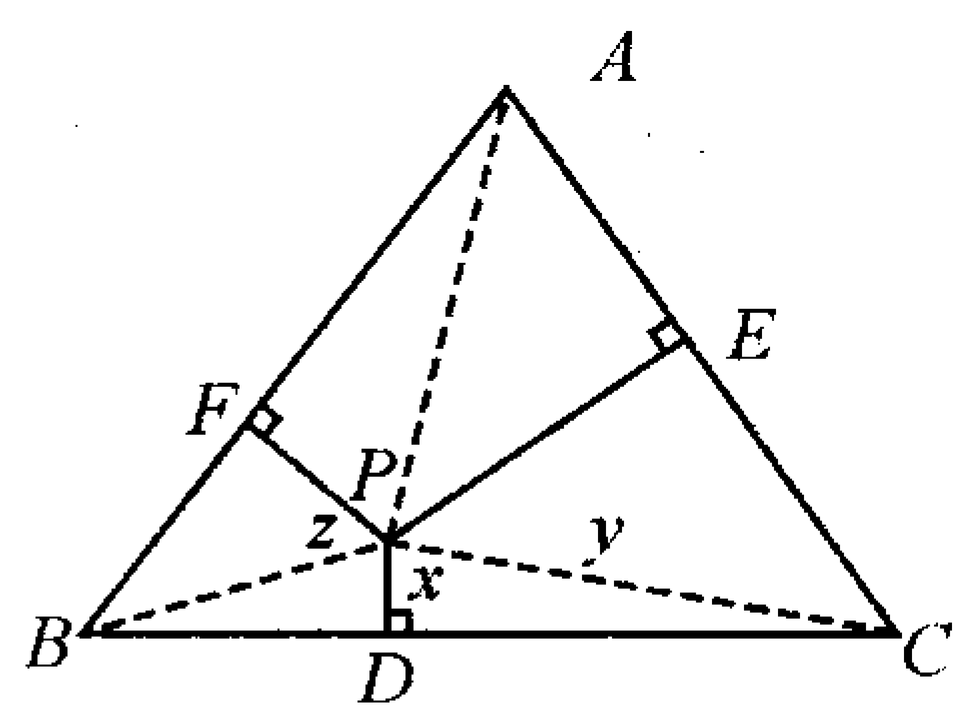


图 13

由　$S_{\triangle APB}+S_{\triangle BPC}+S_{\triangle CPA}=S_{\triangle ABC}$，

得　$\frac{1}{2}a\cdot z+\frac{1}{2}a\cdot x+\frac{1}{2}a\cdot y=\frac{1}{2}a\cdot 9.$

$\therefore\quad x+y+z=9$（定值）.

根据例 16 的结论知，当 $x=y=z=3$ 时，xyz 取得最大值为 $3^3=27$.

这时 P 点恰在正三角形的中心（三条高线的交点）处.

例 17. 圆柱体罐头盒的体积一定，问高线与底面直径的比

为何值时，所用铁皮最省？

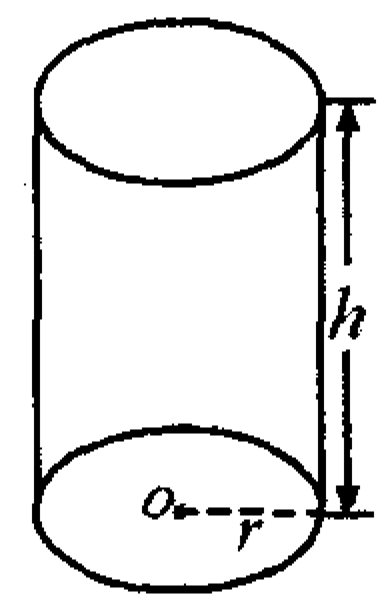


图 14

解：设罐头盒体积 V 为定值，底圆半经为 r，高为 h，表面积为 S. 则

$V=\pi r^2 h$ ……………………………… ①

$S=2\pi r^2+2\pi rh$ ………………………… ②

由①　　$h=\dfrac{V}{\pi r^2}$，

代入②得

$$S=2\pi r^2+2\pi r\cdot\frac{V}{\pi r^2}=2\pi r^2+\frac{2V}{r}$$

$$=2\pi(r^2+\frac{V}{\pi r})=2\pi(r^2+\frac{V}{2\pi r}+\frac{V}{2\pi r}).$$

因为　　$r^2\cdot\dfrac{V}{2\pi r}\cdot\dfrac{V}{2\pi r}=\dfrac{V^2}{4\pi^2}$是定值，应用例 14 的结论.

所以，当　$r^2=\dfrac{V}{2\pi r}$时，S 取最小值，

即　$2r=\dfrac{V}{\pi r^2}=h$ 时，S 取最小值.

这就是圆柱体罐头盒作成底面直径与柱高相等时所用铁皮最少的道理.

习题 4.1

1. 证明乘法公式

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$.

2. 证明乘法公式

$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$.

3. 证明乘法公式

$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$.

4. 证明乘法公式

$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$.

5. 化简

$(x^2-xy+y^2)(x^2+xy+y^2)$

6. p 为大于 1 的整数

计算 $(p+1)(p^2+1)(p^4+1)(p^8+1)(p^{16}+1)$.

7. 若 $a-b=2, a-c=\sqrt[3]{7}$.

求 $(c-b)[(a-b)^2+(a-b)(a-c)+(a-c)^2]$ 的值.

8. 若 $a+\dfrac{1}{a}=m$. 试用 m 的代数式表示 $a^3+\dfrac{1}{a^3}$.

§4.2 因式分解及其应用初步

把一个多项式化为几个整式的积的形式，叫做把这个多项式因式分解．其操作过程叫分解因式，其中每一个整式叫做积的因式．

关于因式分解的常用的具体方法，数学课本已作过专门介绍，这里只介绍几个典型因式分解例题和因式分解的应用初步．

首先我们用模型的观点来看因式分解．

$a(b+c)=ab+ac$，这是乘法运算，而

$ab+ac=a(b+c)$ 就是因式分解中提公因式法的模型．

若实际所给的多项式为 $9mn+6m^2$ 时，把它看成 $(3m)\cdot(3n)+(3m)(2m)$，令 $3m=a, 3n=b, 2m=c$，就可纳入 $ab+ac=a(b+c)$ 的公式，得出

$9mn+6m^2=(3m)(3n)+(3m)(2m)=3m(3n+2m)$.

可见，即便是一个简单的问题，要纳入因式分解模型，也要经过一些变换．

同理，$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ 是乘法公式．

而 $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$ 就是一个因式分解的公式模型．其余公式均可类似的理解．

通过上面的分析我们可以看出．

Ⅰ．如果将多项式乘法看成正运算过程，则因式分解可看作上述过程的逆过程．这个逆过程难度很大，因为一个多项式给出以后，它能否分解为几个简单整式的乘积，以及如何分解，我们暂时都不清楚，这要靠我们去分析、试验、去寻找．

Ⅱ．寻找的基本方法，就是将所给多项式换元、变形，将其整体或一部分纳入因式分解的基本模型．也就是设法套用已知的因式分解公式，在这个意义上说，因式分解对我们识别基本模型，设法转化纳入基本模型的数学能力的训练很有帮助．

例 1. 分解因式　$x^4+x^2y^2+y^4$

分析：$x^4+x^2y^2+y^4=(x^2)^2+(x^2)(y^2)+(y^2)^2$，直接纳入 $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$ 的模型不合适，我们加上 x^2y^2，再减去 x^2y^2，就可以应用这个模型了，进而又可应用 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$的模型，从而达到因式分解的目的．

解：$x^4+x^2y^2+y^4$

$$
\begin{aligned}
&=(x^2)^2+2x^2y^2+(y^2)^2-x^2y^2\\
&=(x^2+y^2)^2-(xy)^2\\
&=(x^2+y^2+xy)(x^2+y^2-xy)\\
&=(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2).
\end{aligned}
$$

例 2. 分解因式　$(a+2b+c)^3-(a+b)^3-(b+c)^3$

分析：如果展开后集项再分解，运算量大．依本题特点，发现 $a+2b+c=(a+b)+(b+c)$. 可换元简化我们的运算过程．

解：设 $A=a+b$，$B=b+c$，则 $A+B=a+2b+c$.

$$
\begin{aligned}
&(a+2b+c)^3-(a+b)^3-(b+c)^3\\
&\overset{A=a+b}{\underset{B=b+c}{=\!=\!=\!=}}(A+B)^3-A^3-B^3\\
&=3A^2B+3AB^2\\
&=3AB(A+B)\\
&=3(a+b)(b+c)(a+2b+c).
\end{aligned}
$$

例 3. 分解因式　$a^3+b^3+c^3-3abc$

解：　$a^3+b^3+c^3-3abc$

$=a^3+b^3+3a^2b+3ab^2+c^3-3a^2b-3ab^2-3abc$

$=(a+b)^3+c^3-3ab(a+b+c)$

$=(a+b+c)[(a+b)^2-(a+b)c+c^2]-3ab(a+b+c)$

$=(a+b+c)[a^2+2ab+b^2-ac-bc+c^2-3ab]$

$=(a+b+c)[a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc]$.

说明：例 3 结论很重要，由它可推论如下结果 .

①若 $a+b+c=0$，则 $a^3+b^3+c^3=3abc$.

②若 $a+b+c>0$，又因为 $a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc=\frac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]\geqslant 0$. 则 $a^3+b^3+c^3\geqslant 3abc$.

③若 $a+b+c\neq 0$，且 $a^3+b^3+c^3=3abc$ 时，必有 $a=b=c$，以上诸点，在代数运算中非常重要 .

例 4. 分解因式　$(a^2-b^2-c^2)^2-4b^2c^2$

解：$(a^2-b^2-c^2)^2-4b^2c^2$

$=(a^2-b^2-c^2)^2-(2bc)^2$

$=(a^2-b^2-c^2+2bc)(a^2-b^2-c^2-2bc)$

$=[a^2-(b^2-2bc+c^2)][a^2-(b^2+2bc+c^2)]$

$=[a^2-(b-c)^2][a^2-(b+c)^2]$

$=(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)(a-b-c)$

说明：例 4 的分解技巧非常重要，如果我们设 a、b、c 为三角形三边之长，$a>0,b>0,c>0$，则 $a+b+c>0$，且 $a+b>c,b+c>a,a+c>b$. 也就是　$a+b-c>0,a-b-c<0,a+c-b>0$. 于是可知

$(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)(a-b-c)<0$.

这样我们就可以得出，若 a、b、c 是$\triangle ABC$ 三边之长，则$(a^2-b^2-c^2)^2<4b^2c^2$.

从这里我们已经可以看到例 4 的重要性了 .

例 5. 分解因式　$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+1$

解：直接乘法展开后再集项很麻烦，我们用$(x+1)(x+4)$，$(x+2)(x+3)$分别相乘就会看到特点．

$$\begin{aligned}&(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+1\\&=[(x+1)(x+4)][(x+2)(x+3)]+1\\&=(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)+1\\&\xlongequal{\text{令 }A=x^2+5x+4}A(A+2)+1\\&=A^2+2A+1\\&=(A+1)^2=(x^2+5x+5)^2.\end{aligned}$$

说明：本题换元的技巧具有典型性，应当掌握，另外，对任意实数 x，有$(x^2+5x+5)^2\geqslant 0$，

立刻推出　$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+1\geqslant 0$.

因式分解对于证明整除、判定质数与合数、解方程等方面多有应用，只要可看成多项式并要将多项式写为乘积式的问题都要用到因式分解．

例 6. 计算 $123456789^2-123456788^2$

分析：这是一道速算的问题，如果“列算”计算量较大，但只要看到所计算的是两个相邻自然数的平方差，可用因式分解公式加以解决．

解：$123456789^2-123456788^2$

$$\begin{aligned}&=(123456789+123456788)\times 1\\&=246913577.\end{aligned}$$

可见，因式分解帮了我们大忙，本题极容易看成是 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$公式的特例，有些较隐蔽的形式要靠我们的观察力加以剖析．

例 7. 若 $a<b,x<y$.

求证：$ax+by>bx+ay$.

证明：$(ax+by)-(bx+ay)$

$$=(ax-bx)-(ay-by)$$

$=x(a-b)-y(a-b)$

$=(a-b)(x-y)$

$\because\quad a<b, x<y$

$\therefore\quad a-b<0, x-y<0.$

$(a-b)(x-y)>0.$

因此，$(ax+by)-(bx+ay)>0$

$\therefore\quad ax+by>bx+ay.$

例 8. 设 a 是大于 1 的自然数．

求证：a^4+4 是个合数．

证明：$a^4+4=(a^2)^2+2^2$

$=(a^2)^2+2a^2\cdot 2+2^2-(2a)^2$

$=(a^2+2)^2-(2a)^2$

$=(a^2+2a+2)(a^2-2a+2).$

因 a 是自然数，且 $a>1$，所以 $a^2+2a+2>a^2-a+2>1.$

可见，a^2+4 存在不等于 1 且不等于自身的因子．所以当 a 是大于 1 的自然数时，a^2+4 是个合数．

例 9. 证明，对任意自然数 n，$n(n+1)(n+2)(n+3)+1$ 是个完全平方数

证明：$n(n+1)(n+2)(n+3)+1$

$=[n(n+3)][(n+1)(n+2)]+1$

$=(n^2+3n)(n^2+3n+2)+1$

$=(n^2+3n)^2+2(n^2+3n)+1$

$=(n^2+3n+1)^2.$

所以，对任意自然数 n，$n(n+1)(n+2)(n+3)+1$ 都是完全平方数．

例 10. 解方程$(11-x)^3+(13-x)^3=(24-2x)^3$

分析：三次方程我们尚不会解，但若设法分解为三个一次因式的乘积就可求得方程的根．注意到$(11-x)+(13-x)=24-2x$，可应用换元法去解．

解:令 $11-x=A$,$13-x=B$,则 $A+B=24-2x$. 原方程变为 $A^3+B^3=(A+B)^3$,展开合并后得. $3A^2B+3AB^2=0$,

即 $3AB(A+B)=0$

要么 $A=0$,要么 $B=0$,要么 $A+B=0$.

即 要么 $11-x=0$,要么 $13-x=0$,要么 $24-2x=0$. 从而 $x_1=11$,$x_2=13$,$x_3=12$.

例 11. 证明:非零的三个实数 a、b、c 满足

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c},$$

那么 $a+b$,$b+c$,$c+a$ 中至少有一个是 0.

证明:由 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$ 有意义,知

$a\neq0$,$b\neq0$,$c\neq0$ 且 $a+b+c\neq0$

于是,$\frac{bc+ac+ab}{abc}=\frac{1}{a+b+c}$.

$[ab+c(a+b)](a+b+c)=abc$

$[ab+c(a+b)][(a+b)+c]-abc=0$

$ab(a+b)+c(a+b)^2+abc+c^2(a+b)-abc=0$

$(a+b)[ab+c(a+b)+c^2]=0$ (看成关于 c 的二次三项式进行因式分解)

$(a+b)(c+a)(c+b)=0$

所以要么 $a+b=0$,要么 $b+c=0$,要么 $c+a=0$,

即 $a+b$,$b+c$,$c+a$ 中至少有一个为 0.

习题 4.2

1. 分解因式 $x^2+x^2(x+1)^2+(x+1)^2$
2. 分解因式 $x^4+y^4+(x+y)^4$
3. 分解因式 $(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3$
4. 证明 $4^{545}+545^4$ 是个合数.

第 5 章　分式与根式

§5.1　分式

分式是初二代数中的内容．归纳起来，主要是分式基本概念、分式的化简与计算及分式方程(组)三部分知识．分式本身不难，关键在于通过分式学习，进一步体会数学方法的综合运用．

一、分式的基本概念

一般地，若用 A、B 表示两个整式，$A \div B$ 就可以表示成$\dfrac{A}{B}$的形式．如果 B 中含有字母，式子$\dfrac{A}{B}$就叫分式．

在此，须特别强调，分母 $B \neq 0$. 只有在这种情况下，分式才有意义．这是研究分式变形、分式证明、分式方程等与分式有关的问题的前提条件．

下面，通过几个例子来熟悉分式的概念．

例 1. 当 x 取何值时，下述分式有意义？

$$\frac{x-2}{|x|^2-5|x|+6}$$

分析：所谓分式有意义即字母 $B \neq 0$，由于本题的分母较复杂，所以可以间接考虑 $B=0$，然后取 $B \neq 0$ 的值即可．

解：由 $|x|^2-5|x|+6=0 \Rightarrow (|x|-2)(|x|-3)=0 \Rightarrow |x|-2=0$ 或 $|x|-3=0 \Rightarrow |x|=2$ 或 $|x|=3 \Rightarrow x=\pm 2$ 或 $x=\pm 3$.

∴　当 $x\neq\pm2$ 且 $x\neq\pm3$ 时，分式有意义．

说明：请注意 x 由"或"到"且"的转变．x 取 $2,-2,3,-3$ 之一时，分式分母必为 0. 所以只有 $x\neq2,x\neq-2,x\neq3,x\neq-3$ 同时被满足，才能保证分母 $\neq0$，分式才有意义．

例 2. 分式 $\frac{5x+7}{1-x}$，当 x 取何值时，分式值为正？当 x 取何值时，分式值为负？

分析：我们知道，分式的符号问题在分式的学习中是很重要的．对其中的符号法则，变号法则应牢固掌握，灵活运用．

$$\frac{A}{B}>0\Leftrightarrow\begin{cases}A>0\\B>0\end{cases}\text{或}\begin{cases}A<0\\B<0\end{cases}$$

$$\frac{A}{B}<0\Leftrightarrow\begin{cases}A>0\\B<0\end{cases}\text{或}\begin{cases}A<0\\B>0\end{cases}$$

解：$\frac{5x+7}{1-x}>0\Leftrightarrow\begin{cases}5x+7>0\\1-x>0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}5x+7<0\\1-x<0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>-\frac{7}{5}\\x<1\end{cases}$ 或

$\begin{cases}x<-\frac{7}{5}\text{(舍)}\\x>1\end{cases}$

∴　当 $-\frac{7}{5}<x<1$ 时，分式值为正．

$\frac{5x+7}{1-x}<0\Leftrightarrow\begin{cases}5x+7>0\\1-x<0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}5x+7<0\\1-x>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>-\frac{7}{5}\\x>1\end{cases}$ 或

$\begin{cases}x<-\frac{7}{5}\\x<1\end{cases}$

∴　当 $x>1$ 或 $x<-\frac{7}{5}$ 时，分式值为负．

二、分式的化简与计算

分式性质：分式的分子和分母都乘以(或除以)同一个不等于零的整式，分式的值不变．用式子表示：

$$\frac{A}{B}=\frac{A\times M}{B\times M},\frac{A}{B}=\frac{A\div M}{B\div M},(M\neq 0)$$

分式的基本性质是通分、约分即分式变形的理论依据，而约分和通分又是分式化简和运算的基本方法，当然，对个别特殊题目，还应采用灵活多样的方法．如，设 k 求值法，拆项法、换元法、(均值代换法)、倒数法、应用韦达定理、取特殊值法等等．

下面，我们针对各种分式的特点来介绍化简分式的几种特殊的技巧．

第一、设 k 求值法

例 1. 设 a,b,c 均为非零常数，满足 $\frac{a+b-c}{c}=\frac{a-b+c}{b}=\frac{-a+b+c}{a}$，又 $x=\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}$ 且 $x<0$，试确定 x 的值，

解：设 $\frac{a+b}{c}=\frac{a+c}{b}=\frac{b+c}{a}=k$

$$\therefore\quad\begin{cases}a+b=ck\\a+c=bk,\\b+c=ak\end{cases}$$

当 $a+b+c\neq 0$ 时，$2(a+b+c)=k(a+b+c)\Rightarrow k=2$；

当 $a+b+c=0$ 时，$k=-1$.

$$\therefore\quad x=\frac{(a+b)}{c}\cdot\frac{(b+c)}{a}\cdot\frac{(c+a)}{b}=k^3$$

$\therefore\quad x=8$ 或 $x=-1$. 又 $x<0$，$\therefore x=-1$.

说明：1. 当题中涉及到分式的值连等时，设其等值为 k. 这种方法可称之为“设 k 变形法”，其优点在于将连等式化成若干个等式，将各字母用同一字母的解析式表达，从而给解题带来方

便．

2．在学习了等比定理后，本题也可用等比定理解决．（注：$a+b+c\neq0$）

实际上，设$\frac{a+b-c}{c}=\frac{a-b+c}{b}=\frac{-a+b+c}{a}=k$

由等比定理，

$$\frac{a+b-c+a-b+c+(-a+b+c)}{c+b+a}=k$$

即　$k=\frac{a+b+c}{a+b+c}=1$　又由合比定理，

$$k=\frac{a+b-c-(a-b+c)}{c-b}=-2$$

由 $k=1$ 知，$a+b=2c$，$\therefore x=8$（舍），又由 $k=-2$ 时，$a+b=-c$，$\therefore\quad x=-1$．

第二，拆项法

例 2．已知 $\frac{x^2+(y-1)^2}{|y|-3}=0$，求 $\frac{1}{(x+1)(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(x+3)}+\cdots+\frac{1}{(x+1994)(x+1995)}$的值．

解：由$\frac{x^2+(y-1)^2}{|y|-3}=0$ 知 $x=0$，且 $y=1$．

$$\begin{aligned}\text{故原式}&=\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\cdots+\frac{1}{1994\times1995}\\&=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{1994}-\frac{1}{1995}\\&=\frac{1994}{1995}.\end{aligned}$$

说明：本题如此轻而易举地解决，主要在于：①两个非负代数式和为 0$\Leftrightarrow$每个代数式分别为 0．从而推知 $x=0$ 为下面打好基础．

②将$\frac{1}{k(k+1)}$拆为$\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$，称之为“拆项法”．这是解此题

的最为关键的一步.

第三,倒数法

例 3. 已知$\frac{x}{x^2+x+1}=a(a\neq0,a\neq\frac{1}{2})$,求分式$\frac{x^2}{x^4+x^2+1}$的值.

解:$\frac{x^2+x+1}{x}=x+\frac{1}{x}+1=\frac{1}{a}(a\neq0)$变形为

$x+\frac{1}{x}=\frac{1}{a}-1.$

$\therefore\quad \frac{x^4+x^2+1}{x^2}=x^2+\frac{1}{x^2}+1=(x+\frac{1}{x})^2-1$

$=(x+\frac{1}{x}+1)(x+\frac{1}{x}-1)=\frac{1}{a}\cdot\frac{1-2a}{a}=\frac{1-2a}{a^2}$

$\because\quad a\neq\frac{1}{2},\therefore\frac{x^2}{x^4+x^2+1}=\frac{a^2}{1-2a}.$

说明:如按通常的方法是不容易做出此题的. 实际上,由所求形式及原式不难想到平方原式两边,但最终发现分母是和的形式,不易求解. 于是想到倒过来的方法,至于从一开始就取倒数还是中间再取,区别不大. 指导思想是一致的.

第四,换元法

例 4. 已知$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1,\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=0$,求$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=?$

分析:不难看出,只需将$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$两边平方,即会出现所求式的左边,再加上第二个条件,或许可以求得结果. 如果再用k,s,t代替$\frac{x}{a},\frac{y}{b},\frac{z}{c}$. 还可以简化书写结构,使解题思路更加清晰明了,所以考虑用换元法.

解:设$\frac{x}{a}=k,\frac{y}{b}=s,\frac{z}{c}=t$. 平方,得:

$(k+s+t)^2=1$,

再由条件(2),$\frac{1}{k}+\frac{1}{s}+\frac{1}{t}=0$

即　$\frac{st+kt+ks}{kst}=0.\Rightarrow st+kt+ks=0.$

又　$k^2+s^2+t^2=2(ks+kt+st)=1\Rightarrow k^2+s^2+t^2=1$

$\therefore\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$

说明:换元的目的无非是达到简单、明了的效果,使较复杂的题目变得简洁、清晰,便于解答.

关于分式的化简与计算,暂且介绍到此,还有许多新、奇、巧的方法,让我们边学边思考吧!

三、分式方程(组)

分式方程即分母里含有未知数的方程. 需要强调的是在解分式方程时可能会产生增根. 这是由于将分式方程化为整式方程在方程两边同乘一个整式时,可能会造成方程两边乘了一个等于零的数. 所以变形后的方程与原方程不是同解方程. 其中某个根可能只是转化后的整式方程的根,而不是原来的分式方程的根,所以在分式方程的求解中,一定要验根.

通常解分式方程有两步. 1. 将分式方程变形为整式方程. 2. 求解,并验根.

当然,通常情况下题目是如此处理,但碰上个别灵活性较大,具有特点的题目时,我们还需视情形而定方法.

例 1. 解方程:$\frac{x^3+7x^2+x+30}{x^2+x+13}=\frac{2x^3+11x^2+36x+45}{2x^2+7x+20}$

分析:学过比例后,知道$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow ad=bc$. 去分母显然太复杂,将出现五次运算,即便两边最高次系数相等,展开后也是个令人头痛的高次方程,所以只能另辟新路. 观察到:分式方程两

边的分式均为假分式，通常在这种情况下，应拆分假分式变为真分式.

解：原式为

$$(x+2)+\frac{x+4}{x^2+5x+13}=(x+2)+\frac{2x+5}{2x^2+7x+20}$$

$$(x+4)(2x^2+7x+20)=(2x+5)(x^2+5x+13)$$

展开，合并整理，得 $3x=15$，$x=5$

经验验，$x=5$ 是原分式方程的根.

例 1 是关于将一分式分成各个部分和的形式. 下面来看一道利用拆分技巧解的分式方程题.

例 2. 解方程：

$$\frac{1}{x+10}+\frac{1}{(x+1)(x+2)}+\cdots+\frac{1}{(x+9)(x+10)}=\frac{2}{5}$$

分析：由分式的化简与计算中知，可用拆项方法解此类问题.

解：原方程可变形为

$$\frac{1}{x+10}+\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}+\cdots+\frac{1}{x+9}-\frac{1}{x+10}=\frac{2}{5}$$

即 $\frac{1}{x+1}=\frac{2}{5}$，整理，$x=\frac{3}{2}$.

经检验：$x=\frac{3}{2}$ 是原分式方程的根.

例 3. 解方程组 $\begin{cases}\dfrac{xy}{x+y}=a\\[2mm]\dfrac{xz}{x+z}=b.\\[2mm]\dfrac{yz}{y+z}=c\end{cases}$，其中 $abc\neq0$

分析：这是一道含字母系数的分式方程组. 问题只需将 a,b,c 看成常数即可. 关键是如何解出 x,y,z. 由观察可知若在等式两边取倒数，可得一系列 $\frac{1}{x}$，$\frac{1}{y}$，$\frac{1}{z}$ 的等式，再由换元法或其他方法，题目

可以得解．

解：$\because abc\neq 0$，$\therefore$　$a\neq 0, b\neq 0, c\neq 0$，$\therefore x\neq 0, y\neq 0, z\neq 0$，原方程可变形为

$$\begin{cases}\dfrac{x+y}{xy}=\dfrac{1}{a}\\ \dfrac{x+z}{xz}=\dfrac{1}{b}\\ \dfrac{y+z}{yz}=\dfrac{1}{c}\end{cases}$$

即
$$\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{a} & (1)\\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{b} & (2)\\ \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{c} & (3)\end{cases}$$

(1)+(2)+(3)，得

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \qquad (4)$$

分别将(1)(2)(3)代入(4)求得

$$\begin{cases}\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{2a}+\dfrac{1}{2b}-\dfrac{1}{2c}\\ \dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{2a}-\dfrac{1}{2b}+\dfrac{1}{2c}\\ \dfrac{1}{z}=-\dfrac{1}{2a}+\dfrac{1}{2b}+\dfrac{1}{2c}\end{cases}\quad \text{解得：}\begin{cases}x=\dfrac{2abc}{bc+ac-ab}\\ y=\dfrac{2abc}{bc-ac+ab}\\ z=\dfrac{2abc}{-bc+ac+ab}.\end{cases}$$

习题 5.1

1. 当 x 取何值时，下列分式有意义？

(1) $\dfrac{x+1}{\dfrac{|x|}{2}-5}$　　(2) $\dfrac{1}{|x|^2-3|x|+2}$

2. 当 x 取何值时，分式值为零．

(1)$\frac{|x|^2-9}{x^2-5x+6}$． (2)$\frac{x^2-x}{x^5+x^3-x^2-1}$． (3)$\frac{x^2-x-6}{2+\frac{2}{2+x}}$．

3. 当 x 取何值时，分式$\frac{7-4x}{x+3}$的值为正、为负？

4. 化简：$\dfrac{\dfrac{1}{1+\frac{1}{x}}+\dfrac{1}{1-\frac{1}{x}}}{\dfrac{1-\frac{1}{x+1}}{1+\frac{1}{x-1}}}$．

5. 化简：$\frac{a+b}{a-b}+\frac{a-b}{a+b}+\frac{4ab}{b^2-a^2}$．

6. 化简：$\frac{1}{x^2+3x+2}+\frac{1}{x^2+5x+6}+\frac{1}{x^2+7x+12}$．

7. 计算：已知$\frac{x}{a-b}=\frac{y}{b-c}=\frac{z}{c-a}$，求 $x+y+z$ 的值．

8. 计算：$s=\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 9}+\cdots+\frac{1}{1993\cdot 1995}$．

9. 计算：已知 $a+b+c=0$. 求

$a(\frac{1}{b}+\frac{1}{c})+b(\frac{1}{c}+\frac{1}{a})+c(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})$的值．

10. 解下列各分式方程

(1)$\frac{16x-13}{4x-3}+\frac{40x-43}{8x-9}=\frac{32x-30}{8x-7}+\frac{20x-24}{4x-5}$

(2)$\frac{1}{(x-1)(x+1)}+\frac{1}{(x+1)(x+3)}+\frac{1}{(x+3)(x+5)}+\frac{1}{(x+5)(x+7)}=\frac{1}{2x-2}-\frac{1}{2}$．

(3)$2x-\frac{7}{2}=\frac{1}{1-2x}$．

§ 5.2　二次根式

式子$\sqrt{a}(a\geqslant 0)$叫做二次根式，它是初中代数中十分重要的内容，其中最简二次根式、同类根式、根式四则运算、有理化分母、$\sqrt{a^2}$ 化简等都是最基本的内容，作为活动课学习，我们侧重于知识的综合运用.

(一)二次根式化简与求值

例 1.　把二次根式 $a\sqrt{-\frac{1}{a}}$化为最简根式.

分析：要$\sqrt{-\frac{1}{a}}$有意义，必须且只须 $a<0$.

因此，$a<0$ 是我们化简 $a\sqrt{-\frac{1}{a}}$所要遵循的前提，化简目标是将 $a\sqrt{-\frac{1}{a}}$变为最简二次根式. 即：(1)被开方数的因数是整数，因式是整式；(2)被开方数中不含能开得尽方的因数或因式.

我们可采用移 a 于根号内，或移因式于根号外两种操作过程，于是形成两种解法.

解法 1：$\because a<0$

$$\therefore a\sqrt{-\frac{1}{a}}=a\sqrt{-\frac{a}{a^2}}=a\cdot\frac{1}{|a|}\sqrt{-a}=a\cdot\frac{1}{(-a)}\sqrt{-a}=-\sqrt{-a}.$$

解法 2：$\because a<0$

$$\therefore a\sqrt{-\frac{1}{a}}=-\sqrt{(-a)^2}\sqrt{-\frac{1}{a}}=-\sqrt{(-a)^2\cdot\frac{1}{(-a)}}$$

$$=-\sqrt{-a}.$$

例 2. 比较$\sqrt{10}+\sqrt{14}$与$\sqrt{11}+\sqrt{13}$的大小

分析:这是两个无理数大小的比较,其中每个无理数都表为两个二次根式之和的形式,我们可以通过平方数来比较大小.

解:由于$(\sqrt{10}+\sqrt{14})^2=10+2\sqrt{10\times14}+14=24+2\sqrt{140}$.而

$(\sqrt{11}+\sqrt{13})^2=11+2\sqrt{11\times13}+13=24+2\sqrt{143}$.

显然　由$\sqrt{140}<\sqrt{143}$　知

$(\sqrt{10}+\sqrt{14})^2<(\sqrt{11}+\sqrt{13})^2$

两边开平方,得

$\sqrt{10}+\sqrt{14}<\sqrt{11}+\sqrt{13}$.

答:$\sqrt{11}+\sqrt{13}$大于$\sqrt{10}+\sqrt{14}$.

说明:由$(\sqrt{10}+\sqrt{14})^2<(\sqrt{11}+\sqrt{13})^2$,两边开平方,即$\sqrt{(\sqrt{10}+\sqrt{14})^2}<\sqrt{(\sqrt{11}+\sqrt{13})^2}$,两边分别取算术根,得$\sqrt{10}+\sqrt{14}<\sqrt{11}+\sqrt{13}$. 因为一个正数开平方,比如4的平方根是$\pm2$,而$\sqrt{4}$代表4的算术根,∴　$\sqrt{4}=2$.

例 3.求值:

$\sqrt{1994\times1995\times1996\times1997+1}$.

分析:本题是求$1994\times1995\times1996\times1997+1$的算术平方根,为简化运算,可设$1994=a$.

解:令$1994=a$.

则　$\sqrt{1994\times1995\times1996\times1997+1}$

$=\sqrt{a(a+1)(a+2)(a+3)+1}$

$=\sqrt{(a^2+3a)(a^2+3a+2)+1}$

$=\sqrt{(a^2+3a)^2+2(a^2+3a)+1}$

$=\sqrt{(a^2+3a+1)^2}$

$=a^2+3a+1$

$=1994^2+3\times1994+1=3982019$.

例 4.化简

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{98}+\sqrt{99}}+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}.$$

分析：仔细观察，每项结构相同，均为 $\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$ 的形式. 而

$$\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}.$$

这为我们解题找到了突破口——有理化分母！

解：$\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{98}+\sqrt{99}}+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}.$

$$\xlongequal{\text{(有理化分母)}}(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{99}-\sqrt{98})+(\sqrt{100}-\sqrt{99})$$

$$=\sqrt{100}-1=10-1=9.$$

例 5. 若 a、b、c 为 $\triangle ABC$ 的三边之长 .

化简　$\sqrt{(a-b-c)^2}+\sqrt{(b-c-a)^2}+\sqrt{(c-a-b)^2}$

解：$\because$　在 $\triangle ABC$ 中，$a<b+c, b<c+a, c<a+b$.

$\therefore$　$a-b-c<0, b-c-a<0, c-a-b<0$. 因此

$$\sqrt{(a-b-c)^2}=-(a-b-c)=b+c-a$$

$$\sqrt{(b-c-a)^2}=-(b-c-a)=c+a-b$$

$$\sqrt{(c-a-b)^2}=-(c-a-b)=a+b-c.$$

$\therefore$　$\sqrt{(a-b-c)^2}+\sqrt{(b-c-a)^2}+\sqrt{(c-a-b)^2}$

$=(b+c-a)+(c+a-b)+(a+b-c)$

$=a+b+c.$

例 6. 一个自然数 a 恰等于另一个自然数 b 的平方，则称自然数 a 为完全平方数，如 $64=8^2$，64 就是一个完全平方数．若 $a=1995^2+1995^2\cdot1996^2+1996^2$，求证：$a$ 是一个完全平方数，并请你写出 a 的平方根．

解：设 $x=1995$，则 $x+1=1996$，我们有

$$
\begin{aligned}
a &=1995^2+1995^2\cdot1996^2+1996^2\\
&=x^2+x^2(x+1)^2+(x+1)^2\\
&=(x+1)^2-2x(x+1)+x^2+2x(x+1)+x^2(x+1)^2\\
&=(x+1-x)^2+2x(x+1)+[x(x+1)]^2\\
&=1^2+2x(x+1)+[x(x+1)]^2\\
&=[1+x(x+1)]^2\\
&=(1+1995\times1996)^2=(3982021)^2
\end{aligned}
$$

所以 a 是一个完全平方数．

根据平方根定义可知，a 的平方根是 ±3982021.

说明：对照例 6 与例 3，可以体会正数 a 的平方根与它的算术平方根是两个不同的概念，通常，比如求 100 的平方根，其结果为 ±10. 而求 $\sqrt{100}=$？则结果为 10. 即 $\sqrt{100}$ 代表 100 的算术平方根．

（二）复合多重二次根式的化简

在数学运算中，形如 $\sqrt{a\pm\sqrt{b}}$ 的化简非常重要，这就是复合多重二次根式中的常见的一类．其化简方法，因题而异．

例 1. 化简 $\sqrt{3-2\sqrt{2}}$

分析：由于 $3-2\sqrt{2}>0$，所以 $\sqrt{3-2\sqrt{2}}$ 表示求正数 $3-2\sqrt{2}$ 的算术平方根，不妨将 $3-2\sqrt{2}$ 配成一个完全平方型即可．

解：
$$
\begin{aligned}
\sqrt{3-2\sqrt{2}}&=\sqrt{2-2\sqrt{2}+1}\\
&=\sqrt{(\sqrt{2})^2-2\sqrt{2}+1^2}\\
&=\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}\\
&=\sqrt{2}-1.
\end{aligned}
$$

例 2. 化简

$$\sqrt{1996\sqrt{1995\sqrt{1994\sqrt{1993\times1991+1}+1}+1}+1}$$

解:这是多层组合,其运算次序,可加括号表示如下:

$$\sqrt{1996\{\sqrt{1995[\sqrt{1994(\sqrt{1993\times1991+1})+1}]+1}\}+1}$$

由内向外脱根号

$$\begin{aligned}&\sqrt{1993\times1991+1}\\&=\sqrt{(1992+1)(1992-1)+1}\\&=\sqrt{1992^2-1+1}=1992.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\sqrt{1994(\sqrt{1993\times1991+1})+1}\\&=\sqrt{1994\times1992+1}\\&=\sqrt{(1993+1)(1993-1)+1}\\&=\sqrt{1993^2-1+1}=1993.\end{aligned}$$

进而通过类似运算可得

$$\begin{aligned}&\sqrt{1995[\sqrt{1994(\sqrt{1993\times1991+1})+1}]+1}\\&=\sqrt{1995\cdot1993+1}\\&=\sqrt{(1994+1)(1994-1)+1}=1994.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad&\sqrt{1996\{\sqrt{1995[\sqrt{(1994\sqrt{1993\times1991+1})+1}]+1}\}+1}\\&=\sqrt{1996\times1994+1}\\&=\sqrt{(1995+1)(1995-1)+1}=1995.\end{aligned}$$

例 3. 计算

$$\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$$

解:$\because\quad\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$

$$=\sqrt{(\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}})(\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}})}$$

$$=\sqrt{2^2-(2+\sqrt{2+\sqrt{3}})}$$

$$=\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$$

而 $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$

$$=\sqrt{(2+\sqrt{2+\sqrt{3}})(2-\sqrt{2+\sqrt{3}})}$$

$$=\sqrt{2^2-(2+\sqrt{3})}$$

$$=\sqrt{2-\sqrt{3}}.$$

∴ 原式 $=\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{3}}$

$$=\sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}=\sqrt{2^2-3}$$

$$=1.$$

例 4. 计算 $\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}}$

解：由于 $(\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}})^2$

$$=3+\sqrt{5}-2\sqrt{(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}+3-\sqrt{5}$$

$$=6-2\sqrt{9-5}$$

$$=6-4$$

$$=2.$$

∴ $\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}}=\sqrt{2}.$

例 5. 如果 $a>0,b>0,a^2-b>0$. 求证：

(1) $\sqrt{a+\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}+\sqrt{\dfrac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$

(2) $\sqrt{a-\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}-\sqrt{\dfrac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$

证明：∵ $(\sqrt{a+\sqrt{b}})^2=a+\sqrt{b}.$

$$\left(\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}+\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}\right)^2$$

$$=\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}+2\sqrt{\frac{a^2-(a^2-b)}{4}}+\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}$$

$$=a+\sqrt{b}.$$

而$\sqrt{a+\sqrt{b}}$，$\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}+\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$都是正数．

∴　$\sqrt{a+\sqrt{b}}$与$\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}+\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$都是$a+\sqrt{b}$的算术平方根，但是这样的算术根只有一个．

$$\therefore \sqrt{a+\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}+\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}.$$

同理可证

$$\sqrt{a-\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}-\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}.$$

例 6. 化简：$\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{5-2\sqrt{6}}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)-\sqrt{3}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{5-2\sqrt{6}}}\right)+\sqrt{5-2\sqrt{6}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

解：根式比较复杂，我们采取分块化简的办法.

因为$\sqrt{5-2\sqrt{6}}=\sqrt{3-2\sqrt{6}+2}=\sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}=\left|\sqrt{3}-\sqrt{2}\right|=\sqrt{3}-\sqrt{2}$.

所以　$\frac{1}{\sqrt{5-2\sqrt{6}}}=\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\sqrt{3}+\sqrt{2}$.

因此

$$原式=\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)-\sqrt{3}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)$$
$$+(\sqrt{3}-\sqrt{2})\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$=(\sqrt{2}-\sqrt{3})(\sqrt{3}+\sqrt{2})-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}-1-1+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$=-3.$$

习题 5.2

1. 计算$\sqrt{8}-\sqrt{98}+\sqrt{50}$之值.

2. 若 $a=\frac{1}{2}(\sqrt{5}+\sqrt{3}), b=\frac{1}{2}(\sqrt{5}-\sqrt{3})$,

求 a^2-ab+b^2 之值.

3. 若 $x<0$,化简$\sqrt{(x-\sqrt{x^2})^2}$.

4. 试比较$\sqrt{2}+\sqrt{3}$与$\sqrt{10}$的大小.

5. 计算$\frac{1}{1+\sqrt[4]{10}}+\frac{1}{1-\sqrt[4]{10}}+\frac{2}{1+\sqrt{10}}$的值.

6. 计算$\sqrt{6-\sqrt{35}}+\sqrt{6+\sqrt{35}}$之值.

7. 如果 $a=\frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{2}+\frac{1}{8}}-\frac{1}{8}\sqrt{2}$.

求 $a^2+\sqrt{a^4+a+1}$之值.

8. 已知$a+b=\sqrt{\sqrt{1992}+\sqrt{1991}}$,

$$a-b=\sqrt{\sqrt{1992}-\sqrt{1991}}.$$

求 ab 之值.

9. 若 $1\leqslant x\leqslant 2$. 化简$\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$.

10. 化简$\frac{\sqrt{6}+4\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{(\sqrt{6}+\sqrt{3})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}$.

第 6 章　绝对值与算术根

现在我们对数的认识已经突破有理数的范围，在实数领域来研究代数式及其运算．

§ 6.1　绝对值

实数 x 的绝对值用记号 $|x|$ 来表示，其定义是：

$$|x|=\begin{cases}x & (x>0)\\ 0 & (x=0)\\ -x & (x<0)\end{cases}\quad 或\quad |x|=\begin{cases}x & (x\geqslant 0)\\ -x & (x<0)\end{cases}$$

实数的绝对值有以下一些性质．

1. $|x|=|-x|$

证明：根据定义 $|-x|=\begin{cases}-(-x) & (-x<0)\\ 0 & (-x=0)\\ -x & (-x>0)\end{cases}$

即　$|-x|=\begin{cases}x & (x>0)\\ 0 & (x=0)\\ -x & (x<0)\end{cases}$

$\therefore\quad |x|=|-x|.$

推论：　$|x-y|=|y-x|.$

2. $|x^2|=|x|^2=x^2.$

证明：$\because\quad x^2\geqslant 0,$

$\therefore\quad |x^2|=x^2.$

而 $|x|^2$ 可分情况讨论．

$$\because \quad |x|=\begin{cases} x(x\geqslant 0) \\ -x(x<0) \end{cases}$$

$$\therefore \quad |x|^2=\begin{cases} x^2 & (x\geqslant 0) \\ (-x)^2=x^2 & (x<0) \end{cases}$$

$\therefore \quad |x^2|=|x|^2=x^2.$

3. $-|x|\leqslant x\leqslant |x|.$

4. 若 $a\geqslant 0$,则 $|x|\geqslant a \Leftrightarrow \quad x\geqslant a$ 或 $x\leqslant -a.$

$$|x|\leqslant a \Leftrightarrow \quad -a\leqslant x\leqslant a.$$

5. $|xy|=|x||y|$;$\left|\dfrac{x}{y}\right|=\dfrac{|x|}{|y|}.$

6. $|x+y|\leqslant |x|+|y|.$

证明:$\because \quad -|x|\leqslant x\leqslant |x|,\quad -|y|\leqslant y\leqslant |y|$

$\therefore \quad -(|x|+|y|)\leqslant x+y\leqslant |x|+|y|$

即 $|x+y|\leqslant |x|+|y|.$

推论 $\quad |x+y+z|\leqslant |x|+|y|+|z|.$

7. $|x|-|y|\leqslant |x-y|.$

证明:$\because \quad |y|+|x-y|\geqslant |y+x-y|=|x|$

$\therefore \quad |x-y|\geqslant |x|-|y|.$

8. $\sqrt{x^2}=|x|.$

证明:$\quad \sqrt{x^2}=\begin{cases} x & (x\geqslant 0) \\ -x & (x<0) \end{cases}$

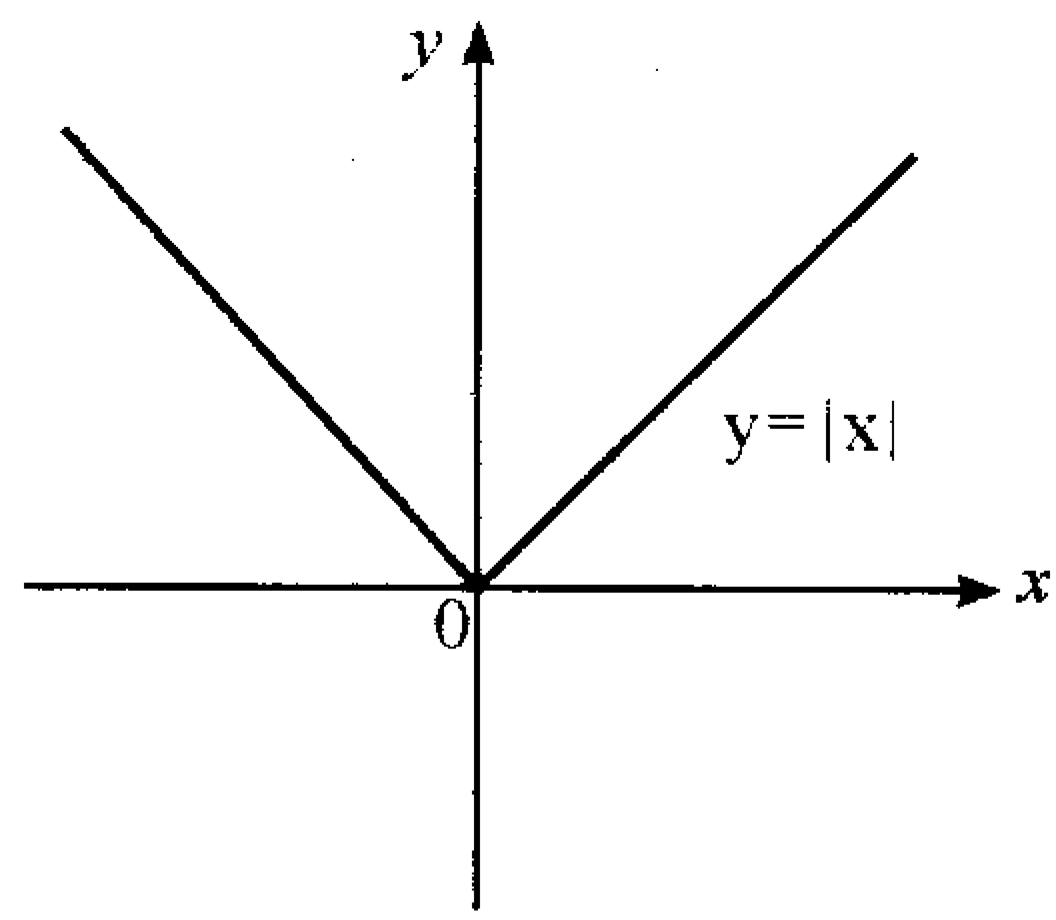
$\therefore \sqrt{x^2}=|x|.$

这一性质反映出算术根与绝对值概念之间的联系.

对于绝对值的概念,还可以从函数角度来理解.

对每个实数 x,总有一个 $|x|$ 与之对应,所以 $|x|$ 可以看作 x 的函数. 记作 $y=|x|$.

即 $\quad y=|x|=\begin{cases} x(x\geqslant 0) \\ -x(x<0) \end{cases}$ 这是一个分段函数,其图像如图所示.



从图像中可以看出，绝对值函数 $y=|x|$ 的如下特征 .

① $y=|x|$　定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $[0,+\infty)$. 说明实数的绝对值的非负性 .

② x 离坐标原点越远，函数值则无限增大 .

即　在 $(-\infty,0]$ 上函数值递减，在 $[0,+\infty)$ 上函数值递增 .

③ $y=|x|$ 的图像关于 y 轴对称，表明互为相反数的两个数的绝对值相等，即 $|x|=|-x|$.

例 1. 化简　$\dfrac{1-x-x^2+x^3}{1-2|x|+x^2}$

解：$\dfrac{1-x-x^2+x^3}{1-2|x|+x^2}=\dfrac{(1-x)-x^2(1-x)}{1-2|x|+|x|^2}$

$$=\frac{(1-x)^2(1+x)}{(1-|x|)^2}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{(1+x)(1-x)^2}{(1-x)^2}=1+x & (x\geqslant 0,\quad x\neq 1)\\[2ex] \dfrac{(1+x)(1-x)^2}{(1+x)^2}=\dfrac{(1-x)^2}{1+x} & (x<0,\quad x\neq -1)\end{cases}$$

例 2. 若非零二实数的绝对值的和等于这两个数的积的绝对值 . 证明，这两个数都不在 -1 与 $+1$ 之间 .

已知　　设非零二实数为 a,b，满足 $|a|+|b|=|ab|$，

求证：$|a|>1$，且 $b>1$.

证明：$\because$　$|a|+|b|=|ab|$

$\therefore\quad |a|+|b|=|a||b|$

即 $|b|=|a|\cdot|b|-|a|=|a|(|b|-1)$

$\therefore\quad a\neq 0, b\neq 0,$

$\therefore\quad |a|>0, |b|>0$

同此 $\quad |b|-1=\dfrac{|b|}{|a|}=\left|\dfrac{b}{a}\right|>0$，即 $|b|>1$.

同理可证 $\quad |a|>1$.

也就是这两个非零实数都不在 -1 与 $+1$ 之间.

例 3. 化简 $\sqrt{x^2-2x+1}+\sqrt{x^2-6x+9}$

解：$\sqrt{x^2-2x+1}+\sqrt{x^2-6x+9}$

$=\sqrt{(x-1)^2}+\sqrt{(x-3)^2}$

$=|x-1|+|x-3|$.

要对含绝对值的函数式化简，成为本题的关键，其一般方法是分区间讨论，具体操作如下：

$y=|x-1|+|x-3|$ 要进一步讨论，需要取"零点"，分区间来进行. $|x-1|$ 的零点为 1. $|x-3|$ 的零点为 3. 这样，就将实数值分为三个区间 $x<1$，$1\leqslant x<3$ 及 $x\geqslant 3$.

①当 $x<1$ 时，应有 $\quad x-1<0$，所以 $|x-1|=-(x-1)=1-x$.

当然 $\quad x-3<x-1<0$，因此 $|x-3|=-(x-3)=3-x$.

$\therefore$ 当 $\quad x<1$ 时. $|x-1|+|x-3|=1-x+3-x=4-2x$.

②当 $1\leqslant x<3$ 时. $\quad |x-1|=x-1$. $|x-3|=-(x-3)=3-x$

$\therefore\quad |x-1|+|x-3|=x-1+3-x=2$.

③当 $x\geqslant 3$ 时. $\quad |x-1|=x-1$，$|x-3|=x-3$.

$\therefore |x-1|+|x-3|=x-1+x-3=2x-4$.

因此，结合上述讨论有：

$\sqrt{x^2-2x+1}+\sqrt{x^2-6x+9}=|x-1|+|x-3|$

$$=\begin{cases}4-2x & (\text{当 } x<1 \text{ 时})\\ 2 & (\text{当 } 1\leqslant x<3 \text{ 时})\\ 2x-4 & (\text{当 } x\geqslant 3 \text{ 时})\end{cases}$$

例 4. 在直角坐标平面 $x-0-y$ 中. 试画出满足: $x-|x|=y-|y|$ 的点组成的平面图形.

解:①当 $x\geqslant 0$ 时,$x-|x|=0 \Rightarrow y-|y|=0 \Leftrightarrow |y|=y \Leftrightarrow y\geqslant 0$.

$\therefore \quad \begin{cases} x\geqslant 0 \\ y\geqslant 0 \end{cases}$ 表示第一象限及其边界的点.

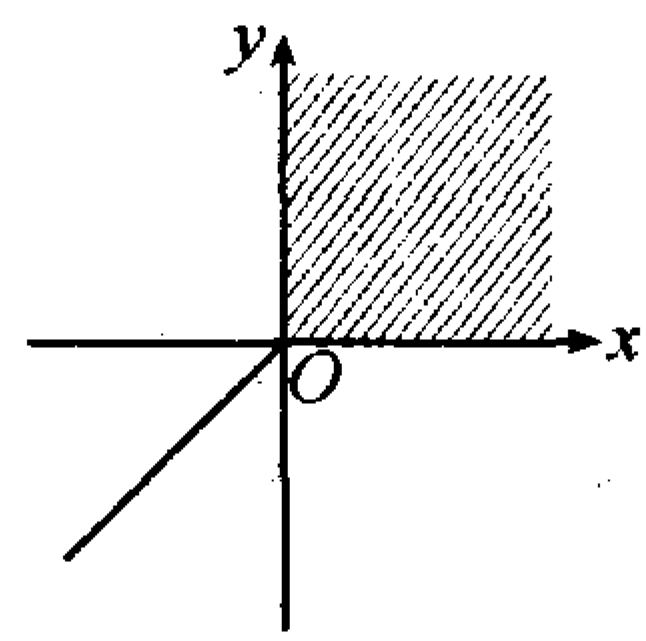
②当 $x<0$ 时　有 $x-|x|<0$,可得 $y-|y|<0$　即 $y<|y| \Rightarrow y<0$.

由　$x-|x|=y-|y|$

即　$x-(-x)=y-(-y)$

$2x=2y$

$\therefore \quad y=x.$



此时图像为第三象限的角平分线.

综合①,②可画出满足 $x-|x|=y-|y|$ 的点的图像如图所示.

习题　6.1

1. 在直角坐标平面 $x-0-y$ 中,描出满足条件　$x-|x|=0$ 的点的图形.

2. a,b 是实数,下面四个命题中正确的是(　)

(A)若 $a>b$,则 $a^2>b^2$,　　(B)若 $|a|>b$,则 $a^2>b^2$.

(C)若 $a>|b|$,则 $a^2>b^2$,　　(D)若 $a\neq|b|$,则 $a^2\neq b^2$.

3. 已知　$|ab|+1-|a|-|b|=0$,求 a、b.

4. 已知 $|ab|+|a+b|=1$,则整数对 (a,b) 的个数是(　)

(A)4 个.　(B)6 个.　(C)8 个.　(D)10 个.

5. 设实数 a、b 满足不等式 $||a|-(a+b)|<|a-|a+b||$,则(　)

(A)$a>0$ 且 $b<0$.　　(B)$a<0$ 且 $b>0$.

(C)$a>0$ 且 $b<0$.　　(D)$a<0$ 且 $b<0$.

§6.2 算术根

一个正数开偶次方，比如 169 开平方，等于±13 两个值．也就是$(+13)^2=169$，$(-13)^2=169$，所以它们都是 169 的平方根．其中我们把+13 称为 169 的算术平方根．这是因为在数表都按算术数设计的，我们只要知道 169 的算术平方根 13，就可以添加负号写出另一个平方根-13.

一个正数的正的方根叫做这个数的算术根，规定零的算术根是零．显然，算术根是非负数．非负数算术根是唯一的．

若 n 为正整数，则$\sqrt[2n]{a^{2n}}=|a|$，表明了算术根与绝对值之间的内在联系．

算术根有如下运算性质．

1. $\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[np]{a^{mp}}$ （$a\geqslant 0$，m，n，p 都是正整数，且 $n>1$）

2. $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$（$a\geqslant 0$，$b\geqslant 0$，$n$ 是大于 1 的正整数）

3. $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$（$a\geqslant 0$，$b>0$，$n$ 是大于 1 的正整数）

4. $(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$（$a\geqslant 0$，$m$，$n$ 都是正整数，且 $n>1$）显然 $(\sqrt[n]{a})^n=\sqrt[n]{a^n}=a$.

5. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[mn]{a}$（$a\geqslant 0$，$m$，$n$ 都是大于 1 的正整数）

有了算术根的概念，对根式的化简，要特别注意其中字母的符号．这样才能保证运算正确，结果的确定性．

例 1. 化简 $(m-n)\sqrt{\dfrac{m+n}{(m-n)^2}}$ （$m>0$，$n>0$）

解：$(m-n)\sqrt{\dfrac{m+n}{(m-n)^2}}=(m-n)\cdot\dfrac{\sqrt{m+n}}{|m-n|}$

当 $m>n$ 时，　$|m-n|=m-n$

$\therefore$　原式$=(m-n)\cdot\dfrac{\sqrt{m+n}}{m-n}=\sqrt{m+n}.$

当 $m<n$ 时时　　$|m-n|=n-m$

$\therefore$　原式$=(m-n)\cdot\dfrac{\sqrt{m+n}}{n-m}=-\sqrt{m+n}.$

例 2. 化简下面的表达式

$$\left[6+\frac{a-\sqrt[3]{131+a^3-\sqrt{17160}}}{\left|a-\sqrt[3]{131+a^3-\sqrt{17160}}\right|}\right]^6=?$$

解:先比较　a 与 $\sqrt[3]{131+a^3-\sqrt{17160}}$　的大小

由于 $131+a^3-\sqrt{17160}>131+a^3-131\Rightarrow 131+a^3-\sqrt{17160}>a^3$　所以 $\sqrt[3]{131+a^3-\sqrt{17160}}>a$,

因此 $a-\sqrt[3]{131+a^3-\sqrt{17160}}<0$

因此 $\left[6+\dfrac{a-\sqrt[3]{131+a^3-\sqrt{17160}}}{\left|a-\sqrt[3]{131+a^3-\sqrt{17160}}\right|}\right]^4=(6-1)^4=5^4=625.$

例 3. 已知一个分数的分子与分母之和为 37. 这个分数的算术平方根为 0.92(精确到 0.01),求这个分数.

解:设这个分数分子为 a,分母为 b,则 $a+b=37$.

且　$0.915<\sqrt{\dfrac{a}{b}}<0.925$

平方得　$0.837<\dfrac{a}{b}<0.856$

$0.837<\dfrac{37-b}{b}<0.856$

$1.837b<37<1.856b$

$\dfrac{37}{1.856}<b<\dfrac{37}{1.837}$

$19.9<b<20.1$

$\therefore$　$b=20$,　$a=17$,　$\dfrac{a}{b}=\dfrac{17}{20}$.

经验算，这个分数是$\frac{17}{20}$.

例 4. 如果$a<b$，那么$\sqrt{-(x+a)^3(x+b)}$等于(　)

(A)$(x+a)\sqrt{-(x+a)(x-b)}$

(B)$(x+a)\sqrt{(x+a)(x+b)}$

(C)$-(x+a)\sqrt{-(x+a)(x+b)}$

(D)$-(x+a)\sqrt{(x+a)(x+b)}$

解：因为$-(x+a)^3(x+b)\geqslant 0$

所以 $(x+a)(x+b)\leqslant 0$

又因为　$a<b$. 所以　$-b\leqslant x\leqslant -a$.

$\therefore$原式$=-(x+a)\sqrt{-(x+a)(x+b)}$　　　选择(C).

例 5. 在实数范围内．设

$$x=\left(\frac{\sqrt{(x-2)(|a|-1)}+\sqrt{(a-2)(1-|a|)}}{1+\frac{1}{1-a}}+\frac{5a+1}{1-a}\right)^{1988}$$

则x的个位数字是(　)

(A)1.　　　(B)2.　　　(C)4.　　　(D)6.

解：要使两个根式都有意义，必须$(a-2)(|a|-1)\geqslant 0$

且$(a-2)(1-|a|)\geqslant 0$

但　$(a-2)(1-|a|)=-(a-2)(|a|-1)$

所以只能是　$(a-2)(|a|-1)=0$

解得$a_1=2, a_2=1, a_3=-1$.

若$a_1=2$，则　$1+\frac{1}{1-a}=0$;

若$a_1=1$，则　$1-a=0$；均使分母为0，均应排除，

因而仅有$a_3=-1$适用，此时$x=\left(\frac{5\times(-1)+1}{1-(-1)}\right)^{1988}=(-2)^{1988}=2^{4\times 497}=16^{497}$，所以$x$的个位数字是6.

例 6. $x\geqslant 1$化简

$\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$

解:原式$=\sqrt{(x-1)+2\sqrt{x-1}+1}+\sqrt{(x-1)-2\sqrt{x-1}+1}$

$=\sqrt{(\sqrt{x-1}+1)^2}+\sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2}$

$=|\sqrt{x-1}+1|+|\sqrt{x-1}-1|$

下面分情况讨论:分界点取 $\sqrt{x-1}-1=0$, $\sqrt{x-1}=1\Rightarrow x-1=1$ 则 $x=2$.

1 当　$1\leqslant x\leqslant 2$ 时,　$\sqrt{x-1}-1\leqslant 0$

$\therefore$原点$=\sqrt{x-1}+1-(\sqrt{x-1}-1)=2$

2. 当 $x>2$ 时,　　$\sqrt{x-1}-1>0$

$\therefore$原式$=\sqrt{x-1}+1+\sqrt{x-1}-1=2\sqrt{x-1}$

综合之$\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$

$$=\begin{cases}2 & (\text{当 } 1\leqslant x\leqslant 1 \text{ 时})\\ 2\sqrt{x-1} & (\text{当 } x>2 \text{ 时}).\end{cases}$$

习题 6.2

1. 已知最简根式 $a\sqrt{2a+b}$与$\sqrt[a-b]{7}$是同类根式,则满足条件的 a,b 的值(　)

(A)不存在．(B)有一组．(C)有两组．(D)多于两组．

2. 已知 $x=\frac{1}{2}\left(\sqrt[n]{1991}-\frac{1}{\sqrt[n]{1991}}\right)$　　(n 是正整数)

那么　$(x-\sqrt{1+x^2})^n$ 的值是(　)

(A)$\frac{1}{1991}$.　　(B)$-\frac{1}{1991}$.

(C)$(-1)^n1991$.　　(D)$(-1)^n\frac{1}{1991}$.

3. 若 $0<a<1$，则 $\sqrt{a^2+\frac{1}{a^2}-2}\div(1+\frac{1}{a})\times\frac{1}{1+a}$ 可化简为(　)

(A) $\frac{1-a}{1+a}$.　(B) $\frac{a-1}{a+1}$.　(C) $1-a^2$.　(D) a^2-1.

4. 求函数　$y=\frac{1}{\sqrt{1-2|x|}}$ 的定义域.

5. 设 $f(x)=5-|x|$，　$g(x)=-5+|x|$.

写出 $f[g(x)]$ 的表达式并画出图像.

6. 化简表达式.

$\sqrt{x^2+4x+4}+\sqrt{x^2-2x+1}+\sqrt{x^2-6x+9}$.

7. 化简 $\sqrt{\frac{a^2-3a+2}{a^2-6a+9}}\cdot\frac{a-3}{\sqrt{2-a}}+\sqrt{1-a}$.

8. 如果　$1<x<2$.　试确定　$\frac{|x-2|}{x-2}-\frac{|x-1|}{1-x}+\frac{|x|}{x}$ 的值.

§6.3　用非负数解题

实数的平方非负是实数的重要属性. 显然，对实数 x，有 $|x|$ 是非负数，x^{2n}（n 为正整数）是非负数. 非负数的算术根是个非负数.

非负数有以下性质：

(1) 有限个非负数的和仍是非负数；有限个非负数的积仍是非负数. 即

若 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 都是非负数，则

$$a_1+a_2+\cdots+a_n\geqslant 0;\quad a_1a_2\cdots a_n\geqslant 0.$$

(2) 有限个非负数的和为 0，当且仅当每个加数为 0. 即

若 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 均为非负，且 $a_1+a_2+\cdots+a_n=0\Leftrightarrow a_1=a_2=\cdots=a_n=0$.

这个性质在非负数解题中非常重要.

例 1. 若　$|x-8y|+(4y-1)^2=0$，试求 $(x+2y)^3$ 之值.

解：由 $|x-8y|+(4y-1)^2=0$ 可得 $\begin{cases}x-8y=0\\4y-1=0\end{cases}$

$\therefore\quad x=2,y=\dfrac{1}{2}$.

因此　$(x+2y)^3=(2+\dfrac{1}{2})^3=(\dfrac{5}{2})^3=15\dfrac{5}{8}$.

例 2. 设 a,b,c,d 均为正数，且满足 $a^4+b^4+c^4+d^4=4abcd$. 求证：$a=b=c=d$.

证明：由已知得

$$a^4+b^4+c^4+d^4-4abcd=0$$

即　$(a^4-2a^2b^2+b^4)+(c^4-2c^2d^2+d^4)+(2a^2b^2-4abcd+2c^2d^2)=0$

$$(a^2-b^2)^2+(c^2-d^2)^2+2(ab-cd)^2=0$$

由非负数的性质得

$a^2=b^2,c^2=d^2,ab=cd$. 又 a、b、c、d 均为正数.

$\therefore\quad a=b=c=d$.

例 3. 在实数范围内解方程

$$\frac{36}{\sqrt{2x-1}}+\frac{4}{\sqrt{3y+1}}+\frac{4}{\sqrt{2x-1}}+\sqrt{3y+1}=28.$$

解：设 $\sqrt{2x-1}=t$，$\sqrt{3y+1}=s$，显然 $t>0$，，$s>0$

原方程转化为　$\dfrac{36}{t}+\dfrac{4}{s}+4t+s=28$

经配方整理得　$\left(2\sqrt{t}-\dfrac{6}{\sqrt{t}}\right)^2+\left(\sqrt{s}-\dfrac{2}{\sqrt{s}}\right)^2=0$

由非负数性质得　$2\sqrt{t}-\dfrac{6}{\sqrt{t}}=0$，$\sqrt{s}-\dfrac{2}{\sqrt{s}}=0$

解得　$t=3,s=2$，从而 $\sqrt{2x-1}=3$，$\sqrt{2y+1}=2$

所以　$x=5$ 且 $y=1$.

经验算，$x=5$ 且 $y=1$ 是原方程的解.

例 4. 已知 $x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z+14=0$

求 $(x-y-z)^{2004}$之值．

解:由 $x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z+14=0$

得 $(x^2-2x+1)+(y^2+4y+4)+(z^2-6z+9)=0$

即 $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=0$

根据非负数的性质,有 $x=1,y=-2,z=3.$

$\therefore$ $(x-y-z)^{2004}=(1+2-3)^{2004}=0.$

例 5．实数 x,y,z 满足

$$\sqrt{x}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-2}=\frac{1}{2}(x+y+z)$$

确定 $(x-yz)^3$ 的值．

解:由$\sqrt{x}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-2}=\frac{1}{2}(x+y+z)$

得 $2\sqrt{x}+2\sqrt{y-1}+2\sqrt{z-2}=x+y+z$

于是 $x+y+z-2\sqrt{x}-2\sqrt{y-1}-2\sqrt{z-2}=0$

$(x-2\sqrt{x}+1)+[(y-1)-2\sqrt{y-1}+1]+[(z-2)-2\sqrt{z-2}+1]=0$

即 $(\sqrt{x}-1)^2+(\sqrt{y-1}-1)^2+(\sqrt{z-2}-1)^2=0$

$\therefore$ $\sqrt{x}=1\Rightarrow x=1,\sqrt{y-1}=1\Rightarrow y=2,\sqrt{z-2}=1\Rightarrow z=3$

于是 $(x-yz)^3=(1-2\times3)^3=(-5)^3=-125.$

例 6．求满足

$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2+x_6^2+x_7^2+x_8^2+\frac{4}{9}-(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+x_4x_5+x_5x_6+x_6x_7+x_7x_8+x_8)=0$ 的实数 $x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8$.

解:将原等式左部配方得

$$(x_1-\frac{1}{2}x_2)^2+\frac{3}{4}(x_2-\frac{2}{3}x_3)^2+\frac{4}{6}(x_3-\frac{3}{4}x_4)^2+\frac{5}{8}(x_4-\frac{4}{5}x_5)^2+\frac{6}{10}(x_5-\frac{5}{6}x_6)^2+\frac{7}{12}(x_6-\frac{6}{7}x_7)^2+\frac{8}{14}(x_7-\frac{7}{8}x_8)^2+\frac{9}{16}(x_8-\frac{8}{9})^2=0$$

由非负数的性质得 $x_1=\frac{1}{2}x_2, x_2=\frac{2}{3}x_3, x_3=\frac{3}{4}x_4, x_4=\frac{4}{5}x_5, x_5=\frac{5}{6}x_6, x_6=\frac{6}{7}x_7, x_7=\frac{7}{8}x_8, x_9=\frac{8}{9}$.

所以 $x_1=\frac{1}{9}, x_2=\frac{2}{9}, x_3=\frac{3}{9}, x_4=\frac{4}{9}, x_5=\frac{5}{9}, x_6=\frac{6}{9}, x_7=\frac{7}{9}, x_8=\frac{8}{9}$ 为所求原方程的实数解.

例 7. 设 a,b,c 为三角形三边之长，且满足 $a^2+b^2+c^2+338=10a+24b+26c$. 试判别这个三角形的形状.

解： 由条件 $a^2+b^2+c^2+338=10a+24b+26c$ 得

$$(a^2-10a+25)+(b^2-24b+144)+(c^2-26c+169)=0$$

即 $(a-5)^2+(b-12)^2+(c-13)^2=0$

由非负数的性质得 $a=5, b=12, c=13$.

由 $5^2+12^2=13^2$ 知该三角形为直角三角形.

习题 6.3

1. 若 a、b、c 为实数，满足 $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$

求证：$a=b=c$.

2. 已知 x、y、z 满足 $\frac{1}{2}(x-y)+\sqrt{2y+z}+z^2-z+\frac{1}{4}=0$

试求 $(x+y+z)^{2005}$ 的值.

3. 若 a、b、c 为实数，且满足

$a^4+b^4+c^4+b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2=2ab(a+b+c)$. 求证：$a=b=c$.

4. 已知 $|a-1|+\sqrt{b^2+2b+1}=0$ 求 $a^{2003}+b^{2004}$ 的值.

5. 已知 $a^2+b^2-4a-2b=-5$ 求 $\frac{\sqrt{a}+b}{\sqrt{3b+2a}}$ 的值.

6. 设 a、b、c 为实数，

若 $a+b+c=2\sqrt{a+1}+4\sqrt{b+1}+6\sqrt{c-2}-14$

求 $a(b+c)+b(c+a)+c(a+b)$ 的值.

第7章　代数式的恒等变形

我们知道,将字母和数字用运算符号连结起来的式子叫做代数式,将两个代数式用等号连接起来称为等式．如$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$;$2x+1=x+3$;$9+|x|=3$等都是等式,我们发现,对任意a、b的值$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$总成立,这种等式称为恒等式,而$2x+1=x+3$,只在$x=2$的条件下成立,这种等式称为条件等式,也就是方程,由于$|x|\geqslant 0$,对任意x值$9+|x|$与3均不相等,我们称$9+|x|=3$为矛盾等式,今后我们主要研究恒等式和条件等式(方程)两种情形．

等式有如下一些基本性质：

若用两个不同的字母表示等式的两边,则有

性质1. 若$a=b$,则$b=a$,也就是等式两边可以交换位置

性质2. 若$a=b$且$b=c$,则$a=c$,也就是等式可以代换.

性质3. 若$a=b$且$m=n$,则$a+m=b+n$,$a-m=b-n$.

性质4. 若$a=b$且$m=n$,则$am=bn$,$\frac{a}{m}=\frac{b}{n}$(其中除数不为0).

在初学代数的过程中,恒等变形是一项重要内容. 其实,多项式的因式分解就是恒等变形. 其主要涉及恒等式的证明,条件恒等式的证明以及代数式的求值．

§7.1　恒等式的证明

例 1. 证明恒等式$(ax-by)^2+(bx+ay)^2=(a^2+b^2)(x^2+y^2)$.

分析：由于等号两边的地位是一样的，因此，从左边向右变形得出右方，或从右向左变形得出左方，是两条重要思路.

证法 1：$\because$ 左$=(ax-by)^2+(bx+ay)^2$

$$=a^2x^2+b^2y^2-2abxy+b^2x^2+a^2y^2+2abxy$$

$$=a^2x^2+b^2y^2+b^2x^2+a^2y^2$$

$$=a^2(x^2+y^2)+b^2(x^2+y^2)$$

$$=(a^2+b^2)(x^2+y^2)=\text{右}.$$

$\therefore (ax-by)^2+(bx+ay)^2=(a^2+b^2)(x^2+y^2)$.

证法 2：$\because$ 左$=(a^2+b^2)(x^2+y^2)=a^2x^2+b^2x^2+a^2y^2+b^2y^2$

$$=(a^2x^2-2axby+b^2y^2)+(b^2x^2+2bxay+a^2y^2)$$

$$=(ax-by)^2+(bx+ay)^2=\text{左}.$$

$\therefore (ax-by)^2+(bx-ay)^2=(a^2+b^2)(x^2+y^2)$.

证法 3：我们利用等式性质 2，实现如下证明

$\because$ 左$=(ax-by)^2+(bx+ay)^2$

$$=a^2x^2+b^2y^2+2abxy+b^2x^2+a^2y^2+2abxy$$

$$=a^2x^2+b^2y^2+b^2x^2+a^2y^2=A\text{ 式}$$

右$=(a^2+b^2)(x^2+y^2)=a^2x^2+b^2x^2+a^2y^2+b^2y^2$

$$=a^2x^2+b^2y^2+b^2x^2+a^2y^2=A\text{ 式}$$

$\therefore$ 左$=A$ 式$=$右.

即　$(ax-by)^2+(bx+ay)^2=(a^2+b^2)(x^2+y^2)$.

例 1 所示的三种方式，展示了恒等式证明中的三种基本途径.

例 2. 证明恒等式

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca).$$

证明 1：从左向右变换

左$=a^3+b^3+c^3-3abc$

$=a^3+3ab(a+b)+b^3+c^3-3abc-3ab(a+b)$

$=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3+c^3-3ab(c+a+b)$

$=(a+b)^3+c^3-3ab(a+b+c)$

$=[(a+b)+c][(a+b)^2-(a+b)c+c^2]-3ab(a+b+c)$

$=(a+b+c)[(a+b)^2-(a+b)c+c^2-3ab]$

$=(a+b+c)[a^2+2ab+b^2-ac-bc+c^2+3ab]$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=$右.

$\therefore\quad a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca).$

证明 2:从右向左变换

右$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

$=a^3+a^2b+a^2c+ab^2+b^3+b^2c+c^2a+bc^2+c^3$

$-a^2b-ab^2-abc-abc-b^2c-bc^2-a^2c-abc-ac^2$

$=a^3+b^3+c^3-3abc=$左.

$\therefore\quad a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca).$

证明 3:从左向右变换,从右向左变换在中途点汇合

左$=a^3+b^3+c^3-3abc$

$=(a+b)(a^2-ab-b^2)+c^3-3abc$

$=(a+b)(a^2-ab+b^2)+c(a^2-ab+b^2)+c^3-3abc$

$-c(a^2-ab+b^2)$

$=(a+b+c)(a^2-ab+b^2)+c(c^2-3ab-a^2+ab+b^2)$

$=(a+b+c)(a^2-ab+b^2)+c[c^2-(a^2+2ab+b^2)]$

$=(a+b+c)(a^2-ab+b^2)+c[c^2-(a+b)^2]=A$ 式

而右$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

$=(a+b+c)(a^2-ab+b^2+c^2-bc-ca)$

$=(a+b+c)(a^2-ab+b^2)+(a+b+c)c[c-(a+b)]$

$=(a+b+c)(a^2-ab+b^2)+c[c+(a+b)][c-(a+b)]$

$=(a+b+c)(a^2-ab+b^2)+c[c^2-(a+b)^2]=A$ 式

$\therefore\quad$ 左$=A$ 式$=$右.

因此 $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$.

从例 2 可见，在恒等式证明的途径中，繁简难易是大有差异的. 本题的证法 2 是最简捷的，因为乘法变形运算要比因式分解容易得多，所以在恒等式证明中要选择简捷易证的途径，一般原则是从繁的一方向简的一方化简是比较通用的.

例 3. 证明恒等式

$$(a+b+c)^3+(b-a-c)^3+(c-a-b)^3+(a-b-c)^3=24abc.$$

分析：本题显然从左向右变形容易下手.

证明：

$$\begin{aligned}
\text{左}&=(a+b+c)^3+(b-a-c)^3+(c-a-b)^3+(a-b-c)^3\\
&=[(a+b+c)^3+(b-a-c)^3]+[(c-a-b)^3+(a-b-c)^3]\\
&=2b[(a+b+c)^2-(a+b+c)(b-a-c)+(b-a-c)^2]\\
&\quad-2b[(c-a-b)^2-(c-a-b)(a-b-c)+(a-b-c)^2]\\
&=2b\{[(a+b+c)-(b-a-c)]^2+[(a+b+c)(a-b-c)]\}\\
&\quad-2b\{[(c-a-b)-(a-b-c)]^2+(c-a-b)(a-b-c)\}\\
&=2b\{4(a+c)^2+b^2-(a-c)^2\}-2b\{4(c-a)^2-(a-c)^2+\\
&\quad b^2\}\\
&=2b[3(a+c)^2+b^2-3(a-c)^2-b^2]\\
&=2b[3(a+c+a-c)(a+c-a+c)]\\
&=2b\cdot 3\cdot 2a\cdot 2c=24abc=\text{右}.
\end{aligned}$$

$$\therefore\quad (a+b+c)^3+(b-a-c)^3+(c-a-b)^3+(a-b-c)^3=24abc.$$

例 4. 证明：$\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}=(\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a})^2$

分析：从右向左推演比较方便

证明：

$$\begin{aligned}
\text{右}&=(\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a})^2\\
&=\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}+2[\frac{1}{(a-b)(b-c)}+\\
&\quad\frac{1}{(b-c)(c-a)}+\frac{1}{(c-a)(a-b)}]
\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}+$$

$$2\left[\frac{(c-a)+(a-b)+(b-c)}{(a-b)(b-c)(c-a)}\right]$$

$$=\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}=\text{右}.$$

$$\therefore\quad \frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}=\left(\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}\right)^2.$$

例 5.证明恒等式:

$$\sqrt{2}(2a+\sqrt{a^2-b^2})\sqrt{a-\sqrt{a^2-b^2}}$$

$=(a+b)\sqrt{a+b}-(a-b)\sqrt{a-b}$,其中 $a>b>0$.

证明:左$=\sqrt{2}(2a+\sqrt{a^2-b^2})\sqrt{a-\sqrt{a^2-b^2}}$

$$=\sqrt{2a-2\sqrt{a^2-b^2}}(2a+\sqrt{a^2-b^2})$$

$$=\sqrt{(a+b)+(a-b)-2\sqrt{a^2-b^2}}[(a+b)+(a-b)+\sqrt{(a+b)(a-b)}]$$

$$=\sqrt{(\sqrt{a+b})^2-2\sqrt{(a+b)(a-b)}+(\sqrt{(a-b)})^2}\cdot[(\sqrt{a-b})^2+\sqrt{(a+b)(a-b)}+(\sqrt{a-b})^2]$$

$$=\sqrt{(\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b})^2}[(\sqrt{a+b})^2+\sqrt{(a+b)(a-b)}+(\sqrt{a-b})^2]$$

$$=\sqrt{(\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b})}[\sqrt{a+b})^2+\sqrt{(a+b)(a-b)}+(\sqrt{a-b})^2]$$

$$=(\sqrt{a+b})^3-(\sqrt{a-b})^3$$

$$=(a+b)\sqrt{a+b}-(a-b)\sqrt{a-b}=\text{右}.$$

$$\therefore\quad \sqrt{2}(2a+\sqrt{a^2-b^2})\sqrt{a-\sqrt{a^2-b^2}}=(a+b)\sqrt{a+b}-(a-b)\sqrt{a-b}.$$

例 6. 求证：$\frac{b-c}{(a-b)(a-c)}+\frac{c-a}{(b-c)(b-a)}+\frac{a-c}{(c-a)(c-b)}$

$$=\frac{2}{a-b}+\frac{2}{b-c}+\frac{2}{c-a}.$$

分析：如果将该式左边直接通分后相加，运算较繁，可先对左端的一个分式进行变形

证明：由 $b-c=(a-c)-(a-b)$

所以 $\frac{b-c}{(a-b)(a-c)}=\frac{(a-c)-(a-b)}{(a-b)(a-c)}=\frac{1}{a-b}-\frac{1}{b-c}.$

同理可得：$\frac{c-a}{(b-c)(b-a)}=\frac{1}{b-c}-\frac{1}{b-a}.$

$$\frac{a-b}{(c-a)(c-b)}=\frac{1}{c-a}+\frac{1}{c-b}.$$

所以：左 $=(\frac{1}{a-b}-\frac{1}{a-c})+(\frac{1}{b-c}-\frac{1}{b-a})+(\frac{1}{c-a}-\frac{1}{c-b})$

$$=\frac{1}{a-b}+\frac{1}{c-a}+\frac{1}{b-c}+\frac{1}{a-b}+\frac{1}{c-a}+\frac{1}{b-c}$$

$$=\frac{2}{a-b}+\frac{2}{b-c}+\frac{2}{c-a}=\text{右}.$$

所以：所证的恒等式成立.

习题 7.1

1. 证明恒等式

$a+b(1+a)+c(1+a)(1+b)+d(1+a)(1+b)(1+c)$

$=(1+a)(1+b)(1+c)(1+d)-1.$

2. 证明恒等式

$(a+b)^2-(c+d)^2+(a+c)^2-(b+d)^2$

$=2(a-d)(a+b+c+d).$

3. 证明恒等式

$(a^2+b^2)(ab+cd)-ab(a^2+b^2-c^2-d^2)$

$=(ac+bd)(ad+bc)$.

4. 证明恒等式

$$(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3=3(a+b)(b+c)(a+c).$$

5. 证明恒等式

$$2(a-b)(a-c)+2(b-c)(b-a)+2(c-a)(c-b)$$
$$=(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2.$$

6. 证明

$$\frac{x}{ax-a^2}+\frac{y}{ay-a^2}+\frac{z}{az-a^2}=\frac{1}{x-a}+\frac{1}{y-a}+\frac{1}{z-a}+\frac{3}{a}.$$

7. 证明$\dfrac{ac+ax+bx+bc}{ay+2bx+2ax+by}=\dfrac{x+c}{2x+y}$.

§7.2 条件等式的证明

代数条件等式，是在字母满足一定约束条件下成立的等式．比如，由 $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$，当 $a+b+c=0$ 时，成立 $a^3+b^3+c^3-3abc=0$，于是就可以编拟出问题，"若 $a+b+c=0$，求证：$a^3+b^3+c^3=3abc$"，这就是代数条件等式的证明问题，其证明关键，在于找出条件与结论之间的联系，主要途径是灵活运用恒等变形.

例 1. 已知 a,b,c,d 适合 $a+b=c+d$ 且 $a^3+b^3=c^3+d^3$.

求证：$a^{2003}+b^{2003}=e^{2003}+d^{2003}$.

证明：由 $a+b=c+d$ ①

及 $a^3+b^3=c^3+d^3$ ②

〈1〉若 $a+b=0$，则 $c+d=0$，此时 $a=-b,c=-d$

当然 $a^{2003}+b^{2003}=0,c^{2003}+d^{2003}=0$

显然成立 $a^{2003}+b^{2003}=c^{2003}+d^{2003}$.

〈2〉若 $a+b\neq0$，

①两边立方后减去②式可得

$ab(a+b)=cd(c+d)$

由 $a+b\neq 0$ 知 $c+d\neq 0$

所以 $ab=cd$

从而 $(a-b)^2=(a+b)^2-4ab$

$=(c+d)^2-4cd=(c-d)^2$

于是 $a-b=c-d$　③

或 $a-b=d-c$　④

由①,③联立可得　$a=c,b=d$

式由①,④联立可得　$a=d,b=c$

总之 $a^{2003}+b^{2003}=c^{2003}+d^{2003}$ 成立.

综合〈1〉〈2〉问题得证.

说明:事实上,可以证明更一般的命题

已知 a,b,c,d 适合 $a+b=c+d$ 且 $a^3+b^3=c^3+d^3$,n 为正整数.

求证:$a^{2n+1}+b^{2n+1}=c^{2n+1}+d^{2n+1}$.

例 2. 如果 $a+b+c=0$,

求证:$2(a^4+b^4+c^4)=(a^2+b^2+c^2)^2$.

证明:由 $a+b+c=0$ 得 $a+b=-c$,于是 $(a+b)^2=c^2$

则　$2(a^4+b^4+c^4)=2[a^4+b^4+(a+b)^4]$

$=2[(a^2+b^2)^2-2a^2b^2+(a+b)^4]$

$=2\{[(a+b)^2-2ab]^2-2a^2b^2+(a+b)^4\}$

$=2\{(a+b)^4-4ab(a+b)^2+4a^2b^2-2a^2b^2+(a+b)^4\}$

$=2\{2(a+b)^4-4ab(a+b)^2+2a^2b^2\}$

$=4\{[(a+b)^2-ab]^2\}=4[a^2+b^2+ab]^2$

$=4\left(\dfrac{2a^2+2b^2+2ab}{2}\right)^2=(2a^2+2b^2+2ab)^2$

$=(a^2+b^2+(a^2+2ab+b^2))^2=[a^2+b^2+(a+b)^2]^2$

$=(a^2+b^2+c^2)^2$.

问题得证.

例 3. 已知$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}(abc\neq0,a+b+c\neq0)$

求证：$\frac{1}{a^{2n+1}}+\frac{1}{b^{2n+1}}+\frac{1}{c^{2n+1}}=\frac{1}{a^{2n+1}+b^{2n+1}+c^{2n+1}}$

其中，n 是正整数.

分析：所给条件不能直接代入计算，应从化简条件入手，确定 a,b,c 之间更为本质的联系，然后再进行证明：

证明：由已知条件$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$，去分母得

$$bc(a+b+c)+ac(a+b+c)+ab(a+b+c)=abc$$

即 $(a+b+c)(bc+ac)+ab(a+b)=0$

$$(a+b)[c(a+b+c)+ab]=0$$

所以$(a+b)[c^2+(a+b)c+ab]=0$

$$(a+b)(b+c)(c+a)=0$$

因此，$a+b,b+c,c+a$ 中至少有一个为零，为确定起见，不妨设 $a+b=0$ 也即 $a=-b$，代入求证的式子中，

左边$=\frac{1}{(-b)^{2n+1}}+\frac{1}{b^{2n+1}}+\frac{1}{c^{2n+1}}=\frac{1}{c^{2n+1}}$，

右边$=\frac{1}{(-b)^{2n+1}+b^{2n+1}+c^{2n+1}}=\frac{1}{c^{2n+1}}$

由于左边＝右边，

所以$\frac{1}{a^{2n+1}}+\frac{1}{b^{2n+1}}+\frac{1}{c^{2n+1}}=\frac{1}{a^{2n+1}+b^{2n+1}+c^{2n+1}}$成立.

例 4. 如果正数 a,b,c 满足 $a+c=2b$.

求证：$\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}=\frac{2}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}$.

证明：已知 $2b=a+c$，则有 $a-b=b-c$

$$\frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}-\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})-(\sqrt{c}+\sqrt{a})}{(\sqrt{c}+\sqrt{a})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}$$

$$=\frac{\sqrt{b}-\sqrt{c}}{(\sqrt{c}+\sqrt{a})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}$$

$$=\frac{b-c}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{b}+\sqrt{c})(\sqrt{c}+\sqrt{a})} \qquad ①$$

$$\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}-\frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}=\frac{(\sqrt{c}+\sqrt{a})-(\sqrt{b}+\sqrt{c})}{(\sqrt{b}+\sqrt{c})(\sqrt{c}+\sqrt{a})}$$

$$=\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{(\sqrt{b}+\sqrt{c})(\sqrt{c}+\sqrt{a})}$$

$$\frac{a-b}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{b}+\sqrt{c})(\sqrt{c}+\sqrt{a})} \qquad ②$$

由于 $a-b=b-c$，比较①，②可得

$$\frac{b-c}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{b}+\sqrt{c})(\sqrt{c}+\sqrt{a})}=\frac{a-b}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{b}+\sqrt{c})(\sqrt{c}+\sqrt{a})}$$

所以 $\frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}-\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}-\frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}$.

即　$\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}=\frac{2}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}$.

例 5. 已知 $\frac{b^2+bx+x^2}{a^2+ay+y^2}=\frac{b^2-bx+x^2}{a^2-ay+y^2}$，求证 $xy=ab$ 或 $\frac{x}{b}=\frac{y}{a}$.

分析：求证的结论等价于 $(\frac{x}{a}-\frac{b}{y})(\frac{x}{b}-\frac{y}{a})=0$.

证明：由条件 $\frac{b^2+bx+x^2}{b^2+ay+y^2}=\frac{b^2-bx+x^2}{b^2-ay+y^2}$，利用等比定理可得

$$\frac{(b^2+bx+x^2)+(b^2-bx+x^2)}{(a^2+ay+y^2)+(a^2-ay+y^2)}=\frac{(b^2+bx+x^2)-(b^2-bx+x^2)}{(a^2+ay+y^2)-(a^2-ay+y^2)}$$

所以 $\frac{b^2+x^2}{a^2+y^2}=\frac{bx}{ay}$.

即　$ab^2y+ax^2y=a^2bx+bxy^2$

$ax^2y-bxy^2=a^2bx-ab^2y$

$xy(ax-by)-ab(ax-by)=0$.

$(xy-ab)(ax-by)=0$.

要么 $xy-ab=0$，$\Rightarrow xy=ab$ 或者 $ax-by=0\Rightarrow\frac{x}{b}=\frac{y}{a}$.

例 6. 如果 $ab+bc+ac=1$，且 $a\neq\pm1, b\neq\pm1, c\neq\pm1$.

求证：$\dfrac{a}{1-a^2}+\dfrac{b}{1-b^2}+\dfrac{c}{1-c^2}=\dfrac{4abc}{(1-a^2)(1-b^2)(1-c^2)}$

证明：

$$左=\frac{a}{1-a^2}+\frac{b}{1-b^2}+\frac{c}{1-c^2}$$

$$=\frac{a(1-b^2)(1-c^2)+b(1-c^2)(1-a^2)+c(1-a^2)(1-b^2)}{(1-a^2)(1-b^2)(1-c^2)}$$

设上式分母为 B，分子为 A，则

$B=(1-a^2)(1-b^2)(1-c^2)$

$$\begin{aligned}A&=a(1-b^2)(1-c^2)+b(1-c^2)(1-a^2)+c(1-a^2)(1-b^2)\\&=a(1-b^2-c^2+b^2c^2)+b(1-c^2-a^2+c^2a^2)+c(1-a^2-b^2+a^2b^2)\\&=a-ab^2-ac^2+ab^2c^2+b-bc^2-ba^2+bc^2a^2+c-ca^2-cb^2-ca^2b^2\\&=(a-a^2b-a^2c)+(b-b^2c-b^2a)+(c-c^2a-c^2b)+(ab^2c^2+a^2bc^2+a^2b^2c)\\&=a(1-ab-ac)+b(1-bc-ba)+c(1-ca-cb)+abc(bc+ca+ab)（注意条件：ab+bc+ca=1）\\&=a(bc)+b(ca)+c(ab)+abc\cdot1=4abc\end{aligned}$$

所以

$$左=\frac{a}{1-a^2}+\frac{b}{1-b^2}+\frac{c}{1-c^2}$$

$$=\frac{a(1-b^2)(1-c^2)+b(1-c^2)(1-a^2)+c(1-a^2)(1-b^2)}{(1-a^2)(1-b^2)(1-c^2)}$$

$$=\frac{A}{B}=\frac{4abc}{(1-a^2)(1-b^2)(1-c^2)}=右边.$$

因此得证

$$\frac{a}{1-a^2}+\frac{b}{1-b^2}+\frac{c}{1-c^2}=\frac{4abc}{(1-a^2)(1-b^2)(1-c^2)}.$$

说明：在证明过程中，利用了条件 $ab+bc+ac=1$ 及其等价变形 $1-ab-ac=bc$，$1-bc-ab=ac$，$1-ac-bc=ab$.

证明恒等式或条件等式，已知条件清楚，结论目标明确，关键在于寻求已知到结论之间的逻辑通路，作适当的这类习题对提高代数推演能力是有益的.

习题 7.2

1. 已知 $a+b+c=0$，

求证 $a(\frac{1}{b}+\frac{1}{c})+b(\frac{1}{c}+\frac{1}{a})+c(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})=-3$.

2. 已知 $(c-a)^2+4(a-b)(b-c)=0$，

求证：$2b=a+c$.

3. 已知 $\frac{a-b}{x}=\frac{b-c}{y}=\frac{c-a}{z}$，且 a,b,c 互不相等.

求证：$x+y+z=0$.

4. 已知 $abc=1$，求证 $\frac{a}{ab+a+1}+\frac{b}{bc+b+1}+\frac{c}{ca+c+1}=1$.

5. 已知 $\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}=0$，

求证：$\frac{a}{(b-c)^2}+\frac{b}{(c-a)^2}+\frac{c}{(a-b)^2}=0$.

6. 已知 $a+b+c=0$

求证：$\frac{a^5+b^5+c^5}{5}=\left(\frac{a^3+b^3+c^3}{3}\right)\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{2}\right)$.

7. 若 $x+y=a+b$ 且 $x^2+y^2=a^2+b^2$，

求证 $x^{1997}+y^{1997}=a^{1997}+b^{1997}$.

§7.3　代数式的化简与求值

求一个代数式当 $x=a$ 时的值，只要把 $x=a$ 代入代数式进

行运算即可，有时也可将代数式先进行恒等变形与化简，最后再代入求值，往往会比较简便，由于代数式的化简，求值，结果并未事先给出，所以较恒等式证明更具探索性和技巧性．

例 1. 实数 a 与 b 满足 $\dfrac{a^2b^2}{a^4-2b^2}=1$. 求 $\dfrac{a^2-b^2}{19a^2+96b^2}$ 的值.

解：由 $\dfrac{a^2b^2}{a^4-2b^4}=1$，知 a,b 均不能为 0.

该式等价于 $a^2b^2=a^4-2b^4$，即　$(a^2)^2-a^2b^2-2(b^2)^2=0$

$(a^2+b^2)(a^2-2b^2)=0$　（ * ）

$\because$　$a\neq0,b\neq0,\therefore a^2+b^2>0$.

由（ * ）式知只能 $a^2-2b^2=0$，即 $a^2=2b^2$.

$$\therefore\quad \frac{a^2-b^2}{19a^2+96b^2}=\frac{2b^2-b^2}{19\times(2b^2)+96\times b^2}$$

$$=\frac{b^2}{38b^2+96b^2}=\frac{b^2}{134b^2}=\frac{1}{134}.$$

例 2. 已知 $a-b=5$ 且 $c-b=10$，求 $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$ 的值.

解：由于 $c-a=(c-b)-(a-b)=10-5=5$

所以 $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$

$$=\frac{1}{2}[2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca]$$

$$=\frac{1}{2}[(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(c^2-2ca+a^2)]$$

$$=\frac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]$$

$$=\frac{1}{2}[5^2+10^2+5^2]=75.$$

例 3. 已知 $a+\dfrac{1}{a+1}=b+\dfrac{1}{b-1}-2$ 且 $a-b+2\neq0$

试求 $ab-a+b$ 之值.

解：$a+\dfrac{1}{a+1}=b+\dfrac{1}{b-1}-2$ 可化为

$$(a+1)-(b-1)=\frac{(a+1)-(b-1)}{(a+1)(b-1)}$$

即　$a-b+2=\dfrac{a-b+2}{ab-a+b-1}$

由于 $a-b+2\neq 0$，所以 $ab-a+b-1=1$.

即　$ab-a+b=2$.

例 4. 设正数 x,y 满足 $x+4y+4\sqrt{xy}-2\sqrt{x}-4\sqrt{y}=3$.

计算$\dfrac{\sqrt{x}+2\sqrt{y}}{\sqrt{x}+2\sqrt{y}+1}$的值.

解：由于　$x+4y+4\sqrt{xy}-2\sqrt{x}-4\sqrt{y}-3$

$$=(x+4\sqrt{xy}+4y)-(2\sqrt{x}+4\sqrt{y})-3$$

$$=(\sqrt{x}+2\sqrt{y})^2+2(\sqrt{x}+2\sqrt{y})-3$$

$$=(\sqrt{x}+2\sqrt{y}+1)(\sqrt{x}+2\sqrt{y}-3)$$

由已知条件得：

$(\sqrt{x}+2\sqrt{y}+1)(\sqrt{x}+2\sqrt{y}-3)=0$

由于 $x>0,y>0,\sqrt{x}+2\sqrt{y}+1>0$，

∴　$\sqrt{x}+2\sqrt{y}-3=0$，即$\sqrt{x}+2\sqrt{y}=3$.

因此　$\dfrac{\sqrt{x}+2\sqrt{y}}{\sqrt{x}+2\sqrt{y}+1}=\dfrac{3}{4}$.

例 5. 已知 $xyz=1,x+y+z=2,x^2+y^2+z^2=16$，

求$\dfrac{1}{xy+2z}+\dfrac{1}{yz+2x}+\dfrac{1}{zx+2y}$的值.

分析：本题不能直接代入，首先应从已知 $x+y+z=2,xyz=1$ 及 $x^2+y^2+z^2=16$，进一步推出一些 x,y,z 之间的关系式，然后再代入分式化简.

解：因为 $x+y+z=2$，两边平方得 $x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx=4$，而 $x^2+y^2+z^2=16$，所以 $xy+yz+zx=-6$.

又由 $x+y+z=2$ 得 $z=2-x-y$，

所以$\frac{1}{yx+2x}=\frac{1}{xy+4-2x-2y}=\frac{1}{(x-2)(y-2)}$,

同理可得:

$\frac{1}{yz+2x}=\frac{1}{(y-2)(z-2)}$,$\frac{1}{zx+2y}=\frac{1}{(z-2)(x-2)}$,

所以

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{xy+2z}+\frac{1}{yz+2x}+\frac{1}{zx+2y}\\
&=\frac{1}{(x-2)(y-2)}+\frac{1}{(y-2)(z-2)}+\frac{1}{(z-2)(x-2)}\\
&=\frac{(z-2)+(x-2)+(y-2)}{(x-2)(y-2)(z-2)}\\
&=\frac{x+y+z-6}{(x-2)(y-2)(z-2)}\\
&=\frac{x+y+z-6}{xyz-2(xy+yz+zx)+4(x+y+z)-8}\\
&=\frac{2-6}{1+12+8-8}=-\frac{4}{13}.
\end{aligned}$$

例 6. 若 $f(x)=(2x^5+2x^4-53x^2-57x+54)^{2004}$

求 $f(\frac{\sqrt{111}-1}{2})$的值.

分析:将 $x=\frac{\sqrt{111}-1}{2}$直接代入 $f(x)$,运算很繁,所以要另辟蹊径.

解:设 $x=\frac{\sqrt{111}-1}{2}$,则 $2x+1=\sqrt{111}$,即$(2x+1)^2=111$.

展开化简得:$2x^2+2x-55=0$.

即 $\frac{\sqrt{111}-1}{2}$是 $2x^2-2x-55=0$ 的根.将 $f(x)$恒等变形,得

$f(x)=[(2x^2+2x-55)(x^3+x-1)-1]^{2004}$

所以 $f(\frac{\sqrt{111}-1}{2})=(-1)^{2004}=1$.

总之，代数式的化简求值，技巧因题而异，总的原则是先化简，再代入求值.

习题 7.3

1. 已知$\dfrac{1}{2001-\dfrac{x}{x-1}}=\dfrac{1}{2001}$，求$\dfrac{x^3-2001}{x^4+29}$的值.

2. 已知 $a^2+b^2=6ab$ 且 $a>b>0$，求$\dfrac{a+b}{a-b}$的值.

3. 已知实数 x,y 满足方程组$\begin{cases}x+xy+y=2+3\sqrt{2}\\x^2+y^2=6\end{cases}$

求$|x+y+1|$的值.

4. 实数 a,b,x,y 满足 $y+|\sqrt{x}-\sqrt{3}|=1-a^2$，$|x-3|=y-1-b^2$，求 $2^{x+y}+2^{a-b}$之值.

5. 实数 x,y 满足

$(\sqrt{x^2+1997}-x)(\sqrt{y^2+1997}-y)=1997$，

求 $100^{10x}\cdot 100^{10y}$的值.

6. 若 $1<a<2$，$b=\dfrac{\sqrt{\dfrac{2-a}{a}}+\sqrt{\dfrac{a}{2-a}}}{\sqrt{\dfrac{2-a}{a}}-\sqrt{\dfrac{a}{2-a}}}$，求 $b(a-1)$的值.

7. 正数 a,b,c 满足 $ab+a+b=bc+b+c=ca+c+a=3$.
求$(a+1)(b+1)(c+1)$的值.

8. 若$\dfrac{a}{b}=\sqrt{5}$，求$\dfrac{a^2+ab+2b^2}{a^2+ab+b^2}$之值.

第 8 章　一元一次不等式

含有“>”,“<”,“≥”“≤”或“≠”符号的式子叫做不等式．其中“>”是“大于”,“<”是“小于”,“≥”是“不小于”,“≤”是“不大于”,“≠”是“不等”,这些符号统称不等号．

从形式上看,将数或式用不等号连结就组成不等式．如 $a^2<-5$,$-3<3$,$5>10x$ 等都是不等式,但仔细分析,这些不等式中文字允许值范围是有区别的;$a^2<-5$. 对任意实数均不成立．这样的不等式称为矛盾不等式,象 $-3<7$ 则是绝对不等式．$5>10x$只在 $x<\frac{1}{2}$的条件下成立,称为条件不等式,即对不等式可进行如下分类:

$$\text{不等式}\begin{cases}\text{绝对不等式}\\\text{矛盾不等式}\\\text{条件不等式}\end{cases}$$

对绝对不等式,涉及的多是证明题,对条件不等式,涉及的多是解不等式,为了学习这些内容,必须掌握不等式的三条基本性质．

性质 1　不等式两边都加(或减去)同一个数或同一个整式,不等号的方向不变．

性质 2　不等式两边都乘以(或除以)同一个正数,不等号的方向不变．

性质 3　不等式两边都乘以(或除以)同一个负数,不等号的方向改变．

§8.1　比大小

给两个数或式比大小，能够很好地训练观察力和计算能力．要依据下面的基本途径．

Ⅰ．要证 $A \geqslant B$，必须且只须证 $A-B \geqslant 0$.

Ⅱ．若 $A>0, B>0$，要证 $A \geqslant B$ 只须证 $\frac{A}{B} \geqslant 1$.

Ⅲ．若 $A \geqslant B$，且 $B \geqslant C$，则有 $A \geqslant C$，因此，要证 $A \geqslant C$，只须找到一个 B，使得 $A \geqslant B$ 且 $B \geqslant C$ 成立．

Ⅳ．对于正负数的比较，正数大于 0 和负数；两个负数绝对值小的其值较大，绝对值大的其值较小．

例 1. 比较 $\frac{19941979}{19941995}$ 与 $\frac{19941980}{19941996}$ 的大小．

解：设 $a=19941995$，$b=19941979$，显然 $a>b>0$，

则 $\frac{19941979}{19941995}=\frac{b}{a}$，$\frac{19941980}{19941996}=\frac{b+1}{a+1}$

由于 $\frac{b}{a}-\frac{b+1}{a+1}$

$$=\frac{b(a+1)-a(b+1)}{a(a+1)}$$

$$=\frac{ab+b-ab-a}{a(a+1)}$$

$$=\frac{b-a}{a(a+1)}<0.$$

所以 $\frac{b}{a}<\frac{b+1}{a+1}$.

即 $$\frac{19941979}{19941995}<\frac{19941980}{19941996}.$$

说明：一般情况下，a, b 都是正数数，$a>b$，此时 $\frac{b}{a}$ 是一个真

分数，例 1 已经证明：

$$\frac{b}{a}<\frac{b+1}{a+1}$$

表明一个正的真分数的分子分母同时加 1 所得的新的真分数其值大于原来的那个真分数．

证明途径采用Ⅰ，“作差比较法”．

例 2．比较 3^{303} 与 2^{454} 的大小．

解：这是两个正整数方幂比大小的问题．我们利用途径Ⅱ去作较为有利．

$$\frac{3^{303}}{2^{454}}=\frac{3^{302}\cdot 3}{2^{453}\cdot 2}=\frac{(3^2)^{151}}{(2^3)^{151}}\cdot\frac{3}{2}$$

$$=(\frac{9}{8})^{151}\cdot\frac{3}{2}>1$$

$\therefore\quad 3^{303}>2^{454}$.

例 3．试比较 31^{11} 与 17^{14} 哪个较大？

分析：17 与 $2^4=16$ 接近，31 与 $2^5=32$ 接近，因此，设法找一个 2 的方幂为中介去进行比较为宜．

解：$17^{14}>16^{14}=2^{56}$

$31^{11}<32^{11}=2^{55}<2^{56}$.

$\therefore\quad 17^{14}>31^{11}$.

说明：本题中 2^{56} 就是基本途径Ⅲ中的“B”，本题实际上是按基本途径Ⅲ去解决的．

例 4．四个互不相等的正数，a,b,c,d 中，a 最大，d 最小，且 $\frac{a}{b}\geqslant\frac{c}{d}$.

试确定 $a+d$ 与 $b+c$ 的大小关系．

解：因为 $a>0,b>0,c>0,d>0$ 且 a 最大，d 最小，因此 $a>b,a>c,a>d,b>d,c>d$.

由 $\frac{a}{b}\geqslant\frac{c}{d}$

有　$\frac{a}{b}-1\geqslant\frac{c}{d}-1$　（性质 1）

即　$\frac{a-b}{b}\geqslant\frac{c-d}{d}$

$\therefore$　$\frac{a-b}{c-d}\geqslant\frac{b}{d}$.　（性质 2）

因为 $b>d>0\Rightarrow\frac{b}{d}>1$

所以$\frac{a-b}{c-d}\geqslant\frac{b}{d}>1$，即 $a-b>c-d$，

因此有 $a+d>b+c$.

答：$a+d$ 与 $b+c$ 的大小关系是 $a+d>b+c$.

例 5. **证明**：$\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\cdots\times\frac{97}{98}\times\frac{99}{100}<\frac{1}{10}$.

证明：设$A=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\cdots\times\frac{97}{98}\times\frac{99}{100}$

$B=\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}\times\frac{6}{7}\times\cdots\times\frac{96}{97}\times\frac{98}{99}$

因为$\frac{2}{3}>\frac{1}{2}$，$\frac{4}{5}>\frac{3}{4}$，$\frac{6}{7}>\frac{5}{6}$，…，$\frac{98}{99}>\frac{97}{98}$，$1=\frac{100}{100}>\frac{99}{100}$，

相乘可知　$B>A$. 于是

$A\times B=\left(\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\cdots\times\frac{97}{98}\times\frac{98}{100}\times\frac{99}{100}\right)\times\left(\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}\times\frac{6}{7}\times\cdots\times\frac{96}{97}\times\frac{98}{99}\right)=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\frac{4}{5}\times\cdots\times\frac{97}{98}\times\frac{99}{100}=\frac{1}{100}$.

由 $A<B$ 可得 $A^2<\frac{1}{100}$.

所以 $A<\frac{1}{10}$.

即　$\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\cdots\times\frac{97}{98}\times\frac{99}{100}<\frac{1}{10}$.

例 6. 给定正数 $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{99}, a_{100}$ 且已知 $a_1 > a_0$，$a_2 = 3a_1 - 2a_0$，$a_3 = 3a_2 - 2a_1$，……，$a_{100} = 3a_{99} - 2a_{98}$.

求证：$a_{100} > 2^{99}$.

证明：由 $a_1 > a_0$，且 a_0, a_1 均为正整数.

所以有 $a_1 - a_0 \geqslant 1$

由 $a_2 = 3a_1 - 2a_0$ 得

$$a_2 - a_1 = 2(a_1 - a_0) \quad ①$$

由 $a_3 = 3a_2 - 2a_1$ 得

$$a_3 - a_2 = 2(a_2 - a_1) \quad ②$$

同理可得

$$a_4 - a_3 = 2(a_3 - a_2) \quad ③$$

$$a_5 - a_4 = 2(a_4 - a_3) \quad ④$$

……

$$a_{99} - a_{98} = 2(a_{98} - a_{97}) \quad ⑱$$

$$a_{100} - a_{99} = 2(a_{99} - a_{98}) \quad ⑲$$

①×②×…×⑱×⑲得

$$a_{100} - a_{99} = 2^{99}(a_1 - a_0) \geqslant 2^{99}$$

$\therefore a_{100} \geqslant a_{99} + 2^{99} > 2^{99}$.

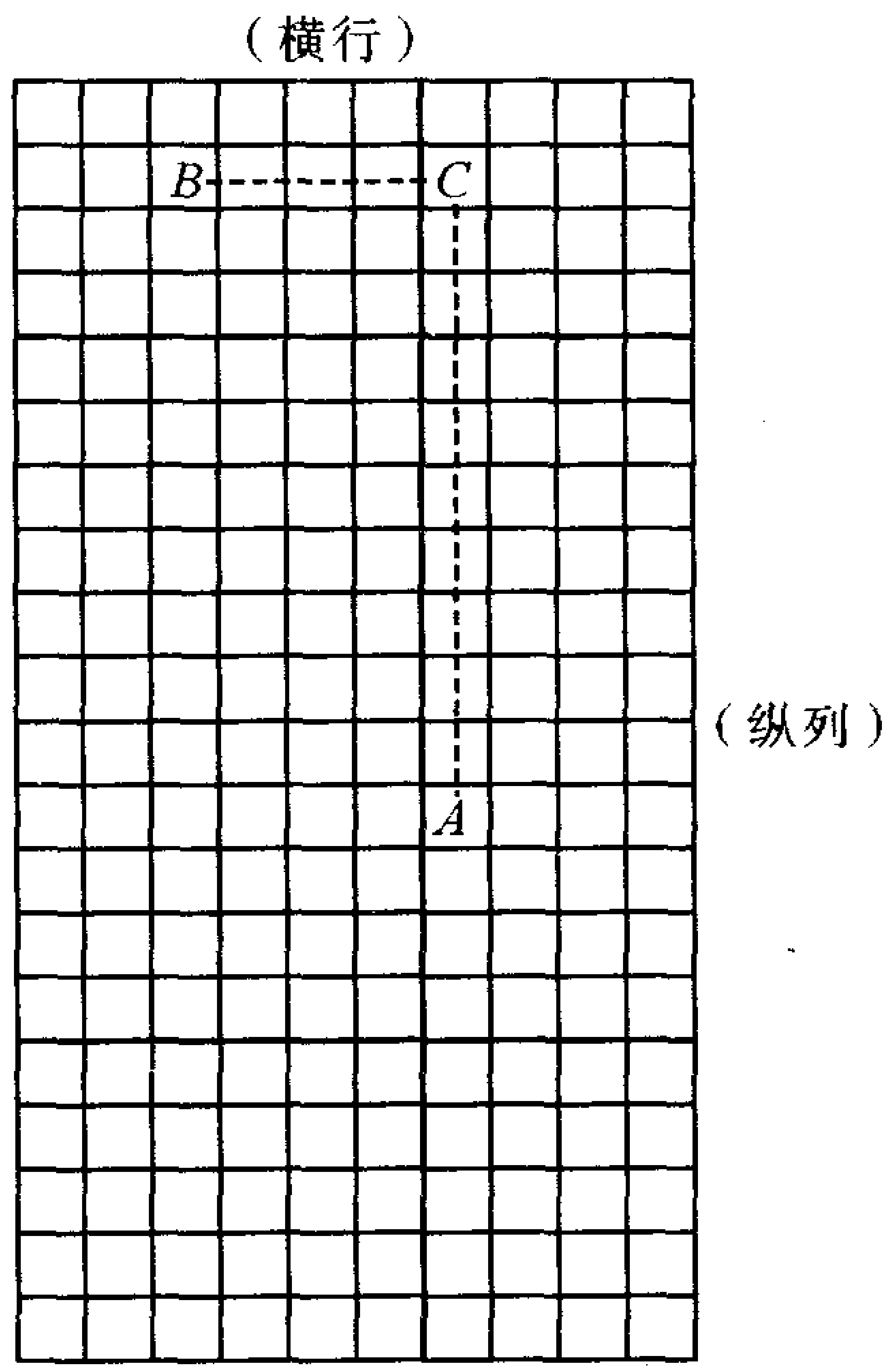
例 7. 由 200 个学生排成一个矩形方阵，每一横行 10 个人，每一纵列 20 个人，在每一纵列里选一个身材最高的学生（如果同时最高有几个人，任选其一即可）. 然后从选取出的 10 个人取其中身高最矮的一个人为 A；另一方面，在每一横行里选取身材最矮的学生，然后从选出的 20 个矮子中取其中最高的一个人为 B.

求证：A 的身高 $\geqslant B$ 的身高.

证明：设学生 A 是从每一纵列中选出身材最高的 10 名学生中的最矮者，学生 B 是从每一横行中选出的身材最矮的学生中的最高者，这时找 A 所在列与 B 所在行交点处的学生 C，由 A 的选择知，A 的身高 $\geqslant C$ 的身高.

由 B 的选择知 C 的身高$\geqslant B$ 的身高.

因此,A 的身高$\geqslant B$ 的身高.



说明:例 7 的证明实质上是 $A\geqslant C, C\geqslant B\Rightarrow A\geqslant B$ 的一个应用.

习题 8.1

1. 下列各命题中正确的一个是(　)

(A)如果 $a<b$,那么 $a-b>0$.

(B)如果 $a<-b$,那么 $b+a>0$.

(C)如果 $a<b<0$,那么 $a^2-ab>0$.

(D)如果 $a>b$,那么 $5a-b>0$.

2. 已知 $a=3^{55}, b=4^{44}, c=5^{33}$,则有(　)

(A) $a<b<c$　　　(B) $c<b<a$

(C) $c<a<b$　　　(D) $a<c<b$

3. 试比较 $13^{13}\cdot 11^{11}$ 与 $13^{11}\cdot 11^{13}$ 的大小.

4. 比较 199119911991 与 11^{11} 的大小.

5. 比较 19^{91} 与 999991^{19} 的大小.

6. 求证:$0.099<\frac{1}{10^2}+\frac{1}{11^2}+\frac{1}{12^2}+\cdots+\frac{1}{999^2}+\frac{1}{1000^2}<0.111$.

§8.2 解一次不等式(组)

最简单的不等式,是只含一个未知数且次数是1,系数不等于0的不等式,叫做一元一次不等式,它的标准式是

$$ax+b<0 \quad 或 \quad ax+b>0 \qquad (a\neq 0)$$

显然,由 $ax+b<0$

有 $ax<-b$.

若 $a>0$,则 $x<-\frac{b}{a}$.

若 $a<0$,则 $x>-\frac{b}{a}$,

对 $ax+b>0$ 也可作类似的讨论. 因此,对一元一次不等式,首先要化简成为标准式,然后进行求解.

例 1. 解不等式

$$1+\frac{x}{2}+\frac{x}{4}+\frac{x}{8}+\frac{x}{16}>x.$$

解:由 $1+\frac{x}{2}+\frac{x}{4}+\frac{x}{8}+\frac{x}{16}>x$

得 $x-\frac{x}{2}-\frac{x}{4}-\frac{x}{8}-\frac{x}{16}<1$

得 $\frac{x}{16}<1$,即　$x<16$.

例 2. 满足$\frac{2+x}{2}\geqslant\frac{2x-1}{3}$的 x 值中，绝对值不超过 11 的那些整数之和等于多少？

解：由$\frac{2+x}{2}\geqslant\frac{2x-1}{3}$

去分母，得　$3(2+x)\geqslant 2(2x-1)$

去括号，得　$6+3x\geqslant 4x-2$

移项，得　$3x-4x\geqslant -2-6$

合并同类项$-x\geqslant -8$，于是 $x\leqslant 8$

其中绝对值不超过 11 的整数之和为

$(-9)+(-10)+(-11)=-30$.

例 3. 已知不等式 $3x-a\leqslant 0$ 的正整数解恰是 1,2,3.

求 a 的取值范围.

解：由 $3x-a\leqslant 0$，得 $x\leqslant\frac{a}{3}$.

由于 x 取整数解 1,2,3，表明 x 不小于 3 且 x 小于 4，可见 $3\leqslant\frac{a}{3}<4$，于是 $9\leqslant a<12$.

答：　a 的取值范围是 $9\leqslant a<12$.

例 4. 满足不等式$\frac{2+x}{2}\geqslant\frac{2x-1}{3}$的所有非负整数的乘积等于多少？

解 1：本题的直接不等式解见例 2，可求得 $x\leqslant 8$.

所以满足不等式$\frac{2+x}{2}\geqslant\frac{2x-1}{3}$的非负数解为 0,1,2,3,4,5,6,7,8. 这九个数的乘积为 0.

解 2：根据问题特点，以 0 代入不等式两边，左边为 1，右边为$-\frac{1}{3}$，显然 $1>-\frac{1}{3}$. 所以 0 是满足不等式$\frac{2+x}{2}\geqslant\frac{2x-1}{3}$的一个非负整数解，所以满足不等式$\frac{2+x}{2}\geqslant\frac{2x-1}{3}$的所有非负整数解的积

等于 0.

说明:例 2 及例 4 都源于代数第一册(下)第 66 页例 2. 在课本例题的基础上又有一定变化,这样可以训练思维的灵活性与知识的综合性. 许多“希望杯”数学邀请赛的试题都是这样编拟的.

例 5. 如果关于 x 的不等式 $(2a-b)x+a-5b>0$ 的解为 $x<\frac{10}{7}$.

问关于 x 的不等式 $ax>b$ 的解是什么?

解:由已知得

$$(2a-b)x>5b-a \qquad ①$$

它与 $-7x>-10$ ②

为同解不等式,比较,得

$$\begin{cases}2a-b=-7\\5b-a=-10\end{cases} \quad 解得 \begin{cases}a=-5\\b=-3\end{cases}$$

所以关于 x 的不等式 $-5x>-3$ 的解为 $x<\frac{3}{5}$.

对于一元一次不等式组,都可分别化为以下三种基本形式

(Ⅰ) $\begin{cases}x>a\\x>b\end{cases}(a>b)$ 其解为 $x>a$.

(Ⅱ) $\begin{cases}x<a\\x<b\end{cases}(a>b)$ 其解为 $x<b$.

(Ⅲ) $\begin{cases}x>a\\x<b\end{cases}(a>b)$ 无解.

(Ⅳ) $\begin{cases}x<a\\x>b\end{cases}(a>b)$ 其解为 $b<x<a$.

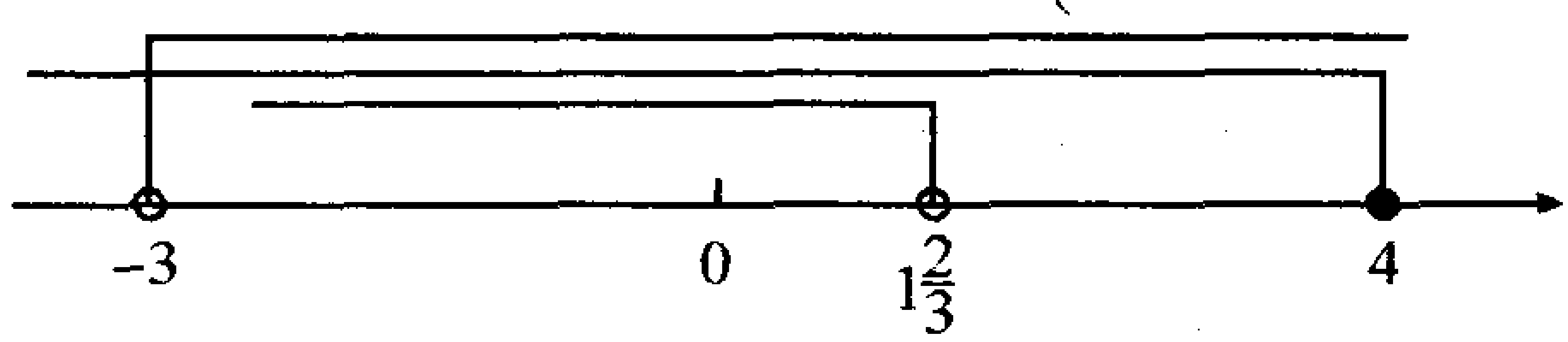
例 6. 求满足不等式组

$$\begin{cases}\dfrac{x-1}{2}-\dfrac{x}{3}+1>0\\4x-3\leqslant 5+2x\\2-\dfrac{5+x}{7}>1-\dfrac{1-x}{14}\end{cases}$$

的所有整数的和是多少?

解:原不等式组可化为

$$\begin{cases}3x-3-2x+6>0\\4x-3\leqslant 5+2x\\28-10-2x>14-1+x\end{cases}\quad 解之得\begin{cases}x>-3\\x\leqslant 4\\x<1\dfrac{2}{3}\end{cases}$$



故原不等式组的解是$-3<x<1\dfrac{2}{3}$.

其间的整数只有$-2,-1,0,1$.

其和为$(-2)+(-1)+0+1=-2$.

答:满足题设不等式组的所有整数之和为-2.

说明:解一次不等式组,在综合解的区间时,如我们所示的方法,利用数轴表示,即直观又准确,应该很好掌握.

例 7. 已知 x 满足

$$\frac{3x-1}{2}-\frac{7}{3}\geqslant x-\frac{5+2x}{3}$$

并且$|x-3|-|x+2|$的最大值为 p,最小值为 q,求 pq 之值.

解:由不等式$\dfrac{3x-1}{2}-\dfrac{7}{3}\geqslant x-\dfrac{5+2x}{3}$

解得 $x\geqslant 1$(解的过程自己补足)

下面对 $y=|x-3|-|x+2|$依 $1\leqslant x<3$ 和 $x\geqslant 3$ 进行讨论.

(1)当 $1\leqslant x<3$ 时,$x-3<0$,$x+2>0$,此时 $y=3-x-x-2=-2x+1$.

(2)当 $x\geqslant 3$ 时,$x-3\geqslant 0$,$x+2>0$,此时 $y=x-3-x-2=-5$,

所以当 $x=1$ 时,$|x-3|-|x+2|$ 取最大值 $p=-1$. 当 $x=3$ 时 $|x-3|-|x+2|$ 取最小值 $q=-5$.

所以 $pq=(-1)\times(-5)=5$.

说明:一元一次不等式及不等式组,掌握解法之后,其综合运用一般表现在求整数解,或求参数的取值范围. 也可以与解方程组或绝对值知识进行综合运用,这时分情况说明及分类讨论则是非常重要的手段.

习题 8.2

1. 解关于 x 的一次不等式:$a(x-1)>x-1$.

2. 解不等式组 $\begin{cases}2x-5>3-2x\\3x-6>4x-9.\end{cases}$

3. 求不等式组 $\begin{cases}3x-10>0\\\dfrac{16}{3}x-7<4x+3\end{cases}$ 的所有正整数解.

4. 解关于 x 的不等式:$ax>(a+b)(a-b)+bx$.

5. 求适合下列混合组的所有正整数解

$$\begin{cases}3x+2y-z=4\\2x-y+2x=8\\x+y+z<7.\end{cases}$$

§8.3 一次不等式的应用举例

在某些应用问题中,需要应用一次不等式估值,或者列出方程与一次不等式混合求解,作为课外活动内容应当有所引深.

例 1. 有甲、乙、丙、丁四位同学去林中采蘑菇,平均每人采得蘑菇的个数约是一个十位数字为 3 的两位数,又知甲采的数

量是乙的$\frac{4}{5}$，乙采的数量是丙的$\frac{3}{2}$倍，丁比甲多采了 3 个蘑菇．求每人各采了多少蘑菇？

解：设丙采蘑菇数为 x，依题意

乙采蘑菇数为$\frac{3}{2}x$，甲采蘑菇数为$\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{2}x=\frac{6}{5}x$.

丁采蘑菇数为$\frac{6}{5}x+3$.

四人合采蘑菇为

$$x+\frac{3}{2}x+\frac{6}{5}x+\frac{6}{5}x+3=\frac{49}{10}x+3$$

四人采蘑菇平均数为$\frac{1}{4}(\frac{49}{10}x+3)$，依题意这是一个近似为首位是 3 的两位整数，因此，由近似数的表示有：

$$29.5\leqslant\frac{1}{4}(\frac{49}{10}x+3)\leqslant 39.4$$

$$118\leqslant\frac{49}{10}x+3\leqslant 157.6$$

$$115\leqslant\frac{49}{10}x\leqslant 154.6$$

$$\frac{115\times 10}{49}\leqslant x\leqslant\frac{154.6\times 10}{49}$$

$$23.5\cdots\leqslant x\leqslant 31.5\cdots$$

因 x 是整数，x 只能从 24，25，26，27，28，29，30，31 中选取．

又$\frac{49}{10}x$ 必须是整数，x 是 10 的倍数，因此只能有 $x=30$，即丙采 30 个蘑菇，此时乙采 45 个蘑菇，甲采 36 个蘑菇，丁采 39 个蘑菇．

检验得，4 人采蘑菇平均为$\frac{150}{4}=37.5$，依四舍五入，约为

38 是个十位数是 3 的两位数.

例 2. 把若干个苹果分给几个孩子,如果每人分 3 个,则余 8 个;每人分给 5 个,则最后一人分得的数不足 5 个,问共有多少个孩子? 多少个苹果?

解:设有小孩 x 人,y 个苹果,由“每人分 3 个余 8 个”,可得 $y=3x+8$. 由“每人分 5 个,则最后一人分得的数不足 5 个”可列出不等式

$$5(x-1)<y<5x$$

于是 $\begin{cases}3x+8<5x\\3x+8>5(x-1)\end{cases}$

解之得 $4<x<6.5$.

所以小孩数是 5 或 6

当 $x=5$ 时,$y=3\times5+8=23$

当 $x=6$ 时,$y=3\times6+8=26$.

答:有 5 个孩子,23 个苹果,或 6 个孩子,26 个苹果.

例 3. 有一个四位数,它满足下述条件:

①个位上的数字的 2 倍与 2 的和小于十位上的数字的一半;

②个位上的数字与千位上的数字,十位上的数字与百位上的数字同时对调,所得的新四位数与原四位数相同;

③个位数字与十位数字之和等于 10.

求这个四位数.

解:由条件②可设这个四位数为 $\overline{xyyx}$(其中 x,y 为整数数码),且 $1\leqslant x\leqslant9,1\leqslant y\leqslant9$.

依题意,有

$$\begin{cases}x+y=10 & ①\\2x+2<\dfrac{y}{2} & ②\end{cases}$$

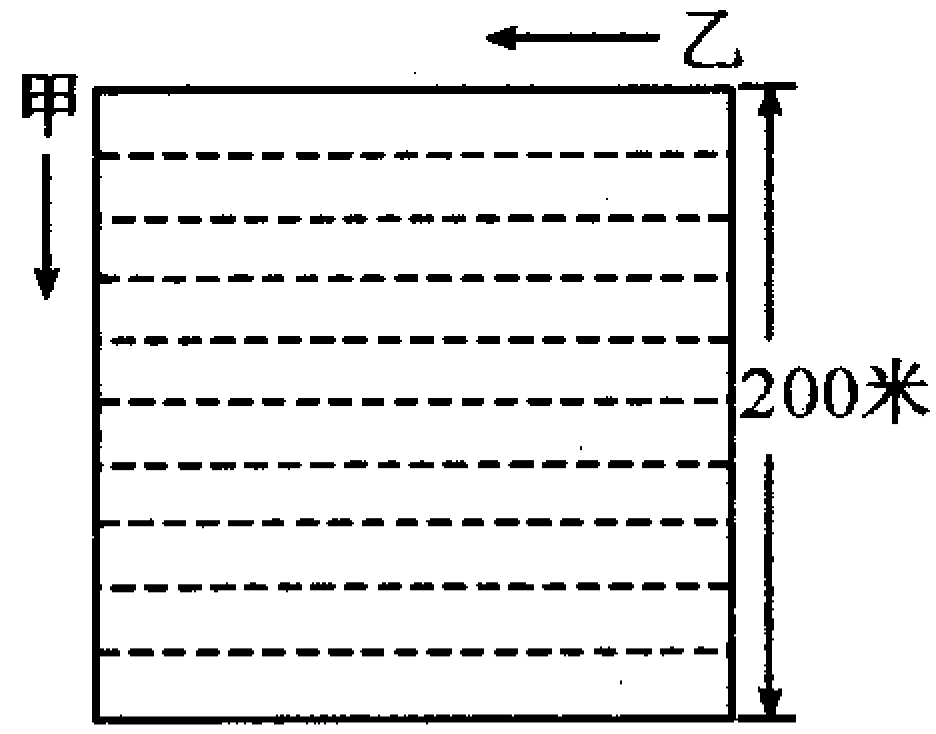
由①得,$y=10-x$ ③

以③代入②，得$\frac{10-x}{2}>2x+2$

即　$10-x>4x+4$，解得　$x<\frac{6}{5}$.

但 $1\leqslant x\leqslant 9$，x 是整数，可知 $x=1$，此时 $y=9$，所求四位数是 1991.

例 4. 如图，甲、乙两人在周长为 800 米的正方形水池相邻的两角上同时同向出发绕池边行走，乙在甲后，甲每分钟走 50 米，乙每分钟走 40 米，问甲乙两人自出发后经几分钟，才能初次在正方形水池的同一边上行走？



解：设甲、乙两人初次在同一边上时，乙已走了 x 条边，那么甲便走了$(x+3)$条边．

也就是甲走了 $200(x+3)$米，乙走了$\frac{200(x+3)}{50}\times 40$ 米．

要注意，当甲、乙同在一边时，乙所走的距离已超过了 $200x$ 米；又因为甲前乙后，甲若到了另一边的端点，乙肯定没到相邻的端点，所以乙走的距离又应小于 $200(x+1)$米．

所以列出不等式如下：

$200x<\frac{200(x+3)}{50}\times 40<200(x+1)$. 解之得　$7<x<12$.

因为要求初次在同一边上走的时间，所以应该选取满足 $7<x<12$的最小整数 $x=8$，这时需经过的时间为$\frac{200(8+3)}{50}=$ 44 分钟.

答：甲、乙两人自出发后经过 44 分钟，才能初次在正方形水池的同一边上行走．

习题 8.3

1. 小王有一个哥哥和一个弟弟，哥哥的年龄是 20 岁，小王的年龄的 2 倍加上他弟弟年龄的 5 倍等于 97，问小王和他弟弟的年龄各是多少？

2. 某次数学测验，共有 16 道选择题，评分办法是：答对一题得 6 分，答错一题扣 2 分，不答不给分．某学生有一题未答，那么这个学生至少答对多少道题，成绩才能在 60 分以上？

3. 货轮上卸下若干只箱子，其总重量为 10 吨，每只箱子的重量不超过 1 吨，为了保证能把这些箱子一次运走，问至少需要多少辆载重 3 吨的汽车？

4. 要使方程组（x,y 是未知数）$\begin{cases}x+y=p\\5x+3y=11\end{cases}$ 有正整数解，试确定 p 的值．

§8.4 简单的不等式证明

给出两个由文字与数字组成的式子，证明它们之间存在确定的不等关系，叫做证明不等式，比如 a、b 是任意实数，a^2+b^2 与 $2ab$ 是两个代数式，证明成立 $a^2+b^2\geqslant 2ab$ 就是证明不等式．

其实，如果想到，对任意实数 a,b，总成立 $(a-b)^2\geqslant 0$，

则 $a^2-2ab+b^2\geqslant 0$，进而得出 $a^2+b^2\geqslant 2ab$. 写出上述的过程就是这个不等式的证明. 这个证明过程是依据不等量公理，不等式的性质，代数式的恒等变形等知识依逻辑规则来实现的，当然，已被证明的不等式也可作为定理来引用．

例 1. 若 a,b 均为正数．求证：$\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}\geqslant 2$.

分析：要证$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geqslant 2$，

只须　$\frac{b^2+a^2}{ab}\geqslant 2$，（由于 $a>0,b>0,ab>0$）

只须　$a^2+b^2\geqslant 2ab$

只须　$(a-b)^2\geqslant 0$，这是基本事实，到此思路已经沟通，即可写出证明．

证明：a、b 均为实数，则有 $a^2+b^2\geqslant 2ab$

由于 $a>0,b>0$，所以 $ab>0$.

两边同除 ab　得$\frac{a^2+b^2}{ab}\geqslant 2$.

也就是$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geqslant 2$.

说明　①a、b 均为实数，$a^2+b^2\geqslant 2ab$ 是最基本的不等式，可以作为定理应用．

②例 1 的结论对 $a<0$ 且 $b<0$ 时，也是正确的，它表明一个正数与其倒数之和不小于 2.

例 2. 若 $a>0,b>0$，求证$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$.

分析：要证$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$

只须　$a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$

只须　$(a+b)^2\geqslant 4ab$

只须　$a^2+2ab+b^2\geqslant 4ab$

只须　$a^2+b^2\geqslant 2ab$.

这是基本的不等式，至此思路已经沟通，可以写出证明.

证明：因为 $a^2+b^2\geqslant 2ab$

所以 $a^2+2ab+b^2\geqslant 4ab$，即　$(a+b)^2\geqslant 4ab$.

由于 $a>0,b>0,ab>0$，所以两边开平方可得

$a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$，也就是$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$.

说明:本例的$\frac{a+b}{2}$称为 a,b 的算术平均数,$\sqrt{ab}$称为a,b的几何平均数,$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$表明两个正数的算术平均不小于它们的几何平均,这个结论也是非常重要的.

例 3. 对正数 a,b,c,求证 $a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ca$.

证明:对 a,b 而言,$a^2+b^2\geqslant 2ab$

对 b,c 而言　$b^2+c^2\geqslant 2bc$

对 c,a 而言　$c^2+a^2\geqslant 2ca$

相加得 $2(a^2+b^2+c^2)\geqslant 2(ab+bc+ca)$

所以 $a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ca$.

例 4. 求证:对任意实数 a,b,都有

$$\frac{5^{a+1}}{5^{2a}+25}\leqslant 13-5b+\frac{1}{2}b^2.$$

分析:左边的式子只与 a 有关,右边的式子只与 b 有关,可以单独考虑,若$\frac{5^{a+1}}{5^{2a}+25}\leqslant c$,而 $c\leqslant 13-5b+\frac{1}{2}b^2$,即可得证.

证明:由于$\frac{5^{a+1}}{5^{2a}+25}=\frac{5\cdot 5^a}{(5^a)^2+5^2}$

由于$(5^a)^2+5^2\geqslant 2\cdot 5^a\cdot 5$,所以$\frac{5\cdot 5^a}{5^{2a}+5^2}\leqslant\frac{1}{2}$.　①

又　$13-5b+\frac{1}{2}b^2$

$$=\frac{1}{2}b^2-5b+12\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(b^2-2\cdot 5b+25)+\frac{1}{2}$$

$$=\frac{1}{2}(b-5)^2+\frac{1}{2}\geqslant\frac{1}{2}$$　②

综合①,②可得$\frac{5^{a+1}}{5^{2a}+25}\leqslant 13-5b+\frac{1}{2}b^2$.

例 5. 若 a、b、c、d 都是实数,求证

$(ac+bd)^2\leqslant(a^2+b^2)(c^2+d^2)$.

分析：要证$(ac+bd)^2\leqslant(a^2+b^2)(c^2+d^2)$

只须 $a^2c^2+2abcd+b^2d^2\leqslant a^2c^2+b^2c^2+a^2d^2+b^2d^2$

只须 $2abcd\leqslant b^2c^2+a^2d^2$

只须 $0\leqslant b^2c^2-2abcd+a^2d^2$

只须 $0\leqslant(bc-ad)^2$ 即可.

这是显然成立的事实，倒过来写就是本题的证明.

证明：由 a,b,c,d 均为实数，显然

$(bc-ad)^2\geqslant 0$

即　$b^2c^2-2abcd+a^2d^2\geqslant 0$.

也就是 $2abcd\leqslant b^2c^2+a^2d^2$.

两边都加 $a^2c^2+b^2d^2$ 得

$a^2c^2+2abcd+b^2d^2\leqslant a^2c^2+b^2c^2+a^2d^2+b^2d^2$

两端因式分解，即得证

$(ac+bd)^2\leqslant(a^2+b^2)(c^2+d^2)$.

说明：在不等式的证明中，分析是非常重要的，因此，学习不等式的证明，要点在学会分析.

习题 8.4

1. 若 $a>b>0$，求证 $a^3+b^3>a^2b+ab^2$.

2. a,b 均为正数，求证$\dfrac{a^2}{b}+b\geqslant 2a$.

3. a,b 均为正数，求证$\dfrac{a^2}{b}+\dfrac{b^2}{a}\geqslant a+b$.

4. a,b 均为正数，求证$\dfrac{a^2+b^2}{2}\geqslant(\dfrac{a+b}{2})^2$.

5. 若$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，　求证 $a^2+b^2\geqslant(x+y)^2$.

第 9 章　一次方程组初步

含有两个未知数并且未知数次数都是 1 的方程叫做二元一次方程．二元一次方程的一般形式是：$ax+by=c$.

两个二元一次方程组成的一组方程，叫做二元一次方程组．二元一次方程组的一般形式是：

$$\begin{cases}a_1x+b_1y=c_1\\a_2x+b_2y=c_2\end{cases}$$

使二元一次方程组的两个方程左、右两边的值都相等的两个未知数的值，叫做二元一次方程组的解．求方程组的解的过程叫做解方程．解二元一次方程组的方法主要是代入消元法与加减消元法．下面我们从各种知识的综合联系中深入理解二元一次方程组的解法与应用．

§9.1　二元一次方程组综合问题

例 1. 若 $3x^{2m+5n+9}+4y^{4m-2n-7}=2$ 是关于 x,y 的二元一次方程．求 $(n+1)^{1995+m}$ 的值．

分析：本题是应用二元一次方程的概念，其中，x,y 为元，当然其次数为 1. 于是可以列出关于 m,n 的二元一次方程组，进而可以求出 m,n.

解：由 $3x^{2m+5n+9}+4y^{4m-2n-7}=2$ 是关于 x,y 的二元一次方程，得

$$\begin{cases}2m+5n+9=1\\4m-2n-7=1\end{cases}$$

即 $\begin{cases} 2m+5n=-8 & ① \\ 4m-2n=8 & ② \end{cases}$

由①×2−②，得 $n=-2$，代入求得 $m=1$.

所求 $(n+1)^{1995+m}=(-2+1)^{1996}=(-1)^{1996}=1$.

例 2. 若 x,y 的值满足方程组

$$\begin{cases} 323x+457y=1103 & ① \\ 177x+543y=897 & ② \end{cases}$$

求 $1992x^4+4x^2y^2+5y^4$ 之值.

分析：本题思路是由方程组解出 x,y，然后求出所计算代数式的值. 但是方程各项系数都比较大，直接代入消元或加减消元运算较繁. 如果①+②，得 $500x+1000y=2000\Rightarrow x+2y=4$. 这样可使困难迎刃而解.

解：①+②，得

$$500x+1000y=2000\Rightarrow x+2y=4 \qquad ③$$

③×177 得

$$177x+354y=708 \qquad ④$$

②−④得　$189y=189\Rightarrow y=1$

以 $y=1$ 代入③得　$x=2$

所以　$1992x^2+4x^2y^2+5y^4\big|_{\substack{x=2\\y=1}}$

$=1992\times2^4+4\times2^2\times1^2+5\times1^2$

$=31872+16+5$

$=31893$.

例 3. 若 $|x-y+2|$ 与 $|x+y-1|$ 互为相反数，求 xy 的负倒数.

解：因为 $|x-y+2|\geqslant0$，所以其相反数应 $\leqslant0$，即 $|x+y-1|\leqslant0$. 但 $|x+y-1|\geqslant0$，所以只能

$$|x+y-1|=0=|x-y+2|.$$

从而 $\begin{cases} x-y+2=0 \\ x+y-1=0 \end{cases}$ 即 $\begin{cases} x-y=-2 \\ x+y=1 \end{cases}$

利用加减消元解得$\begin{cases} x=-\dfrac{1}{2} \\ y=\dfrac{3}{2}. \end{cases}$

因此，$xy=-\dfrac{3}{4}$，xy 的负倒数是$-\dfrac{1}{xy}=\dfrac{4}{3}$.

说明：本题是将绝对值、相反数、二元一次方程组的知识以及负倒数的概念有机结合于一体，只有准确掌握每个概念，才能求得正确的解答．

例 4. a、b 都是有理数

a、b 的运算	$a+b$	$a-b$	$\dfrac{a+1}{b}$
运算结果	-49	-97	

问表中空格内所填的数应是多少？

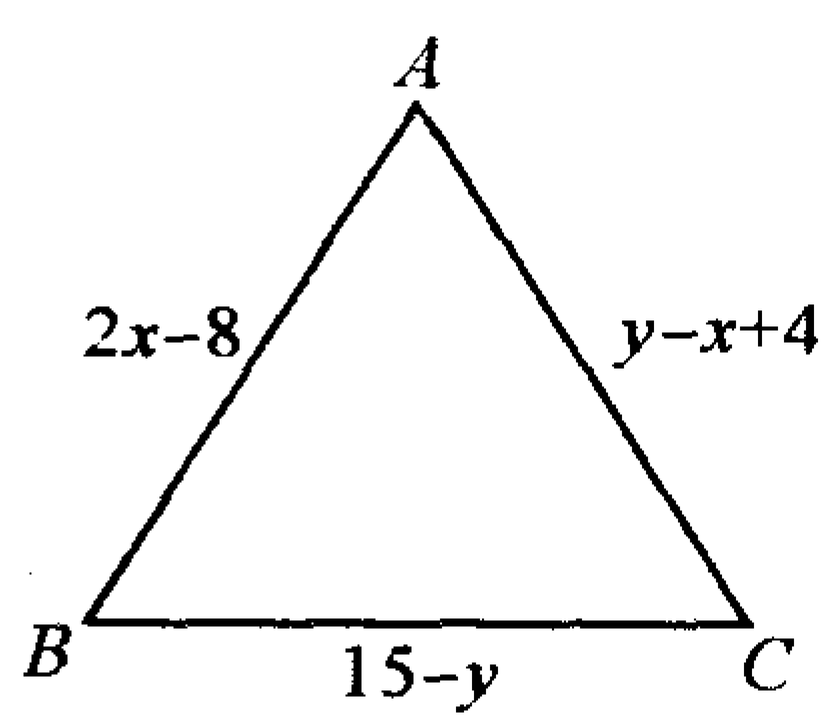
解：从表可知，a、b 满足二元一次方程组$\begin{cases} a+b=-49 \\ a-b=-97 \end{cases}$

利用加减消元求得$\begin{cases} a=-73 \\ b=24. \end{cases}$

$$\therefore \quad \frac{a+1}{b}=\frac{-73+1}{24}=\frac{-72}{24}=-3.$$

答：表中空格内应填的数是-3.

例 5. ΔABC 是等边三角形，表示其边长的代数式均已在图中标出．



试求$\dfrac{x^2-y^2}{x^2+2y^2}$之值.

解：由 $AB=AC=BC$ 得

$2x-8=y-x+4=15-y$.

即 $\begin{cases} 2x-8=y-x+4 \\ 2x-8=15-y \end{cases}$

解之得$\begin{cases}x=7\\y=9\end{cases}$.

$$\therefore\quad \left.\frac{x^2-y^2}{x^2+2y^2}\right|_{\substack{x=7\\y=9}}=\frac{7^2-9^2}{7^2+2\times9^2}$$

$$=-\frac{32}{211}.$$

例 6. 已知 $3,5,2x,3y$ 的平均数是 4；$20,18,5x,-6y$的平均数是 1.

求 x^4+y^3 之值.

分析：这是一个将平均数概念与二元一次方程组联系在一起的问题，因此利用平均数概念列出方程组解出 x,y 的值，x^4+y^3 即可求得.

解：由 $3,5,2x,3y$ 的平均数是 4；$20,18,5x,-6y$ 的平均数是 1.

可得　$\dfrac{3+5+2x+3y}{4}=4,\dfrac{20+18+5x-6y}{4}=1.$

即　$\begin{cases}8+2x+3y=16\\38+5x-6y=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x+3y=8\\5x-6y=-34.\end{cases}$

解之得$\begin{cases}x=-2\\y=4.\end{cases}$

所以 $x^4+y^3=(-2)^4+4^3=80.$

例 7. 一个被墨迹污染的方程组如下：

$$\begin{cases}x+\ y=2 & ①\\ x-7y=8 & ②\end{cases}$$

小明回忆："这个方程组的解是$\begin{cases}x=3\\y=-2\end{cases}$，而我作的答案是$\begin{cases}x=-2\\y=2\end{cases}$. 经检查后发现，我的错误只在于看错了第②个方程中 x 的系数所致."

请你根据小明的回忆，把原方程复原出来.

解:设原方程组为

$$\begin{cases} ax+by=2 & ① \\ cx-7y=8 & ② \end{cases}$$

由于$\begin{cases} x=3 \\ y=-2 \end{cases}$是这个方程组的解,所以 $x=3,y=-2$ 满足这个方程组.

即 $$\begin{cases} 3a-2b=2 & ③ \\ 3c+14=8 & ④ \end{cases}$$

从④中解得 $c=-2$.

小明由于看错了 c,解出$\begin{cases} x=-2 \\ y=2 \end{cases}$,这表明 $x=-2,y=2$ 只满足①,

即 $$-2a+2b=2 \quad ⑤$$

联立③,⑤得关于 a、b 的二元一次方程组.

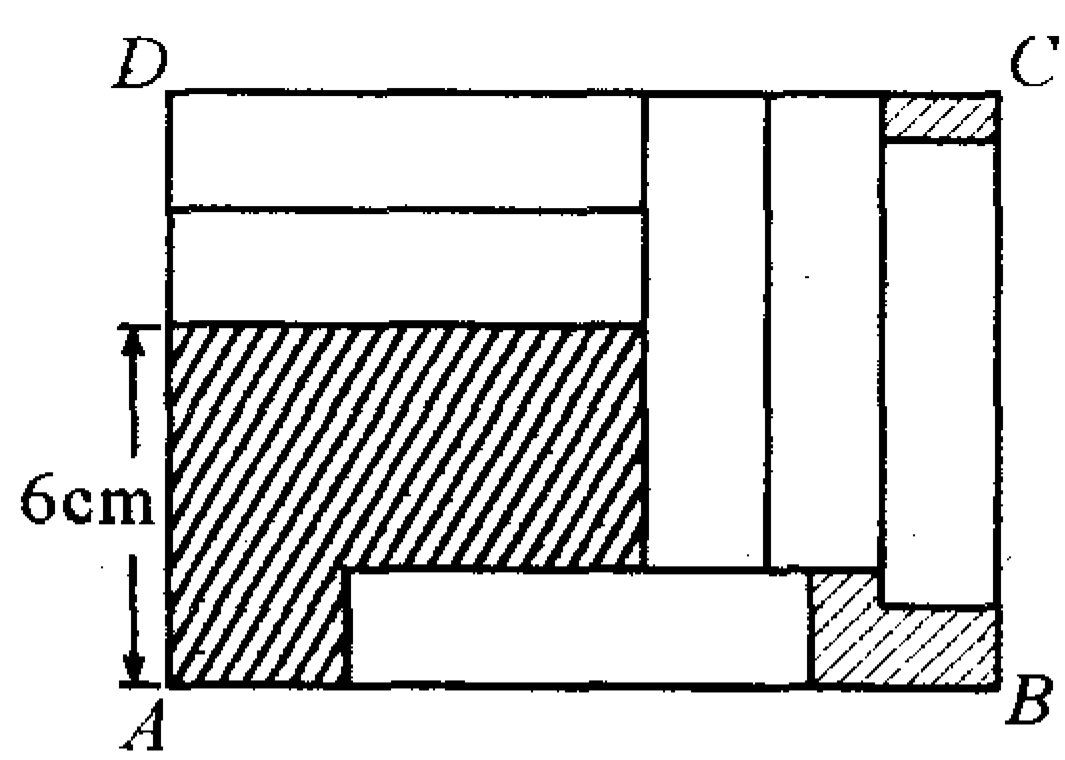
$\begin{cases} 3a-2b=2 \\ -2a+2b=2 \end{cases}$ 利用加减消元易得$\begin{cases} a=4 \\ b=5 \end{cases}$

因此题中方程组复原为

$$\begin{cases} 4x+5y=2 \\ -2x-7y=8. \end{cases}$$

例 8. 在矩形 $ABCD$ 中,放入六个形状、大小相同的长方形,所标尺寸如图所示.

试求图中阴影部分的总面积.



解:设小长方形的长为 x,宽为 y,依图可知

$x+3y=14$　①

$x+y-2y=6$

即　$x-y=6$　②

①－②得 $4y=8, y=2$,以 $y=2$ 代入②得 $x=8$.

因此,大矩形 $ABCD$ 的宽 $AD=6+2y=6+2\times2=10$.

矩形 $ABCD$ 面积 $=14\times10=140$(平方厘米)

阴影部分面积 $=140-6\times2\times8=44$(平方厘米).

例 9. 购买五种教学用具 A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 的件数和用钱总数列如下表:

品名 / 次数	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	总钱数
第一次购件数	1	3	4	5	6	1992 元
第二次购件数	1	5	7	9	11	2984 元

问购买每种教具各一件共需多少元?

解:设 A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 的单价分别为 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 元.

则依题意列得关系式如下:

$$\begin{cases} x_1+3x_2+4x_3+5x_4+6x_5=1992 & ① \\ x_1+5x_2+7x_3+9x_4+11x_5=2984 & ② \end{cases}$$

变形为

$$(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)+(2x_2+3x_3+4x_4+5x_5)=1992 \quad ③$$

$$(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)+2(2x_2+3x_3+4x_4+5x_5)=2984 \quad ④$$

③×2－④得

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=2\times1992-2984=1000.$$

所以购买每种教具各一件共需 1000 元.

说明：在③与④中，令 $u=x_1+x_2+x_3+x_4+x_5$，$v=2x_2+3x_3+4x_4+5x_5$，则得

$$\begin{cases}u+v=1992\\u+2v=2984.\end{cases}$$

这种将形式相同部分以一个字母变元表记的方法叫作换元法．换元法在解方程或方程组中是非常重要的．

习题 9.1

1. 方程 $1995x+6y=420000$ 的一组整数解(x,y)是(　)

(A)(61,48723)　　(B)(62,48725)

(C)(63,48726)　　(D)(64,48720)

2. 若$|x-y+3|$与$|x+y-1995|$互为相反数，求$\frac{x+2y}{x-y}$之值．

3. 在等式 $y=kx+b$ 中，当 $x=0$ 时，$y=2$；当 $x=3$ 时，$y=3$．求$\frac{b^2}{k}$之值．

4. 等腰三角形一腰上的中线把这个三角形的周长分为 12 厘米和 21 厘米两部分，试求这个等腰三角形底边之长是多少厘米．

5. 把 1400 元奖金分给 22 位得奖者，其中一等奖每人 200 元，二等奖每人 50 元，则(　)

(A)一等奖 3 人，二等奖 19 人．　(B)一等奖 2 人，二等奖 20 人．

(C)一等奖 5 人，二等奖 17 人．　(D)一等奖 4 人，二等奖 18 人．

§9.2　方程的讨论

如果方程系数中有字母，其结果应给予一般地讨论，这部分内容对训练严谨性与分类讨论极有好处，我们仅限于对一元一

次和二元一次方程或方程组展开学习这些内容.

例 1. 学生搬一堆砖,每人搬 k 块,还剩 14 块,若每人搬 9 块,最后一人只搬 6 块,求参加搬砖的学生数.

解:设有学生 x 人,依题意列方程如下:

$$kx+14=9x-3$$

即 $(9-k)x=17$ $\qquad(*)$

我们依 k 的正整数值进行讨论,其中人数 x 也是正整数.

(1)当 $k=9$ 时,$(*)$无解,应用题无解.

(2)当 $k>9$ 时,$x=\frac{17}{9-k}<0$,不合题意.

(3)当 $k<9$ 时,$x=\frac{17}{9-k}>0$,方程解合题意,此时 k 只能取 1,2,3,4,5,6,7,8 这 8 个正整数值,实验列表如下:

k	1	2	3	4	5	6	7	8
x	$\frac{17}{8}$	$\frac{17}{7}$	$\frac{17}{6}$	$\frac{17}{5}$	$\frac{17}{4}$	$\frac{17}{3}$	$\frac{17}{2}$	17

所以只有 $k=8$ 时,相应的 x 值取正整数 17.

故所求学生数是 17 人.

例 2. 一个自然数 n 的所有数字和记为 $S(n)$.

若 $n+S(n)=1993$,问 $n=$?

解:显然 $n<1993$

$$S(n)\leqslant 1+9+8+9=27$$

因此 n 必为$\overline{19**}$型的数.

设 n 的十位数字为 x,个位数字为 y.

则 $n=\overline{19xy}$

由题设条件.

$$1900+10x+y+1+9+x+y=1993$$

化简得 $11x+2y=83$

$$y=\frac{83-11x}{2}$$

观察知 x 为小于 8 的数字，$x=0,1,2,3,4,5,6,7$. 相应的 y 值可列表算出.

x	0	1	2	3	4	5	6	7
y	41.5	36	30.5	25	19.5	14	8.5	3

由于 y 也是阿位伯数字，所以只有 $x=7,y=3$.

因此　$n=1973$.

例 3. 一批旅客决定分乘几辆大汽车，要使每车有同样的人数，起先，每车乘坐 22 人，发现有一人坐不上车. 若是开走一辆空车，那么所有的旅客刚好平均分乘余下的汽车. 已知每辆车的容量不多于 32 人，问原有多少辆汽车？这些旅客有多少人？

解：设原有 k 辆汽车，而开走一辆空车后，留下的每车乘 n 个人，显然 $k\geqslant2,n\leqslant32$.

则旅客人数等于 $22k+1$.

当一辆空车开走以后，所有旅客可以表示为 $n(k-1)$，由此列出方程

$$22k+1=n(k-1)$$

则 $n=\dfrac{22k+1}{k-1}=\dfrac{22(k-1)+22+1}{k-1}=22+\dfrac{23}{k-1}$.

因为 n 为正整数，所以 $\dfrac{23}{k-1}$ 必是正整数，但 23 是质数，因数只有 1 与 23，又 $k\geqslant2$.

$\therefore$　$k-1=1$，或 $k-1=23$.

如果 $k-1=1\Rightarrow k=2,n=45$，不合 $n\leqslant32$ 的题设条件.

如果 $k-1=32\Rightarrow k=24,n=23$，合于题设条件.

这时旅客人数等于 $n(k-1)=23\times23=529$ 人.

答:原有 24 辆汽车,旅客共 529 人.

例 4. 工厂下料,把 5 米长的钢棒截成 17 厘米和 27 厘米的两种料,结果两种料恰好截完而无剩余(接头损耗不计),问两种料各截了多少根?

解:设截 17 厘米料 x 根,27 厘米料 y 根,两种料共截 a 根,则依题意列得方程组如下:

$$\begin{cases}17x+27y=500\\ x+y=a\end{cases}$$

其中 a 应是正整数.

$$解得\begin{cases}x=\dfrac{27a-500}{10}\\ y=\dfrac{500-17a}{10}\end{cases}$$

由 $x>0$,得 $27a>500, a>\frac{500}{27}=18\frac{4}{27}$.

由 $y>0$,得 $500>17a, a<\frac{500}{17}=29\frac{7}{17}$.

$\therefore\quad 18\frac{4}{17}<a<29\frac{7}{17}$.

但 a 是正整数,所以 a 只能取如下数值:

19,20,21,22,23,24,25,26,27,28,29. 又 x,y 均为整数,可见 a 应为 10 的倍数,所以只能是 $a=20$. 此时计算得 $x=4, y=16$.

答:17 厘米料共下 4 根,27 厘米料共下 16 根.

例 5. 要生产某种产品 100 吨,需要 A 种原料 200 吨,或 B 种原料 200.5 吨,或 C 种原料 195.5 吨,或 D 种原料 192 吨,或 E 种原料 180 吨. 现知用 A 种原料及另外一种(指 B、C、D、E 中的一种)原料共 19 吨生产此种产品 10 吨,试分析所用另外一种原料是哪一种,这两种原料各用了多少吨?

解:设用 A 种原料 x 吨,用另外一种原料 y 吨,以 My 表示

生产 100 吨产品时所需另一种原料的吨数.

依题意列出方程组如下：$\begin{cases} x+y=19 \\ \dfrac{100x}{200}+\dfrac{100y}{My}=10 \end{cases}$

解得$\begin{cases} x=19-\dfrac{My}{200-My} \\ y=\dfrac{My}{200-My} \end{cases}$

由 $x>0$，$y>0$ 知 $My<190$，所以 $My=180$，因此，应选 E 种原料，这时

$$\begin{cases} x=19-\dfrac{180}{200-180}=10(\text{吨}) \\ y=\dfrac{180}{200-180}=9(\text{吨}) \end{cases}$$

答：另一种原料是 E，A 原料用 10 吨，E 原料用 9 吨.

例 6. 给出两个方程组：

(Ⅰ)$\begin{cases} ax+by=c \\ dx+ey=f \end{cases}$　　　(x，y 是未知数)

(Ⅱ)$\begin{cases} au+dv=0 \\ bu+ev=0 \\ cu+fv=1 \end{cases}$　　　(u，v 是未知数)

每个方程组解对记 10 分，解错记 -2 分.

王新同学求出(Ⅰ)的解为(x_0, y_0)，求出(Ⅱ)的解为(u_0, v_0). 如果王新同学第(Ⅰ)题解对了，那么他两道题累计所得的总分应该是多少？

解：由于(x_0, y_0)确是(Ⅰ)的解，第(Ⅰ)题王新同学得 10 分，则

$$\begin{cases} ax_0+by_0=c & ① \\ dx_0+ey_0=f & ② \end{cases}$$

我们证明(Ⅱ)必无解.

$$au_0+dv_0=0,bu_0+ev_0=0,cu_0+fv_0=1 \quad ③$$

由①×u_0 得

$$ax_0u_0+by_0u_0=cu_0 \quad ④$$

由②×v_0 得

$$dx_0v_0+ey_0v_0=fv_0 \quad ⑤$$

④+⑤得

$$x_0(au_0+dv_0)+y_0(bu_0+ev_0)=cu_0+fv_0 \quad ⑥$$

以③式结果代入⑥式得 0=1，矛盾．

所以当（Ⅰ）有解的情况下（Ⅱ）必无解，因此，王新无论求出（Ⅱ）的怎样的解(u_0,v_0)必定都是错误的，因此王新第（Ⅱ）题得 −2 分．

总计总分为 10+(−2)=8 分．

习题 9.2

1. k 为什么值时，方程 $k(x-1)=5x-2$ 的解等于 1995？

2. 若干人分铅笔，每人 a 枝还多 15 枝；每人 9 枝，不足 5 枝，求人数．

3. 第一组 5 个人，第二组 a 个人，问从第一组调几个人到第二组，那么第二级的人数等于第一组的 2 倍？

4. 买红彩笔和黑彩笔共 a 枝，一共用去了 31 元，已知红笔每枝 5 元，黑笔每枝 3 元，两种铅笔各买了几枝？

5. 某校初二有甲、乙、丙三个班，甲班比乙班多 4 个女同学，乙班比丙班多一个女同学．如果把甲班的第一组调到乙班，乙班的第一组调到丙班，丙班的第一组调到甲班，则三个班的女同学人数恰相等．已知丙班第一组中共有两个女同学．问甲、乙两班第一组各有几个女同学？

§9.3 一次不定方程

二元一次方程 $ax+by=c$，一般情况下，任取一个 x 值，就可计算出相应的 y 值，有无穷多组解，像这样的未知数个数多于方程个数的方程或方程组，叫做不定方程或不定方程组．如果根据实际问题的条件限定求正整数解，这样又可与整数整除等知识相结合，将解确定出来．

例 1. 求方程 $7x+10y=280$ 的所有正整数解．

解：由原方程可得 $y=28-\dfrac{7}{10}x$

要 $y>0$，必须 $28-\dfrac{7}{10}x>0$ 得 $x<40$，又要 x 为正整数，所以 $x>0$.

因此 x 仅能取 10 的正整数倍．

所以由实验可得

x	10	20	30	40	……
y	21	14	7	0	……

所以原方程仅有如下三组正整数解

$$\begin{cases}x=10\\y=21\end{cases}\quad\begin{cases}x=20\\y=14\end{cases}\quad\begin{cases}x=30,\\y=7.\end{cases}$$

例 2. 鸡翁一，值钱五，鸡母一，值钱三，鸡雏三值钱一，百钱买百鸡，问鸡翁、母、雏各几只？

这是一道中国古算中的著名的“百鸡问题”，我们用方程解法，将列出一个三元一次不定方程组．

解：设鸡翁 x 只，鸡母 y 只，雏鸡 z 只，依题意列出方程

$$\begin{cases}5x+3y+\dfrac{1}{3}z=100 & ①\\x+y+z=100 & ②\end{cases}$$

由①×3 得　$15x+9y+z=300$　③

③－②得，$14x+8y=200$

即　$7x+4y=100$　(＊)

由(＊)可知，x、y 均为整数，$4|7x$

又$(4,7)=1$. $\therefore 4|x$

因此在 x,y,z 均为正整数的条件下，并且 $4|x$，利用实验法列表求值，得

x	……	0	4	8	12	16	……
y	……	25	18	11	4	－3	……
z	……	75	78	81	84	87	……

其中(4,18,78)，(8,11,81)，(12,4,84)是本题的三组解．

无论例 1 或例 2，关键都在解一个二元一次的不定方程，我们使用的方法都是实验法，那么一般情况下，如何求$ax+by=c$的整数解呢？我们只介绍一种简易的情况．

定理：不定方程 $ax+by=c$(＊)其中$(a,b)=1$ 有无穷的整数解的集合，这些解可以用公式

$$x=\alpha+bt,\ y=\beta-at$$

给出，其中(α,β)是方程(＊)的某个特解．

证明：设 $x=\alpha,y=\beta$ 是(＊)的某个特解，代入(＊)成为恒等式 $a\alpha+b\beta=c$

由原方程(＊)减去它得

$$a(x-\alpha)+b(y-\beta)=0$$

由此，$x=\alpha+\dfrac{b(\beta-y)}{a}$

为了 x 是整数，必须$\dfrac{b(\beta-y)}{a}$是整数

即　$a|b(\beta-y)$

但已知$(a,b)=1$,∴ $\dfrac{\beta-y}{a}$是整数.

设$\dfrac{\beta-y}{a}=t$,则 $y=\beta-at$,

∴ $x=\alpha+bt$ (其中 t 取遍所有整数值)这就是要证明的.

例 3. 求方程 $2x+3y=1994$ 的所有整数解.

解:由于$(2,3)=1$,原方程可解.

观察知,$x=997$,$y=0$ 是一组解.根据定理,所以通解为

$$\begin{cases}x=997+3t\\ y=-2t\end{cases}\quad \text{(其中 } t \text{ 取所有整数)}$$

例 4. 一次考试共需做 20 个小题,做对一个得 8 分,做错一个减 5 分,不做得 0 分,某学生共得 13 分,问这学生没做的题共有几个?

解:设该生做对 x 个题,做错了 y 个题,没做的是 z 个题.则

$$\begin{cases}x+y+z=20 & ①\\ 8x-5y=13 & ②\end{cases}$$

由①得 $z=20-(x+y)$

由②得 $8(x+y)=8x+8y=13+13y=13(1+y)$

∵ $(13,8)=1$,

∴ $13\mid(x+y)$

又 $0<x+y\leqslant20$.

∴ $x+y=13$.

$z=20-13=7$.

答:这个学生有 7 个题没做.

例 5. 下面是一张被墨水污染了的单据.

品 名	单 价	金 额(单位:元)							
板材米	每米	千万	百万	十万	万	千	百	十	元
[illegible]	4936元			[illegible]	[illegible]	[illegible]	7	2	8

已知板材按整数米出售,请你将单据中的数据都复原出

来．

解：设 x 代表买板材米数，则金额处应为 $4936\times x$.

被墨水盖住的金额的三个数码所表示的数用 y 表示，则这笔金额为 $1000y+728$.

于是列出二元一次方程．

$4936x=1000y+728$

以 8 除两边得 $617x-125y=91$

$$125y=617x-91$$

$$y=5x-1+\frac{34-8x}{125}$$

$$=5x-1+\frac{2(17-4x)}{125}=5x-1+2t$$

其中 $t=\dfrac{17-4x}{125}$

即　$17-4x=125t$.

$$x=\frac{17-125t}{4}=4-31t+\frac{1-t}{4}=4-31t+t_1\text{，其中 } t_1=\frac{1-t}{4}.$$

于是 $4t_1=1-t$，$t=1-4t_1$.

$x=125t_1-27$，$y=617t_1-134$

由于 $100\leqslant y<1000$，所以 $100\leqslant 617t_1-134<1000$.

解得 $\dfrac{234}{617}\leqslant t_1\leqslant\dfrac{1134}{617}$.

显然整数 $t_1=1$.

于是　$x=98$，$y=483$.

答：共卖板材 98 米，总金额 483728 元．

习题 9.3

1. 有一份选择题试卷共六道小题，其得分标准是：一道小题答对得 8 分，答错得 0 分，不答得 2 分．某同学共得了 20 分．

问他答错几道小题.

2. 一只笼子中装有蜘蛛和甲虫共有 42 条腿,又蜘蛛每只 8 条腿,甲虫每只 6 条腿. 问蜘蛛与甲虫一共多少只?

3. 小明共集邮票若干张,其中$\frac{1}{4}$是 1990 年以前国内发行的. $\frac{1}{8}$是 1991 年国内发行的. 还有$\frac{1}{19}$是 1992 年国内发行的. 此外尚有不足 100 张的外国邮票. 问小明共有邮票多少张?

4. 求不定方程 $5x-14y=11$ 的正整数解.

§9.4 一次方程组解法举例

初中阶段会遇到二元一次,三元一次方程组,以及更为复杂的方程组,其解法要视其特点而论,特举例说明之

例 1. 解方程组 $ax=by=cz=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$

(其中 $a>0,b>0,c>0$)

解:令 $ax=by=cz=k \qquad (k\neq 0)$

则 $k=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{a+b+c}{k}$

$$k^2=a+b+c\Rightarrow k=\pm\sqrt{a+b+c}$$

当 $k=\sqrt{a+b+c}$时

$$x=\frac{1}{a}\sqrt{a+b+c},y=\frac{1}{b}\sqrt{a+b+c},z=\frac{1}{c}\sqrt{a+b+c}.$$

当 $k=-\sqrt{a+b+c}$时

$$x=-\frac{1}{a}\sqrt{a+b+c},y=-\frac{1}{b}\sqrt{a+b+c},z=-\frac{1}{c}\sqrt{a+b+c}.$$

说明:本题特点是利用比例性质设 k 来求解.

例 2. 解方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=2a_1 & ①\\ x_1+x_2-x_3-x_4=2a_2 & ②\\ x_1-x_2+x_3-x_4=2a_3 & ③\\ x_1-x_2-x_3+x_4=2a_4 & ④\end{cases}$$

解:①+②+③+④得

$4x_1=2a_1+2a_2+2a_3+2a_4$

$\therefore\quad x_1=\dfrac{a_1+a_2+a_3+a_4}{2}$.

①+②−③−④

$4x_2=2a_1+2a_2-2a_3-2a_4$

$\therefore\quad x_2=\dfrac{a_1+a_2-a_3-a_4}{2}$.

①−②+③−④

$4x_3=2a_1-2a_2+2a_3-2a_4\qquad \therefore x_3=\dfrac{a_1-a_2+a_3-a_4}{2}$.

①−②−③+④

$4x_4=2a_1-2a_2-2a_3+2a_4\qquad \therefore x_4=\dfrac{a_1-a_2-a_3+a_4}{2}$.

说明:本题特点是加减消元.

例 3. 解方程组$\begin{cases}yz=ax & ①\\ zx=by & ②\\ xy=cz & ③\end{cases}\quad (a>0,b>0,c>0)$

解:经观察,$x=0,y=0,z=0$ 为一组当然解,

当 $x\neq0,y\neq0,z=0$ 时,

①×②×③得　$x^2y^2z^2=abcxyz$

$\therefore\quad xyz=abc$.

故　$x=\dfrac{xyz}{yz}=\dfrac{abc}{ax}=\dfrac{bc}{x}\quad\Rightarrow x=\pm\sqrt{bc}$.

同法可求得,$y=\pm\sqrt{ac}$,$z=\pm\sqrt{ab}$.

又从题目中可见,x,y,z 中不能只一个负数或全为负数,

所以

$$\begin{cases}x=0\\y=0\\z=0\end{cases}\quad\begin{cases}x=\sqrt{bc}\\y=\sqrt{ac}\\z=\sqrt{ab}\end{cases}\quad\begin{cases}x=-\sqrt{bc}\\y=-\sqrt{ac}\\z=\sqrt{ab}\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=-\sqrt{bc}\\y=\sqrt{ac}\\z=-\sqrt{ab}\end{cases}\quad\begin{cases}x=\sqrt{bc}\\y=-\sqrt{ac}\\z=-\sqrt{ab}\end{cases}$$

说明:本题是利用乘除消元法.

例 4.解方程组

$$\begin{cases}x+y+\sqrt{(x+2)(y+3)}=34\\(x+2)^2+(y+3)^2+(x+2)(y+3)=746\end{cases}$$

解:设 $x+2=u,y+3=v$.原方程组化为

$$\begin{cases}u+v+\sqrt{uv}=39 & ①\\u^2+v^2+uv=741 & ②\end{cases}$$

$\frac{②}{①}$得 $\quad u+v-\sqrt{uv}=19 \qquad ③$

$\frac{①+③}{2} \qquad u+v=29 \qquad ④$

$\frac{①-③}{2} \qquad \sqrt{uv}=10 \qquad$ 即 $uv=100 \qquad ⑤$

解④,⑤得 $\begin{cases}u_1=4\\v_1=25\end{cases}$, $\begin{cases}u_2=25\\v_2=4.\end{cases}$

说明:本题的特点是换元．换元法是应当掌握的方法.

例 5.解方程组$\begin{cases}x=y^3-3y & ①\\y=3x-x^3 & ②\end{cases}$

解:经观察知,①中 x,y 互换与②右部相差一个负号故知 $y=-x$.

以 $y=-x$ 代入①得 $\quad x=-x^3-3x$

即　$x^3-2x=0\quad x(x^2-2)=0$

解得 $x_1=0, x_2=\sqrt{2}, x_3=-\sqrt{2}$.

所以 $y_1=0, y_2=-\sqrt{2}, y_3=\sqrt{2}$.

即　原方程组的解为

$$\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}\quad\begin{cases}x=\sqrt{2}\\y=-\sqrt{2}\end{cases}\quad\begin{cases}x=-\sqrt{2}\\y=\sqrt{2}\end{cases}.$$

说明:本题中观察特点,找出 $y=-x$ 的关系是解题的关键,因此解方程组时,一定要分析题目的结构特点,再决定解题策略.要坚持具体问题具体分析.

例 6. 解方程组

$$\begin{cases}\sqrt{x^2+5x+2y-3}+\sqrt{x^2+x+y+2}\\\qquad=\sqrt{x^2+4x+3y-2}+\sqrt{x^2+2y+3} & ①\\x^{x-y}=2y-1 & ②\end{cases}$$

分析:第②个方程虽然简单,但是指数方程,没有通法可用.只能从复杂的方程①入手,仔细分析会发现特点,进而实破.

解:∵　$x^2+5x+2y-3=(x^2+4x+3y-2)+(x-y-1)$

$x^2+x+y+2=(x^2+2y+3)+(x-y-1)$

故设　$A=x^2+4x+3y-2, B=x^2+2y+3$

原方程(1)变为 $\sqrt{A+(x-y-1)}+\sqrt{B+(x-y-1)}=\sqrt{A}+\sqrt{B}$　③

观察知,当 $x-y-1=0$ 时,③成立

当 $x-y-1>0$ 时,

则 $\sqrt{A+(x-y-1)}>\sqrt{A}, \sqrt{B+(x-y-1)}>\sqrt{B}$

当 $x-y-1<0$ 时,

则 $\sqrt{A+(x-y-1)}<\sqrt{A}, \sqrt{B+(x-y-1)}<\sqrt{B}$

所以③式成立,当且仅当 $x-y-1=0$,即 $x-y=1$. 此时②变为 $x^1=2y-1$

原方程组变为 $\begin{cases}x-y=1\\x-2y=-1\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=3\\y=2.\end{cases}$

经检验知：$x=3,y=2$ 是原方程组的解.

习题 9.4

1. 解方程组$\begin{cases}323x+457y=1103\\177x+543y=897\end{cases}$

2. 解方程组$\begin{cases}8x+13y+13z=154\\13x+8y+13z=154\\43x+36y+87z=846\end{cases}$

3. 解方程组$\begin{cases}\dfrac{xy}{x+y}=2\\\dfrac{yz}{y+z}=4\\\dfrac{zx}{z+x}=5\end{cases}$

4. 解方程组$\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y+z}=\dfrac{1}{2}\\\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z+x}=\dfrac{1}{3}\\\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{x+y}=\dfrac{1}{4}\end{cases}$

5. 解方程组$\begin{cases}1995x+1997y=5989\\1997x+1995y=5987\end{cases}$

6. 解方程组$\begin{cases}ay+bx=c\\cx+az=b\\bz+cy=a\end{cases}$ $(abc\neq 0)$

第 10 章　一元二次方程

一元二次方程是初中数学的重要内容，它的基本内容包括：求根公式，根的判别式，根与系数的关系(韦达定理)．我们在课外活动中将对这三方面分别加以讨论．

§10.1　一元二次方程的根

形如 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 的方程，称为一元二次方程，能够使方程两端相等的未知数 x 的值叫做方程的根．当 a、b、c 都是实数时，如果方程有实数根，则这样的根共有两个：即两个不相等的实数根或两个相等的实数根；当然有的方程也会没有实数根．固然对一元二次方程有现成的求根公式，然而在解题过程中观察方程特点，利用验根的方法更为有效．

例 1. 若 $b=a+c$，求证一元二次方程

$$ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$$

必有一个根是 -1.

证： 由 $b=a+c$，则 $a-b+c=0$

将　$x=-1$ 代入 ax^2+bx+c 得

$$a(-1)^2+b(-1)+c=a-b+c=0$$

$\therefore$　-1 是 $ax^2+bx+c=0$ 的根．

例 2. p、q 为何值时，方程 $x^2+px+q=0$ 的两个根恰为 p 和 q?

解： 若 p 和 q 为方程 $x^2+px+q=0$ 的两个根

则
$$p^2+p\cdot p+q=0 \qquad ①$$
$$q^2+p\cdot q+q=0 \qquad ②$$

由①得，$q=-2p^2$，代入②，经整理可得

$2p^2(2p^2-p-1)=0$

即　$2p^2(p-1)(2p+1)=0$

解得 $p=0$ 或 $p=1$ 或 $p=-\frac{1}{2}$.

代入①分别求得 $q=0$ 或 $p=-2$ 或 $q=-\frac{1}{2}$.

又当 $p=0,q=0$ 时，方程为 $x^2=0$，有两个根都是 0，当 $p=1,q=-2$ 时，方程为 $x^2+x-2=0$，有两个根分别为 1 和 -2，当 $p=-\frac{1}{2},q=-\frac{1}{2}$ 时，方程为 $x^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}=0$，有两个根分别为 $1,-\frac{1}{2}$，不合题意.

故当且仅当 $p=0,q=0$ 或 $p=1,q=-2$ 时，原方程的根恰为 p 和 q.

例 3. 已知两个二次方程 $x^2+ax+b=0$，$x^2+cx+d=0$ 有一个公共根 1.

求证：二次方程 $x^2+\frac{a+c}{2}x+\frac{b+d}{2}=0$ 也有一个根为 1.

证明：由于 1 是已知两方程的根，所以

$1^2+a\cdot1+b=0$　　①

$1^2+c\cdot1+d=0$　　②

①+②后两端除以 2 得

$$1+\frac{a+c}{2}+\frac{b+d}{2}=0.$$

即　$1^2+\frac{a+c}{2}\cdot1+\frac{b+d}{2}=0.$

所以 1 是方程 $x^2+\frac{a+c}{2}x+\frac{b+d}{2}=0$ 的根.

例 4. 设 a、b 均为正整数，两个二次项系数不相等的关于 x 的二次方程

$(a-1)x^2-(a^2+2)x+(a^2+2a)=0$

$(b-1)x^2-(b^2+2)x+(b^2+2a)=0$

有一个公共根．求 $a^b b^a$ 之值．

解:由已知 $a>1$、$b>1$，且 $a\neq b$.

原两个方程左端分解因式，得

$[(a-1)x-(a+2)](x-a)=0$

$[(b-1)x-(b+2)](x-b)=0$

故第一个方程的两根是 a，$\frac{a+2}{a-1}$，第二个方程的两根为 b，$\frac{b+2}{b-1}$，由于两方程有公共根，且 $a\neq b$，$\frac{a+2}{a-1}\neq\frac{b+2}{b-1}$. 故只能有 $a=\frac{b+2}{b-1}$或 $b=\frac{a+2}{a-1}$.

这两式化简后均为 $ab-a-b-2=0$

即　$(a-1)(b-1)=3$.

因为，a、b 均为大于 1 的正整数，所以

$$\begin{cases}a-1=1\\ b-1=3\end{cases}\quad 或\quad \begin{cases}a-1=3\\ b-1=1\end{cases}$$

解得　$a=2$，$b=4$ 或 $a=4$，$b=2$

故　$a^b b^a=2^4\cdot 4^2=256$.

例 5. 已知方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$有实根 x_1 与 x_2. 设 $p=x_1^{1997}+x_2^{1997}$，$q=x_1^{1996}+x_2^{1996}$，$r=x_1^{1995}+x_2^{1995}$

求：$ap+bq+cr$ 之值.

解:由 x_1，x_2 是方程 $ax^2+bx+c=0$ 之二实根，所以，$ax_1^2+bx_1+c=0\cdots$①　$ax_2^2+bx_1+c=0\cdots$②

①式两边同乘 x_1^{1995}得

$ax_1^{1997}+bx_1^{1996}+cx_1^{1995}=0\cdots$③

②式两边同乘以 x_2^{1995}得

$ax_2^{1997}+bx_2^{1996}+cx_2^{1995}=0\cdots$④

③+④得

$$a(x_1^{1997}+x_2^{1997})+b(x_1^{1996}+x_2^{1996})+c(x_1^{1995}+x_2^{1995})=0$$

即 $ap+bq+cr=0$.

习题 10.1

1. 证明：1 是方程 $(a-b)x^2+(b-c)x+(c-a)=0$ 的一个根.

2. 若 $1,\frac{1}{2}$ 是一元二次方程 $ax^2+bx+2=0$ 的两个根，试确定 a,b 之值.

3. 若 m 是方程 $ax^2+bx+a=0(a\neq0)$ 的一个根.

求证：$\frac{1}{m}$ 也是方程 $ax^2+bx+a=0$ 的一个根.

4. 已知方程

$(x-19)(x-83)=p$ 有实根 r_1 和 r_2（其中 p 为实数），

求方程 $(x-r_1)(x-r_2)=-p$ 的实数根.

§ 10.2　一元二次方程根的判别式

对于实系数一元二次方程

$$ax^2+bx+c=0(a\neq0) \tag{*}$$

$\Delta=b^2-4ac$ 称为方程（*）根的判别式，我们利用 Δ 可以定性的判定（*）有无实根或是否为等根.

即 (1) $\Delta>0\Leftrightarrow$ 一元二次方程（*）有两个不等实根.

(2) $\Delta=0\Leftrightarrow$ 一元二次方程（*）有两个相等实根.

(3) $\Delta<0\Leftrightarrow$ 一元二次方程（*）没有实数根.

其中双箭头记号“$\Leftrightarrow$”表示可以互推，比如(1)的意思是“$\Delta>0$，则（*）有两个不等实根”反过来“若（*）有两个不等实根，则 $\Delta>0$”，换言之，“$\Leftrightarrow$”在逻辑上表示“当且仅当”.

例 1. 小明求解一个整系数的一元二次方程，计算该方程的判别式的值恰为 1991.

求证：小明的演算必定有误．

证明：对一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$，其中 a、b、c 均为整数，其判别式 $\Delta=b^2-4ac$.

若小明的演算无误，则有 $b^2-4ac=1991$. 可见 b 为奇数，但奇数平方被 4 除余 1，所以 b^2 被 4 除余 1，b^2-4ac 也被 4 除余 1. 即由此推出 1991 被 4 除应余 1，然而事实上 1991 被 4 除余 3，得出矛盾．所以小明的演算必有错误．

例 2. 设非零实数 p_1,p_2,q_1,q_2 满足关系式

$p_1p_2=4(q_1+q_2)$

证明：方程 $x^2+p_1x+q_1=0$ 与 $x^2+p_2x+q_2=0$ 中至少有一个具有不等的实数根．

证明：用反证法

设方程 $x^2+p_1x+q_1=0$ 及 $x^2+p_2x+q_2=0$ 均无不等的实数根，则对其判别式 Δ_1,Δ_2 成立 $\Delta_1\leqslant 0$ 且 $\Delta_2\leqslant 0$.

即　$p_1{}^2-4q_1\leqslant 0$ 且 $p_2{}^2-4q_2\leqslant 0$.

相加得：$p_1{}^2+p_2{}^2-4(q_1+q_2)\leqslant 0$.

但　$p_1p_2=4(q_1+q_2)$代入得

$$p_1{}^2+p_2{}^2-p_1p_2\leqslant 0 \quad ①$$

另一方面，对非零实数 p_1,p_2，有

$$p_1{}^2+p_2{}^2-p_1p_2$$

$$=p_1{}^2-2\cdot p_1\cdot\frac{p_2}{2}+\frac{p_2{}^2}{4}+\frac{3p_2^2}{4}$$

$$=(p_1-\frac{p_2}{2})^2+\frac{3p_2{}^2}{4}>0 \quad ②$$

①与②矛盾．

所以方程 $x^2+p_1x+q_1=0$ 与 $x^2+p_2x+q_2=0$ 均无不等实数根的假设不真，也就是这两个方程中至少有一个具有不等的

实数根应该成立．

例 3. A,B,C 为不相等的实数，证明，三个二次方程

$$Ax^2+2Bx+C=0 \quad Bx^2+2Cx+A=0 \quad Cx^2+2Ax+B=0$$

不可能都得到等根．

证明：假设三个方程都得到等根．

则 $B^2-AC=0.C^2-AB=0,A^2-BC=0.$

相加得 $A^2+B^2+C^2-AC-AB-BC=0.$

$\therefore \quad (A^2-2AB+B^2)+(B^2-2BC+C^2)+(C^2-2AC+A^2)=0$

即 $(A-B)^2+(B-C)^2+(C-A)^2=0$

于是得 $A=B=C$，与 A、B、C 为不相等的实数相矛盾．

所以三个方程不可能都得到等根．

例 4. 已知 p,q,r 都是正数，求证关于 x 的三个方程

$$x^2-\sqrt{p}x+\frac{q}{8}=0 \quad x^2-\sqrt{q}x+\frac{r}{8}=0 \quad x^2-\sqrt{r}x+\frac{p}{8}=0$$

中至少有一个方程有两个不等的正根．

证明：如果三个方程都没有不等实根，则

$$\Delta_1=p-\frac{q}{2}\leqslant 0,\Delta_2=q-\frac{r}{2}\leqslant 0,\Delta_3=r-\frac{p}{2}\leqslant 0.$$

即 $p\leqslant\frac{q}{2},q\leqslant\frac{r}{2},r\leqslant\frac{p}{2}.$

于是 $p\leqslant\frac{p}{8}$

由 $p>0$ 推知 $1\leqslant\frac{1}{8}$矛盾．

所以三个方程中至少有一个方程有两个不等实根，为确定起见，不妨设是 $x^2-\sqrt{p}x+\frac{q}{8}=0$ 有二不等实根，易知当 $x\leqslant 0$ 时，$x^2-\sqrt{p}x+\frac{q}{8}>0$，所以方程 $x^2-\sqrt{p}x+\frac{q}{8}=0$ 的两个不等实根必为两个不等的正根．

例 5. 已知实数 a、b、c 满足 $a-b+c=0$，求证：$b^2\geqslant 4ac.$

证明：(1)若 $a=0$，无论 b、c 为什么值，$b^2\geqslant 4ac=0$ 总是成立的．

(2)当 $a\neq 0$ 时，由 $a-b+c=0$　知

$$ax^2+bx+c=0 \quad \text{有实根 } x=-1.$$

所以　$\Delta=b^2-4ac\geqslant 0$　即 $b^2\geqslant 4ac$.

综合(1)，(2)可得，对满足 $a-b+c=0$ 的实数 a、b、c 总成立不等式　$b^2\geqslant 4ac$.

习题 10.2

1. 如果 α、β 为实数，试证方程 $(x-\alpha)(x-\beta)=1$ 的二根为两个不等的实数．

2. 当 $p_1p_2=2(q_1+q_2)$ 时，试证方程 $x^2+p_1x+q_1=0$ 和 $x^2+p_2x+q_2=0$ 中，至少有一个方程有实数根．

3. 若 a、b、c、d 均为正数，

证明：$\frac{1}{2}x^2+\sqrt{2a+b}x+\sqrt{cd}=0$

$$\frac{1}{2}x^2+\sqrt{2b+c}x+\sqrt{da}=0$$

$$\frac{1}{2}x^2+\sqrt{2c+d}x+\sqrt{ab}=0$$

$$\frac{1}{2}x^2+\sqrt{2d+a}x+\sqrt{bc}=0$$

中，至少有两个方程有不相等的实数根．

4. 当 a、b 为何值时，方程

$x^2+2(1+a)x+(3a^2+4ab+4b^2+2)=0$

有实根？

5. 设 $a+b>c>0$ 且 $|a-b|<c$

求证：二次方程 $a^2x^2+(b^2+a^2-c^2)x+b^2=0$ 没有实数根.

§10.3 韦达定理

韦达定理的内容是:

设方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$的两个根为 x_1,x_2

则有 $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a},x_1x_2=\dfrac{c}{a}$.

将韦达定理与方程根联系在一起,可以编织出许多美丽动人的数学题.

例 1. 求所有整数 a,使得方程 $x^2-ax+4a=0$ 仅有整数根.

解:设两个整数根为 $x,y(x\leq y)$. 根据韦达定理,则有

$$\begin{cases}x+y=a>0\\xy=4a>0\end{cases}$$

解得 $\dfrac{a}{2}\leq y\leq a,4\leq x\leq 8$.

由方程 $x^2-ax+4a=0$ 知,$x\neq4$. 所以 $a=\dfrac{x^2}{x-4}$. 由于 x 为整数,

所以 $x=5$ 时,$a=25,y=20$;$x=6$ 时,$a=18,y=12$;

$x=7$ 时,a 不是整数;$x=8$ 时,$a=16,y=8$.

答:$a=25$ 或 18 或 16 均为所求.

例 2. 已知方程 $x^2-3x+2=0$. 不解这个方程,而作出一个新的一元二次方程,使新方程的根是这个方程各根的立方.

解:设方程 $x^2-3x+2=0$ 的两个根是 x_1 和 x_2,所求的新的一元二次方程是 $y^2+my+n=0$,它的两个根是 y_1 和 y_2;那么 $y_1=x_1^3,y_2=x_2^3$.

因为 $x_1+x_2=3,x_1x_2=2$,

所以
$$\begin{aligned}y_1+y_2&=x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)(x_1^2-x_1x_2+x_2^2)\\&=(x_1+x_2)[(x_1+x_2)^2-3x_1x_2]\\&=3[(3)^2-3\times2]=9,\end{aligned}$$

$y_1y_2=x_1^3x_2^3=(x_1x_2)^3=2^3=8.$

因此　$m=-(y_1+y_2)=-9, n=y_1y_2=8.$

所以所求的新的一元二次方程是：$y^2-9y+8=0.$

例 3. 若 $a>0, b>0, c>0$. x_1 和 x_2 是方程 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq0)$ 的两个实根.

求证：$\frac{c}{b}<|x_1|<\frac{b}{a}, \frac{c}{b}<|x_2|<\frac{b}{a}.$

证明：由韦达定理，有 $x_1+x_2=-\frac{b}{a}<0, x_1x_2=\frac{c}{a}>0$. 所以 $x_1<0, x_2<0$.

于是有 $|x_1|+|x_2|=|x_1+x_2|=\frac{b}{a}.$

所以 $|x_1|<\frac{b}{a}, |x_2|<\frac{b}{a}.$　①

又 $\frac{1}{|x_1|}+\frac{1}{|x_2|}=\frac{|x_1|+|x_2|}{|x_1x_2|}=\frac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}}=\frac{b}{c}.$

从而有 $\frac{1}{|x_1|}<\frac{b}{c}, \frac{1}{|x_2|}<\frac{b}{c}$，所以 $|x_1|>\frac{c}{b}, |x_2|>\frac{c}{b}.$　②

综合①、②可得

$\frac{c}{b}<|x_1|<\frac{b}{a}, \frac{c}{a}<|x_2|<\frac{b}{a}.$

例 4. 试确定一切有理数 r，使得关于 x 的方程 $rx^2+(r+2)x+r-1=0$ 有根且只有整数根.

解：若 $r=0$，则方程化为 $2x-1=0$，解得 $x=\frac{1}{2}$ 不是整数.

若 $r\neq0$，设方程的两个根为 x_1 和 $x_2(x_1\leq x_2)$，则由韦达定理，得

$x_1+x_2=-\frac{r+2}{r}, x_1x_2=\frac{r-1}{r}.$

于是 $2x_1x_2-(x_1+x_2)=2\left(\frac{r-1}{r}\right)+\frac{r+2}{r}=3$,

$4x_1x_2-2(x_1+x_2)+1=7$,

$(2x_1-1)(2x_2-1)=7$.

因为 x_1 和 x_2 为整数,且 $x_1\le x_2$,所以

$\begin{cases}2x_1-1=1\\2x_2-1=7,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}2x_1-1=-7\\2x_2-1=-1\end{cases}$.

由 $\begin{cases}2x_1-1=1\\2x_2-1=7,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x_1=1\\x_2=4.\end{cases}$ $\frac{r-1}{r}=x_1x_2=4$,

所以 $r=-\frac{1}{3}$.

由 $\begin{cases}2x_1-1=-7\\2x_2-1=-1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x_1=-3\\x_2=0\end{cases}$. $\frac{r-1}{r}=x_1x_2=0$,

所以 $r=1$.

故所求一切有理数 r 为 $-\frac{1}{3}$ 和 1.

例 5. a 是大于零的实数,已知存在唯一的实数 k,使得关于 x 的二次方程 $x^2+(k^2+ak)x+1999+k^2+ak=0$ 的两个根均为质数.求 a 的值.

解:设方程的两个质数根为 p,q.由韦达定理得

$p+q=-k^2-ak$ ①

$pq=1999+k^2+ak$ ②

①+②,得 $p+q+pq=1999$,即 $pq+p+q+1=2000$.

所以 $(p+1)(q+1)=2^4\times5^3$. ③

由③知,p,q 显然均不能为 2,故必为奇数.

所以 $\frac{p+1}{2}$ 和 $\frac{q+1}{2}$ 均为整数,且 $\frac{p+1}{2}\cdot\frac{q+1}{2}=2^2\times5^3$.

若 $\frac{p+1}{2}$ 为奇数,必有 $\frac{p+1}{2}=5^r(r=1,2,3)$.则 $p=2\times5^r-1$ 为合数,矛盾!

所以$\frac{p+1}{2}$为偶数，同理，$\frac{q+1}{2}$也为偶数，因此$\frac{p+1}{4}$和$\frac{q+1}{4}$均为整数且$\frac{p+1}{4}\cdot\frac{q+1}{4}=5^3$，不妨设 $p\leq q$，$\frac{p+1}{4}=1$ 或 5.

当$\frac{p+1}{4}=1$ 时，$\frac{q+1}{4}=5^3$，$p=3$，$q=499$，$p=3$，$q=499$ 均为质数.

当$\frac{p+1}{4}=5$ 时，$\frac{q+1}{4}=5^2$，得 $p=19$，$q=99$，q 为合数，不合题意.

综上可知 $p=3$，$q=499$. 代入①，得 $k^2+ak+502=0$.　④

依题意，方程④有唯一的实数解.

所以 $\Delta=a^2-4\times502=0$，故 $a=2\sqrt{502}$.

例 6. 如果 $2(p+q+s)=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$ 且 $x^2+\alpha x-p=0$ 的两个根为 β 和 γ，$x^2+\beta x-q=0$ 的两个根为 γ 和 α. 求作：以 α 和 β 为根的的二次方程.

解：由 β 和 γ 是 $x^2+\alpha x-p=0$ 的两个根，根据韦达定理，得

$\beta+\gamma=-\alpha$　①

$\beta\gamma=-p$　②

由 γ 和 α 是 $x^2+\beta x-q=0$ 的两个根，根据韦达定理，得

$\alpha+\gamma=-\beta$　③

$\alpha\gamma=-q$　④

由①+③知　$\alpha+\beta=-\gamma$　⑤

即　$\alpha+\beta+\gamma=0$.

平方得　$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta+2\beta\gamma+2\alpha\gamma=0$

但　$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=2(p+q+s)$

所以　$2p+2q+2s+2\alpha\beta+2\beta\gamma+2\alpha\gamma=0$

$2p+2q+2s+2\alpha\beta+(-2p)+(-2q)=0$

所以　$\alpha\beta=-s$，

因此由 $\alpha+\beta=-\gamma$ 及 $\alpha\beta=-s$ 得，以 α，β 为根的一元二次方

程是

$$x^2+\gamma x-s=0.$$

习题 10.3

1. 已知方程 $x^2+px+q=0$ 的两个根都是正整数,且 $p+q=198$,试求方程的这两个正整数根.

2. 若两个质数 p,q 是整系数方程 $x^2-99x+m=0$ 的两根.试求 $\frac{q}{p}+\frac{p}{q}$ 的值.

3. 设 a、b 是方程 $x^2+px+1=0$ 的两个实根,c、d 是方程 $x^2+qx+1=0$ 的两个实根.

求证:$(a-c)(b-c)(a+d)(b+d)=q^2-p^2$.

4. 如果方程 x^2+px+q 的一根为另一根的 2 信,求证:$q=\frac{2}{9}p^2$.

5. 设方程 $x^2-402x+k=0$ 的一根加 3 恰等于另一根的 80 倍.求 k 的值.

6. a 为实数,关于 x 的方程 $x^2-ax+a=0$ 有二实根 α、β、试证:$\alpha^2+\beta^2\geqslant2(\alpha+\beta)$.

7. 已知 a,b,c,d 是非零实数,c 和 d 是 $x^2+ax+b=0$ 的根.a 和 b 是 $x^2+cx+d=0$ 的根、求 $a+b+c+d$ 的值.

8. 关于 x 的方程 $x^2-ax+4=0(a<0)$ 的实根是 x_1,x_2,求:$\sqrt{\frac{x_1}{x_2}}+\sqrt{\frac{x_2}{x_1}}$ 的值.

§10.4 一元二次方程与整除性问题

一元二次方程是初三年级代数的重点内容.纵向看,二次三项式的因式分解,一元二次方程的根,二次函数组成了一条知

识链．二次函数的零点，就是对应的一元二次方程的根，而一元二次方程的根，是由对应的二次三项式分解为两个一次式的乘积分别等于 0 来求得的．从一元二次方程本身看，根的判别式，求根公式，韦达定理等内容极为丰富．并且由二次方程的系数与多种知识存在联系，使其又具有综合性．以一元二次方程课内知识为载体，通过多渠道开发与其它知识的联系，对提高能力、开发智力，发展学生的数学素质大有益处．下面我们仅就整数系数、根为整数的一元二次方程，开发方程与整数整除之间的某些联系．

一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根设为 x_1,x_2，若 x_1,x_2 均为整数，由韦达定理

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a}\text{为整数,}$$

$$x_1x_2=\frac{c}{a}\text{也为整数.}$$

由 $a\neq0$ 为整数，可知 b,c 均为整数，且 $a|b,a|c$. 因此可得

定理　a 为非零整数，若方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两个整数根，则 b、c 也是整数．并且 $a|b,a|c$.

方程两边同时除以 a，原方程可化为系数为整数的简化二次方程 $x^2+px+q=0$ 的形式．其中 $p=\frac{b}{a},q=\frac{c}{a}$.

例 1. 若 p 和 q 是质数，$x^2-px+q=0$ 有正整数根 α、β.

求：$p^q+q^p+\alpha^\beta+\beta^\alpha$ 之值．

分析：要求 $p^q+q^p+\alpha^\beta+\beta^\alpha$ 之值，必须求出 p,q,α,β 之值，应设法依韦达定理及 α,β 是正整数及 p,q 为质数的条件确定出 α,β,p,q 之值即可．

解：∵　α,β 是 $x^2-px+q=0$ 的两个正整数根，根据韦达定理，$\alpha\beta=q$.

但 q 为质数，只能分解为 $1\times q$，所以 α,β 分别等于 1 与 q. 这时，$p=\alpha+\beta=1+q>2$.

因 p,q 都是质数，且为相邻的差为 1 的两个质数，必一奇一偶，只能 $p=3,q=2$.

于是求得 α,β 分别取 1 与 2.

$\therefore\quad p^q+q^p+\alpha^\beta+\beta^\alpha$

$=3^2+2^3+1^2+2^1=20.$

例 2. 若 k 为正整数，一元二次方程

$(k-1)x^2-px+k=0$

有两个正整数根.

求：$k^{kp}(p^p+k^k)$的值.

解：因为 k 是正整数，方程是一元二次方程.

$\therefore\quad k-1\neq0\Rightarrow k\neq1$，因此 $k\geqslant2$.

设　方程二正整数根为 x_1、x_2

则 $x_1x_2=\dfrac{k}{k-1}\Rightarrow k-1\mid k.$

由于 $k-1$ 与 k 互质，当 $k-1\neq1$ 时，$\dfrac{k}{k-1}$不能是整数，所以只能 $k-1=1$. 即 $k=2$.

这时方程二根的积为 $x_1x_2=2$.

只能 x_1,x_2 分别为 1 与 2，所以 $p=3$.

因此，$k^{kp}(p^p+k^k)=2^{2\times3}(3^3+2^2)=1984.$

细心的读者不难发现，若根据我们给出的定理，将使证明简化. 请读者自己思考写出证明，还会发现例 1，例 2 都源于 $x^2-3x+2=0$ 这个方程.

例 3. 试找出所有这样的 a 值，它们使得方程 $x^2-ax+9a=0$ 的根为整数.

解：设 x_1,x_2 是方程 $x^2-ax+9a=0$ 的整数根，由韦达定理

$$x_1+x_2=a$$

$$x_1x_2=9a.$$

所以　$x_1x_2=9(x_1+x_2)$

或　$x_1x_2-9x_1-9x_2+81=81$

即　$(x_1-9)(x_2-9)=81$

但　$81=(+1)\times(+81)=(-1)\times(-81)$

$=(+3)\times(+27)=(-3)\times(-27)$

$=(+9)\times(+9)=(-9)\times(-9)$.

共有六种分解方式.

因而 $a=x_1+x_2=(x_1-9)+(x_2-9)+18$.

将 x_1-9, x_2-9 分别代入上述六组值,就可以求得相应的六个 a 值,即 $a=100,-64,48,-12,,36,0$.

再直接检验,所求 a 的上述六个值均合于题设条件的要求.所以 a 的值为 $100,-64,48,-12,36,0$.

例 4. 已知方程 $x^2-ax+(b+1)=0$ 的两个根均为正整数.

试证:a^2+b^2 必为合数.

证明:设方程 $x^2-ax+(b+1)=0$ 的两个根为 x_1,x_2,由于 x_1,x_2 均为正整数,且

$$x_1+x_2=a$$

$$x_1x_2=b+1$$

可知 a 为正整数,b 为非负整数,所以 a^2+b^2 是正整数.

因此,$a^2=(x_1+x_2)^2=x_1{}^2+x_2{}^2+2x_1x_2$,

$b^2=(x_1x_2-1)^2=x_1{}^2x_2{}^2-2x_1x_2+1$.

$$\begin{aligned}\therefore\quad a^2+b^2&=x_1{}^2+x_2{}^2+x_1{}^2x_2{}^2+1\\&=x_2{}^2(1+x_1{}^2)+(1+x_1{}^2)\\&=(x_1{}^2+1)(x_2{}^2+1)\end{aligned}$$

$\because$　x_1,x_2 均为正整数,$x_1{}^2+1>1$,$x_2{}^2+1>1$.

$\therefore$　$x_1{}^2+1$ 为 a^2+b^2 的一个不为 1 也不等于 a^2+b^2 自身的因子,所以 a^2+b^2 是一个合数.

例 5. 如果一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的系数都是奇数.试证明:若方程有实根,则方程的根不能是有理数.

证明:方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根若为有理数.当且仅当

b^2-4ac是完全平方数．

现 a,b,c 均为奇数，不妨设

$a=2p+1,b=2n+1,c=2q+1$，则

$$\begin{aligned}&b^2-4ac\\=&(2n+1)^2-4(2p+1)(2q+1)\\=&4n^2+4n+1-16pq-8p-8q-3\\=&8\left(\frac{n(n+1)}{2}-2pq-p-q-1\right)+5\end{aligned}$$

其中易知$\frac{n(n+1)}{2}$为整数．

b^2-4ac 是个奇数，所以它只能是奇数的平方，上式表明 b^2-4ac 是被 8 除余 5 的数．

但每个奇数只能是 $4k\pm1$ 的形式，它的平方

$(4k\pm1)^2=16k^2\pm8k+1=8(2k^2\pm k)+1$

因此，奇数的平方被 8 除余 1.

由于 b^2-4ac 被 8 除余 5，所以 b^2-4ac 不能是完全平方数．

因此，方程 $ax^2+bx+c=0$ 当 a、b、c 均为奇数时，若有实根，则实根不能是有理数．

例 6. 甲、乙、丙、丁四人分别按下面的要求作一个解为 x_1，x_2 的一元二次方程 $x^2+px+q=0$.

甲：p,q,x_1,x_2 都取被 3 除余 1 的整数；

乙：p,q,x_1,x_2 都取被 3 除余 2 的整数；

丙：p,q 取被 3 除余 1 的整数，x_1,x_2 取被 3 除余 2 的整数；

丁：p,q 取被 3 除余 2 的整数，x_1,x_2 取被 3 除余 1 的整数；

问：甲、乙、丙、丁是否能按上述要求各自作出方程？若可以作出，请你写出一个这样的方程；若不能作出，请你说明理由．

解：被 3 除余 1 的整数可以表为 $3n+1$ 型，被 3 除余 2 的整数可以写为 $3n+2$ 型(其中 n 为整数)

若 x_1,x_2 都取 $3n+1$ 型的数，

设 $x_1=3n_1+1, x_2=3n_2+1$,(n_1, n_2 为整数)由韦达定理

$p=-(3n_1+1+3n_2+1)=-3(n_1+n_2+1)+1$,

$q=(3n_1+1)(3n_2+1)=3(3n_1n_2+n_1+n_2)+1$

即　p,q 也都是形如 $3n+1$ 的整数,而不能为形如 $3n+2$ 的整数.所以丁不能写出方程,而甲可以作出方程,比如 $x_1=1, x_2=1$,则 $p=-2, q=1$.

方程 $x^2-2x+1=0$ 即合甲的要求.

若 x_1, x_2 都是形如 $3n+2$ 的数,$x_1=3n_1+2, x_2=3n_2+2$.(n_1, n_2 均为整数)

则

$$\begin{aligned}p&=-(3n_1+2+3n_2+2)\\&=-3(n_1+n_2+2)+2,\\q&=(3n_1+2)(3n_2+2)\\&=3(3n_1n_2+2n_1+2n_2+1)+1.\end{aligned}$$

可见,当 x_1, x_2 为形如 $3n+2$ 的整数时,p 为形如 $3n+2$ 的整数,而 q 为形如 $3n+1$ 的整数,也就是 p、q 不能同为$3n+1$或同为 $3n+2$ 型的整数.

因此,乙、丙两人作不出符合要求的方程.

将整系数整根的一元二次方程与整数整除问题联系起来内容非常丰富.作这类习题,既可以巩固一元二次方程所学的知识,又可以复习整数整除的知识,增强普遍联系的辩证观点,趣意盎然.

习题 10.4

1. 如果整系数的二次函数 $p(x)=ax^2+bx+c$,当 $x=0, x=1$ 时的值都是奇数.

求证:方程 $p(x)=0$ 没有整数根.

2. 求所有正实数 a,使得方程 $x^2-ax+4a=0$ 仅有整数根.

3. 若 p,q 是自然数,方程 $px^2-qx+1985=0$ 的两个根都

是质数，求 $12p^2+q$ 的值．

4. 不解方程，证明方程 $x^2-1989x+1989=0$ 无整数根.

5. 方程 $(x-a)(x-8)-1=0$ 有两个整数根，确定 a 的值．

6. 已知 a、b、c 是三个两两不同的奇质数，方程

$(b+c)x^2+(a+1)\sqrt{5}x+225=0$ 有两个相等的实数根．

(1)求 a 的最小值；

(2)当 a 达到最小值时，解这个方程．

7. p,q 都是正整数，方程 $2px^2-qx+1990=0$ 的两个根都是质数，求 $1786p^{1990}+q$ 的值．

8. 已知 k 是正整数，关于 x 的二次方程 $x^2+x+10=k(k-1)$ 有一个正整数根，求这个根及 k 的值．

9. 已知方程 $x^2+px+q=0$ 有两个不相等的整数根，p,q 是质数，求这方程的两个根．

10. 已知方程 $x^2-ax+a+1=0$ 的两个根均为质数．确定 a 的值．

§10.5　二次函数与一元二次方程

代数式 ax^2+bx+c 是二次三项式，而 $ax^2+bx+c=0$ 是一元二次方程，$f(x)=ax^2+bx+c$ 称为二次函数. $ax^2+bx+c\geqslant 0$（或$\leqslant 0$）则是一元二次不等式. 这四部分知识并不是彼此孤立的. 大家知道，二次三项式的因式分解联系着一元二次方程求解，而一元二次方程的两个实根正是二次函数的零点，零点分 x 轴所成的区间对应着相应的一元二次不等式的解的区间. 因此，由二次三项式→一元二次方程→二次函数→一元二次不等式，构成一个有机的“知识链”，孤立看这些知识，你会觉得呆板无味，如果联系起来看，你就会感到妙趣生辉.

对二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$. 其图象是抛物线. 上式两边同乘以 $4a$，得

$$\begin{aligned}4ay&=4a^2x^2+4abx+4ac\\&=(2ax)^2+2\cdot 2ax\cdot b+b^2+4ac-b^2\\&=(2ax+b)^2+(4ac-b^2),\end{aligned}$$

$$\therefore\quad y=\frac{1}{4a}(2ax+b)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}.$$

易知抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 的对称轴为 $x=-\frac{b}{2a}$，其顶点坐标为$\left(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}\right)$.

当 $a>0$ 时，抛物线开口向上，y 取最小值，$y_{min}=\frac{4ac-b^2}{4a}$.

当 $a<0$ 时，抛物线开口向下，y 取最大值，$y_{max}=\frac{4ac-b^2}{4a}$.

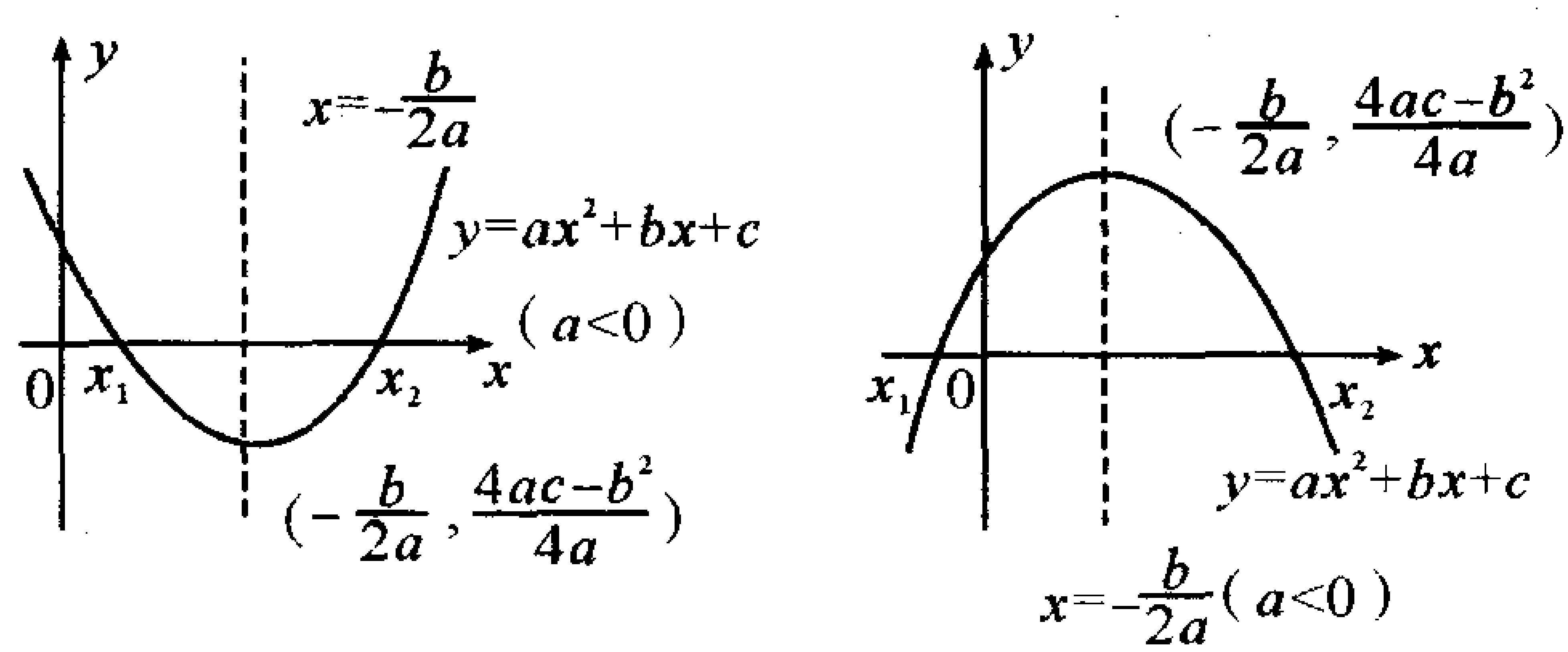


图 1

从图 1 可直观地看出，抛物线是一条连续的曲线，正是由于这一直观性质，我们可以利用二次函数的图象来确定一元二次不等式的解的区间. 也正是利用这个直观性质，我们可以看到，在函数由取负值变到取正值的过程中必然要经过函数的零点.

定理　关于 x 的二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$. 如果 $m<n$，有 $f(m)<0, f(n)>0$(或 $f(m)>0, f(n)<0$)，则在区间 (m,n) 上，$f(x)$ 至少存在一个根.

应用这个定理，可以运用函数的观点来研究一元二次方程.

例 1. 试证明对所有实数 a，关于 x 的二次方程

$(a^3-2a^2+7a)x^2-(a^3+4a^2+9a+6)x+5a^2+4=0$ 至少有一个实根.

分析:如果用判别式法,得出一个关于参数 a 的 6 次多项式,要判定这个 6 次多项式的值对任意 a 都非负,是很繁难的事情,然而利用上述定理的结论,解法却非常简单.

证明:设 $f(x)=(a^3-2a^2+7a)x^2-(a^3+4a^2+9a+6)x+5a^2+4$,

易知 $f(0)=5a^2+4>0$,

$$f(1)=-a^2-2a-2=-(a+1)^2-1<0.$$

根据定理得出,方程 $f(x)=0$ 在区间 $(0,1)$ 上至少有一个实数根.

例 2. 已知 $2a+3b+6c=0$,求证:关于 x 的二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 在区间 $(0,1)$ 上至少有一个实数根.

证明:设 $f(x)=ax^2+bx+c$,则

$f(0)=c, f(1)=a+b+c, f(\frac{1}{2})=\frac{a}{4}+\frac{b}{2}+c$,

因此,$2a+3b+6c=4f(\frac{1}{2})+f(0)+f(1)$.

由已知 $2a+3b+6c=0$,

所以,$4f(\frac{1}{2})+f(0)+f(1)=0$.

(1)如果 $f(\frac{1}{2})=0$,$\frac{1}{2}\in(0,1)$,表明命题成立;

(2)如果 $f(\frac{1}{2})\neq0$,则 $f(0)$ 与 $f(1)$ 不全为 0,

$f(0)$ 与 $f(1)$ 中至少有一个与 $f(\frac{1}{2})$ 的符号相反.

①若 $f(0)$ 与 $f(\frac{1}{2})$ 符号相反,则在 $(0,\frac{1}{2})$ 中 $f(x)$ 至少有一个根,也就是在 $(0,1)$ 中 $f(x)$ 至少有一个根.

②若 $f(1)$ 与 $f(\frac{1}{2})$ 符号相反，则在 $(\frac{1}{2},1)$ 中 $f(x)$ 至少有一个根，也就是在 $(0,1)$ 中 $f(x)$ 至少有一个根.

综合以上讨论可得，$f(x)$ 在 $(0,1)$ 上至少有一个实数根.

例 3. 已知 $a(a-b+c)<0$，求证 $b^2>4ac$.

证明：由条件 $a(a-b+c)<0$，易知 $a\neq0$.

研究函数 $f(x)=ax^2+bx+c$. 易知

$$f(-1)=a-b+c,$$

所以 $a(a-b+c)<0$ 等价于 $af(-1)<0$.

1. 当 $a>0$ 时，抛物线 $f(x)=ax^2+bx+c$ 开口向上，此时 $f(-1)<0$，所以 $f(x)$ 与 Ox 轴有两个交点，即 $ax^2+bx+c=0$ 有两个实根.

2. 当 $a<0$ 时，抛物线 $f(x)=ax^2+bx+c$ 开口向下，此时 $f(-1)>0$，所以 $f(x)$ 与 Ox 轴有两个交点，即 $ax^2+bx+c=0$ 有两个实根.

综合①，②可知，当 $a(a-b+c)<0$ 时，$f(x)=ax^2+bx+c$ 的图象总与 Ox 轴有两个交点，即一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 总有两个不等的实根. 所以判别式 $\Delta=b^2-4ac>0$.

即有　$b^2>4ac$.

注　例 3 本是证明不等式的问题，根据求证 $b^2>4ac$ 的特点，联想到构造一个二次函数. $f(x)=ax^2+bx+c$ 来进行研讨，为二次函数证明不等式的应用拓宽了领域.

为了熟悉例 3 的方法，建议读者自己完成下面类似的问题：

已知 $(a+b+c)c<0$，求证 $b^2>4ac$.

例 4. 证明不等式 $\sqrt[5]{2}+7<8\sqrt[10]{2}$.

分析：一拿到本题，开始不知如何下手，利用计算方法是不好进行的. 怎么下手呢？我们发现，$(\sqrt[10]{2})^2=\sqrt[5]{2}$，于是可令 $a=\sqrt[10]{2}$，则 $\sqrt[5]{2}=a^2$.

此时，所要证明的不等式即为 $a^2+7<8a$，或者证明 a^2-8a

$+7<0$. 这样，证明$\sqrt[5]{2}+7<8\sqrt[10]{2}$的问题，在设辅助未知数$a=\sqrt[10]{2}$的条件下转化为等价的问题：证明$a^2-8a+7<0$. 这时二次函数的知识就有了用武之地.

证明：令$a=\sqrt[10]{2}$，则$\sqrt[5]{2}=(\sqrt[10]{2})^2=a^2$.

要证的不等式等价于证明$a^2-8a+7<0$.

为此，我们研究二次函数

$f(x)=x^2-8x+7$，

容易得出，它的两个根为$x_1=1$，$x_2=7$（如图2）.

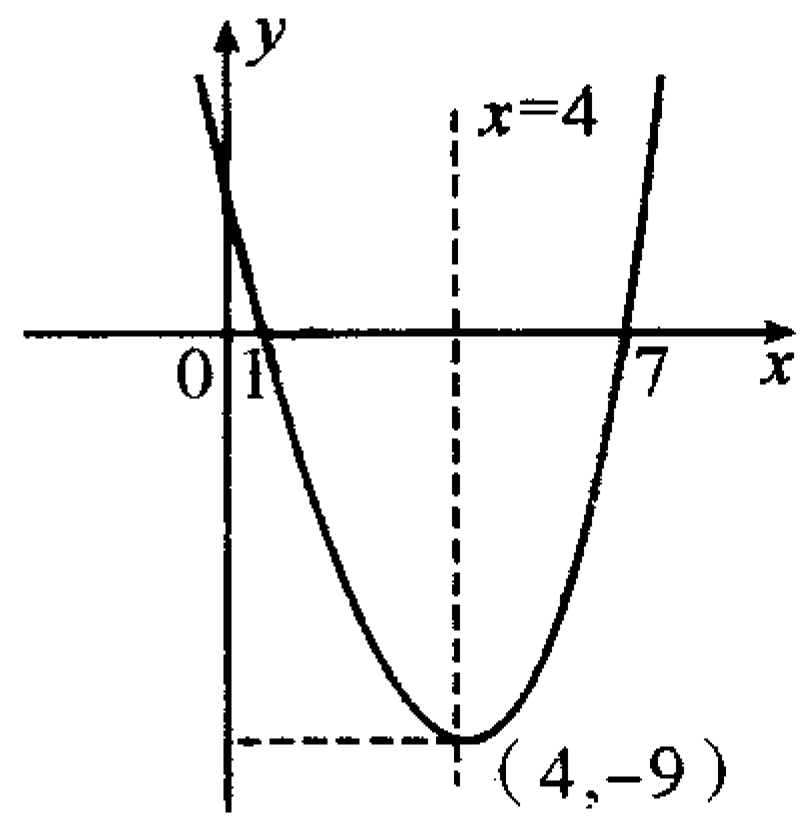


图 2

所以对任意$x\in(1,7)$都有$x^2-8x+7<0$.

因为$1<2<1024=2^{10}$，所以$a=\sqrt[10]{2}\in(1,7)$，

当然有$(\sqrt[10]{2})^2-8(\sqrt[10]{2})+7<0$成立，也就是$\sqrt[5]{2}+7<8\sqrt[10]{2}$.

有不少表面看不是二次函数的问题，通过构造二次函数，或视为二次函数，却可以得到妙解.

例 5. 证明两个相邻自然数的乘积被25除的余数不等于1.

证明：假设存在自然数n，使得$n(n+1)$被25除的余数等于1，这就意味着存在自然数k.

使得$n(n+1)=25k+1$， ①

①可看作关于n的二次方程

$n^2+n-(25k+1)=0$，

依题设应有整数解.

另一方面，$\Delta=1+4(25k+1)=5(20k+1)$，

由于形如$20k+1$的数被5除余1，所以Δ被5整除，但不被25整除，因此Δ不是完全平方数，而$n=\dfrac{1+\sqrt{\Delta}}{2}$，所以方程①的根不能是整数，矛盾.

因此得证，两个相邻自然数的乘积被 25 除的余数不能等于 1.

例 6. 证明恒等式

$$\frac{a^2(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^2(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^2(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}=x^2.$$

证明：假设上式不是恒等式，于是

令 $f(x)=\frac{a^2(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^2(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^2(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}-x^2$，则有 $f(x)\neq 0$.

视 $f(x)$ 为关于 x 的二次函数，其图象是个抛物线，与 x 轴至多有两个交点，换言之，$f(x)$ 至多有两个零点.

另一方面，易知 $a\neq b, b\neq c, c\neq a$.

且有 $f(a)=0, f(b)=0, f(c)=0$（代值验算！）

即　$f(x)$ 有至少三个不同的零点，得出矛盾.

所以，应有 $f(x)\equiv 0$ 成立.

即　$\frac{a^2(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^2(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^2(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}=x^2$ 是恒等式.

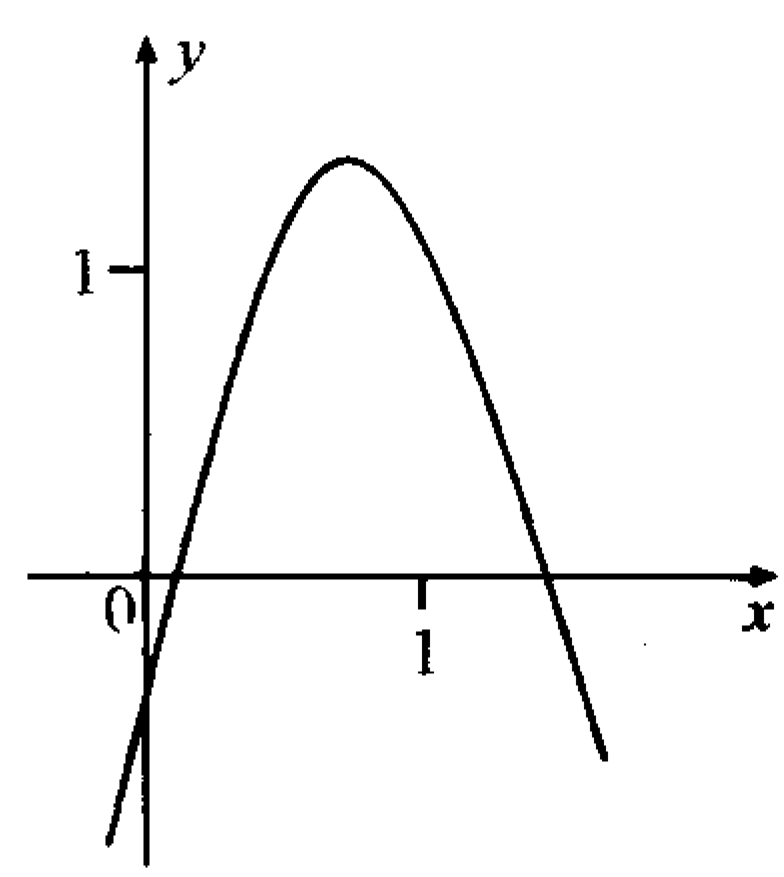
习题 10.5

1. 已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图像如图所示.

则下列 6 个代数式 $ab, ac, a+b+c, a-b+c, 2a+b, 2a-b$ 中，其值为正的式子个数为

(A) 2 个；　　(B) 3 个；

(C) 4 个；　　(D) 4 个以上.



（习题 1 图）

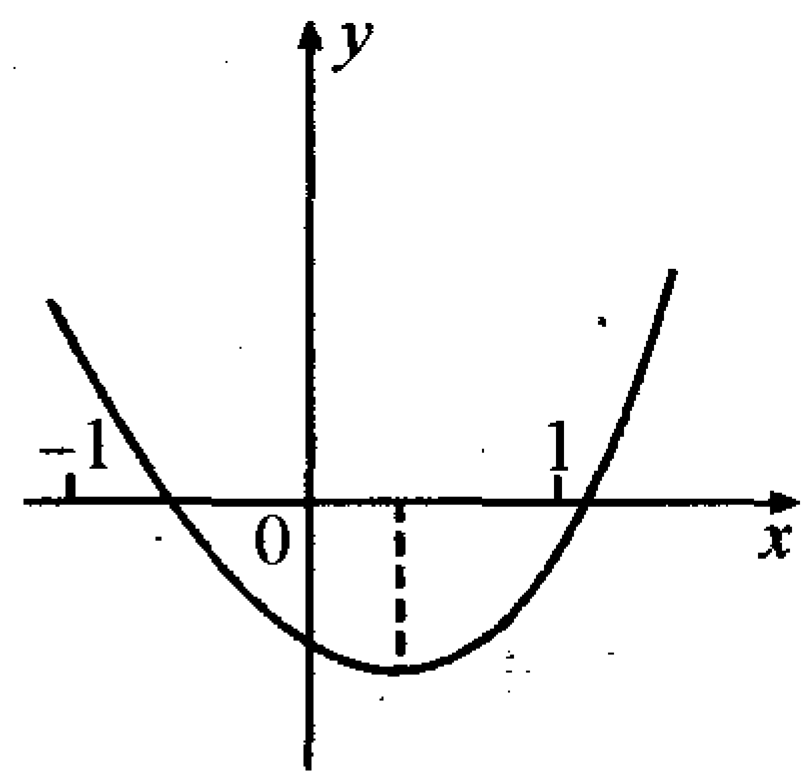
2. 已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图像如图所示.

并设 $M=|a+b+c|-|a-b+c|+$

$|2a+b|-|2a-b|$. 则

(A)$M>0$, (B)$M=0$,

(C)$M<0$, (D)不能确定 M 为正,为负或为 0



(习题 2 图)

3. 满足下列两个条件:

(1)对所有的自然数 x, $x^2-2001x+n\geqslant 0$;

(2)存在自然数 x_0,使 $x_0^2-2002x_0+n<0$ 的正整数 n,共有多少个?

4. 已知抛物线 $y=x^2+(k+1)x+1$ 与 x 轴的两个交点 A, B 不全在原点的左侧,抛物线顶点为 C,若 ΔABC 恰为等边三角形. 试求 k 的值.

5. 证明:曲线 $y=\frac{1}{5}(x^2-x+1)$ 不可能经过两个坐标都是整数的点.

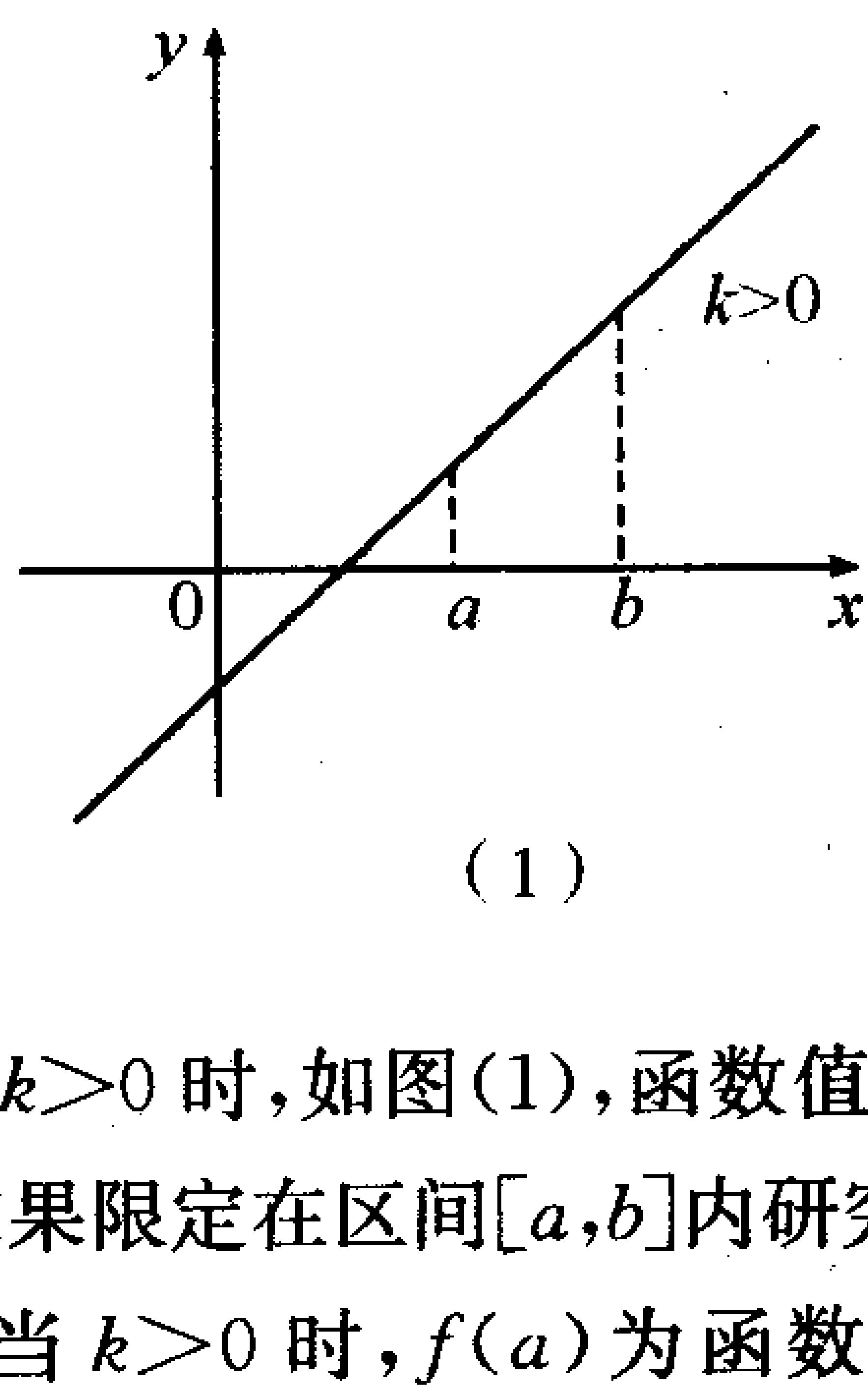
6. 小明求解一个整系数的一元二次方程,计算该方程的判别式的值恰等于 1999,求证:小明的演算必定有误.

第 11 章　函数的应用

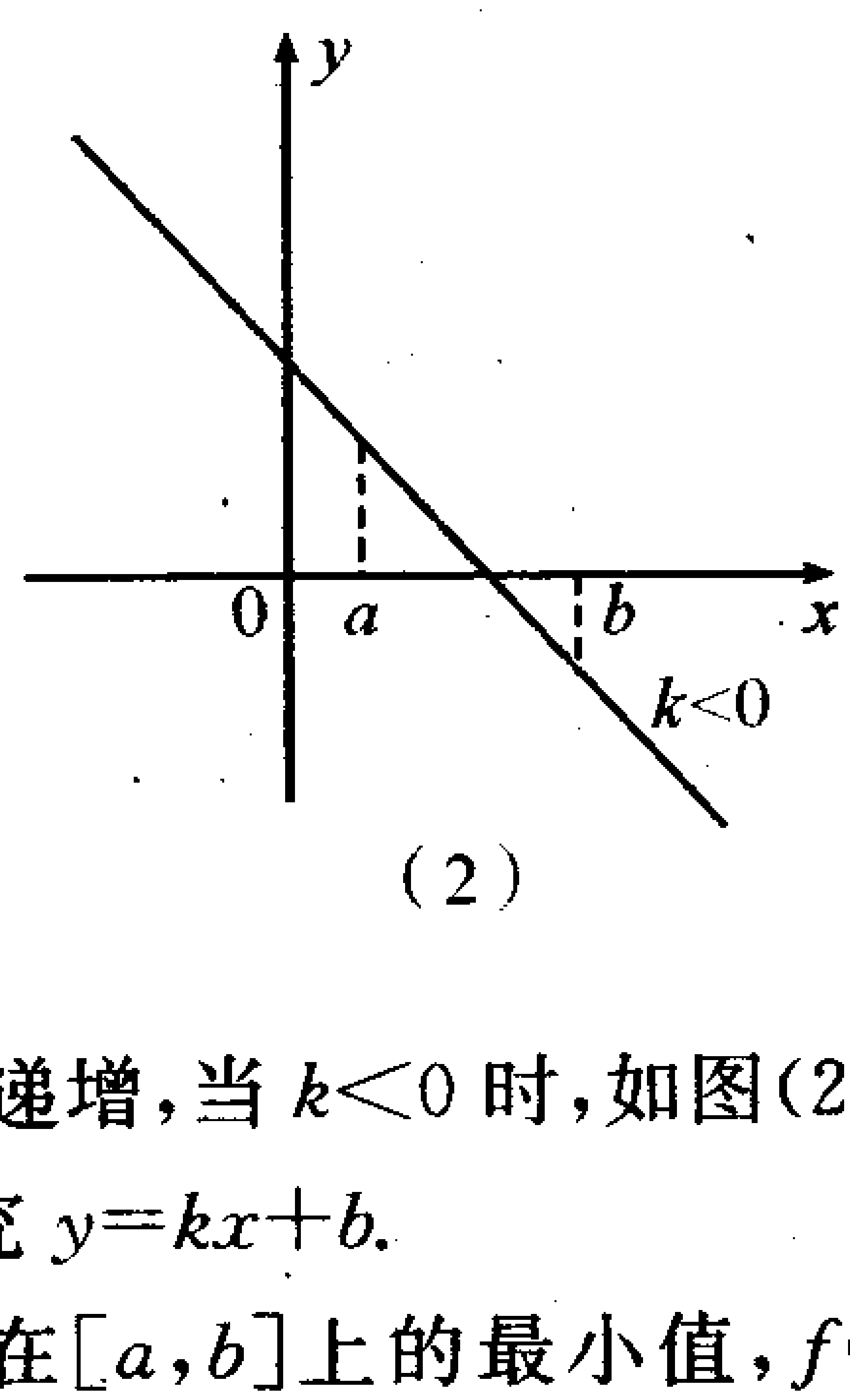
函数的极值问题是中学数学中的重要内容. 也是数学竞赛中解联系实际问题的有效数学工具，在初中阶段主要涉及一次函数在区间上的极值，和二次函数的极值. 我们分别加以介绍，进行研究.

§11.1　一次函数的极值

一次函数 $y=kx+b$，也称为线性函数，其图形



（1）



（2）

当 $k>0$ 时，如图(1)，函数值递增，当 $k<0$ 时，如图(2)函数值递减，如果限定在区间$[a,b]$内研究 $y=kx+b$.

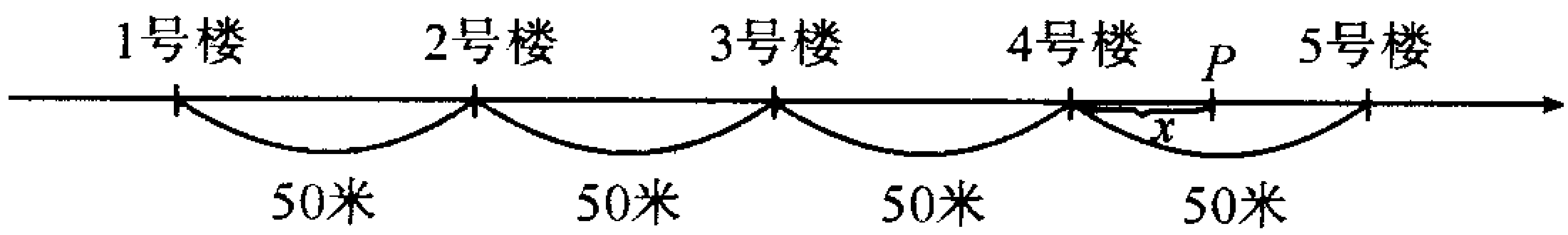
则当 $k>0$ 时，$f(a)$为函数在$[a,b]$上的最小值，$f(b)$为最大值，

当 $k<0$ 时，$f(b)$为函数在$[a,b]$上的最小值，$f(a)$为最大值.

例 1. 一条直路旁按从左至右的顺序编号为 1 号，2 号，3 号，4 号，5 号共五栋宿舍楼. 相邻两楼间距为 50 米，已知第 1 号

楼中恰有 1 名 A 厂的职工，第 2 号楼中恰有 2 名 A 厂的职工，第 3 号楼中恰有 3 名 A 厂的职工，第 4 号楼中恰有 4 名 A 厂的职工，第 5 号楼中恰有 5 名 A 厂的职工. A 厂打算在直路上建一通勤车站，为使这 5 栋楼中所有 A 厂职工到车站所走的路程之和最小，问车站应建在距一号楼多少米的地方？

解：如图所示，要使 A 厂所有职工到车站所走路程之和最小，车站应设于居住职工人数多的楼之间较为合理. 不妨设车站 P 设于 4 号楼与 5 号楼之间，距 4 号楼 x 米($0\leqslant x\leqslant 50$)



则 P 距 5 号楼为 $50-x$ 米.

1 号楼 1 人到 P 共走 $150+x$ 米.

2 号楼 2 人到 P 共走 $2(100+x)$ 米.

3 号楼 3 人到 P 共走 $3(50+x)$ 米.

4 号楼 4 人到 P 共走 $4x$ 米.

5 号楼 5 人到 P 共走 $5(50-x)$ 米.

这 15 名职工到 P 的路程之和 L 是 x 的函数.

$L=(150+x)+2(100+x)+3(50+x)+4x+5(50-x)=750+6x$.（其中 $0\leqslant x\leqslant 50$）

当 $x=0$ 时，即 P 点取在 4 号楼前时，L 最小，为 750 米. 所以车站 P 应在距 1 号楼 150 米处的 4 号楼前.

例 2. 北京和上海同时制成了智能机器人若干台. 除本地应用外，北京可以支援外地 10 台，上海可以支援外地 4 台，现在决定给重庆 8 台，汉口 6 台，若每台机器人的运费如下表：

（单位：百元）

起点＼终点	汉口	重庆
北京	4	8
上海	3	5

北京和上海制成的智能机器人的型号，功能完全相同，应该如何调运，才能使总的运费最省？

解：设由上海调运汉口 x 台（$x\leqslant 4$），运费为 $3x$（百元），北京应再调往汉口 $6-x$ 台，运费为 $4(6-x)$ 百元. 上海所余 $4-x$ 台应运重庆，运费为 $5(4-x)$ 百元，北京所余 $10-(6-x)=4+x$ 台也应全部运重庆，运费为 $8(4+x)$ 百元. 这样，北京，上海两地发出产品 14 台，汉口，重庆两地共接收 14 台.

$$\begin{aligned}\text{总运费 } W &= 3x+4(6-x)+5(4-x)+8(4+x)\\ &= 3x+24-4x+20-5x+32+8x\\ &= 76+2x. \qquad \text{定义域为}(0\leqslant x\leqslant 4)\end{aligned}$$

要使 W 最小，只须 $x=0$，这时总运费 $W=76$（百元）.

答：北京调运汉口 6 台，调运重庆 4 台，上海的 4 台全调运重庆，所用总的运费最小，为 76（百元）.

例 3. 某缝纫社有甲，乙，丙，丁四个小组，甲组每天能缝制 8 件上衣或 10 条裤子；乙组每天能缝制 9 件上衣或 12 条裤子；丙组每天能缝制 7 件上衣或 11 条裤子；丁组每天能缝制 6 件上衣或 7 条裤子，现在上衣和裤子要配套缝制（每套为一件上衣和一条裤子）. 问 7 天中这四个小组最多能缝制多少套衣服？

解：甲、乙、丙、丁四组每天缝制上衣与裤子的数量之比分别是：$\frac{8}{10},\frac{9}{12},\frac{7}{11},\frac{6}{7}$. 对于任意两个组，若 A 组对应分数为 $\frac{a_1}{b_1}$，B 组对应分数是 $\frac{a_2}{b_2}$，且 $\frac{a_1}{b_1}>\frac{a_2}{b_2}$，$A$ 组做 t 条裤子，就要少做 $\frac{a_1}{b_1}t$ 件上

衣，这些上衣让 B 组做，要化$\frac{a_1 t}{b_1 a_2}$天时间，这些时间 B 组可以做

$\frac{a_1 t}{b_1 a_2}b_2=\frac{\frac{a_1}{b_1}}{\frac{a_2}{b_2}}t(>t)$条裤子. 因此，裤子不如由 B 组来做更好. 从而，要满足配套的前提下，A 组应尽量多做上衣，而 B 组应尽量多做裤子.

由于$\frac{6}{7}>\frac{8}{10}>\frac{9}{12}>\frac{7}{11}$，这说明丁组生产上衣的效率最高，丙组生产裤子的效率最高.

于是我们让丁组 7 天都生产上衣，丙组 7 天都生产裤子. 设甲组生产上衣 x 天，生产裤子为 $7-x$ 天. 乙组生产上衣 y 天，则生产裤子 $7-y$ 天，则 4 个组 7 天共生产上衣 $6\times7+8x+9y$ 件，生产裤子 $11\times7+10(7-x)+12(7-y)$件. 依题意，应上衣与裤子配套，

即 $42+8x+9y=77+70-10x+84-12y.$

整数得 $6x+7y=63$

即 $y=9-\frac{6}{7}x\cdots\cdots(*)$

令 $W=42+8x+9y$，把$(*)$式代入 W 中得

$W=42+8x+9(9-\frac{6}{7}x)=123+\frac{2}{7}x.$

因为 $0\leqslant x\leqslant7$. x 为整数，所以当 $x=7$ 时，W 取最大值为 125.

这表明，安排甲，丁组生产上衣 7 天，丙组生产裤子 7 天. 乙组生产上衣 3 天，生产裤子 4 天时，四个组最多可生产制服 125 套.

例 4. 设 $f(x)=|x-p|+|x-15|+|x-p-15|$其中 $0<p<15$.

求 $p\leqslant x\leqslant15$ 时，$f(x)$的最小值.

解：$\because$ $0<p\leqslant x\leqslant15$. $\therefore |x-p|=x-p$.

$|x-15|=15-x$.

又 $x-p\leqslant15-p\Rightarrow x-p-15\leqslant15-p-15\leqslant-p<0$

$\therefore$ $|x-p-15|=-(x-p-15)=p+15-x$.

$\therefore\quad f(x)=(x-p)+(15-x)+(p+15-x)=30-x$

要使 $f(x)$ 最小，只需 x 最大. 但 $0<p\leqslant x\leqslant 15$.

$\therefore$　当 $x=15$ 时，$f(x)$ 的最小值为 $f(15)=15$.

说明：例 3 和例 4 都是可以化为一次函数在区间上求极值的问题 .

习题 11.1

1. 有人问毕达哥拉斯，共有多少弟子在学校. 毕氏回答：一半学生学数学，四分之一学生学音乐，七分之一学生在休息. 还有不足十名学生在操场，请你想一想，毕达哥拉斯的在校弟子至多能有多少人？

2. 某地有两座面粉仓库和两家面包房. 每天从甲库运出面粉 50 吨，从乙库运出面粉 70 吨，运到这两家面包房. 每天甲面包房需面粉 40 吨，乙面包房需面粉 80 吨. 每吨运费如下表（单位元）

	甲面包房	乙面包房
甲库	120 元	160 元
乙库	80 元	100 元

问如何安排调运，可使总的运费最少？

§11.2　二次函数的最值

对于二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$

利用配方法：$y=ax^2+bx+c=a(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a})$

$$=a(x+\frac{b}{2a})^2+\frac{4ac-b^2}{4a}.$$

所以若 $a>0$,则当 $x=-\frac{b}{2a}$时,$y_{min}=\frac{4ac-b^2}{4a}$;

若 $a<0$,则当 $x=-\frac{b}{2a}$时,$y_{max}=\frac{4ac-b^2}{4a}$.

例 1. 求函数 $y=-\frac{1}{2}x^2-8x+44$ 的最值.

分析:因为 $a=-\frac{1}{2}<0$,所以函数有最大值.可以用配方法,公式法,判别式法三种途径,求得它的最大值.

解:**配方法**:因为 $y=-\frac{1}{2}x^2-8x+44$

$$=-\frac{1}{2}(x^2+16x-88)$$

$$=-\frac{1}{2}(x^2+16x+64-64-88)$$

$$=-\frac{1}{2}(x+8)^2+76$$

所以当 $x=-8$ 时,$y_{max}=76$.

公式法:$\because$ $a=-\frac{1}{2}<0$,函数开口向下,在抛物线顶点处取得最大值.

顶点坐标 $x=-\frac{b}{2a}=\frac{-8}{2\times(-\frac{1}{2})}=-8$

$$y=\frac{4ac-b^2}{4a}=\frac{4\times(-\frac{1}{2})\times 44-8^2}{4\times(-\frac{1}{2})}=76.$$

所以当 $x=-8$ 时. $y_{max}=76$.

判别式法:因为 $y=-\frac{1}{2}x^2-8x+44$.

所以 $x^2+16x+2y-88=0$.

要使 x 为实数,则有 $16^2-4(2y-88)\geqslant 0$.

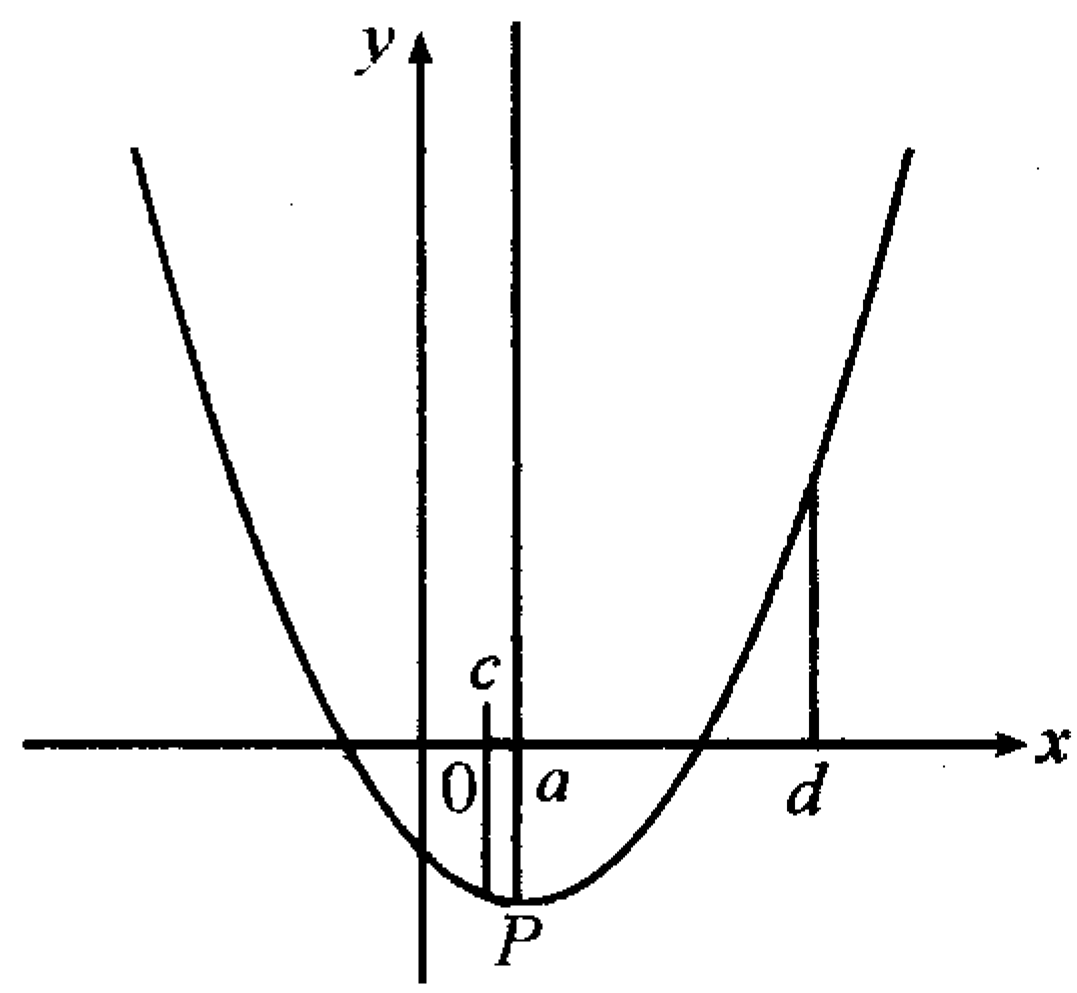
即　$y\leqslant 76$

因此 $y_{max}=76$.

将 $y=76$ 代入 $y=-\frac{1}{2}x^2-8x+44$,解得 $x=-8$.

也就是,当 y 取最大值 76 时,相应的 x 值等于 -8.

在实际应用中,经常要考察在一个区间上二次函数的最值,这时函数会有最大值与最小值.



如图,考察函数 $y=ax^2+bx+c$ 在 $[c,d]$ 上的最大值与最小值.

其方法是,先确定顶点 P 的坐标 $\left(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}\right)$,求出 $f(c)$ 与 $f(d)$ 的值.

(ⅰ)若 $-\frac{b}{2a}\in[c,d]$,则比较 $f(c)$,$f\left(-\frac{b}{2a}\right)=\frac{4ac-b^2}{4a}$,与 $f(d)$,从中选出 y 在区间 $[c,d]$ 上的最大值与最小值.

(ⅱ)若 $-\frac{b}{2a}\notin[c,d]$,则比较 $f(c)$ 与 $f(d)$,确定 y 在区间 $[c,d]$ 上的最大值与最小值.

例 2. 已知 x_1,x_2 是方程 $x^2-(k-2)x+(k^2+3k+5)=0$(k 为实数)的两个实数根,求 $x_1^2+x_2^2$ 的最大值.

解:由韦达定理得

$$
\begin{aligned}
x_1^2+x_2^2 &=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2\\
&=(k-2)^2-2(k^2+3k+5)\\
&=-(k+5)^2+19.
\end{aligned}
$$

又因为方程有两个实根,所以 k 值要受下面条件的约束:

$$\Delta=(k-2)^2-4(k^2+3k+5)\geqslant 0$$

即 $3k^2+16k+16\leqslant 0$

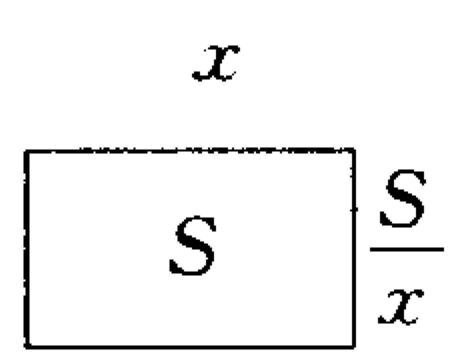
解得 $-4\leqslant k\leqslant -\frac{4}{3}$.

因此，求 $x_1^2+x_2^2$ 的最大值问题，就是求 $-4\leqslant k\leqslant -\frac{4}{3}$ 的条件下函数 $f(k)=-(k+5)^2+19$ 的最大值，由于顶点横坐标 $k=-5\notin[-4,-\frac{4}{3}]$，所以比较 $f(-\frac{4}{3})$，$f(-4)$ 的值，可知，当 $k=-4$ 时，$f(k)$ 在 $[-4,-\frac{4}{3}]$ 上取得最大值为 $f(-4)=18$.

所以 $x_1^2+x_2^2$ 的最大值是 18.

例 3. 在面积为 S 的矩形中，长和宽的长度怎样时，才能使周长最小？

解：设面积为 S 的矩形之长为 x，则宽为 $\frac{S}{x}$，又设周长为 y，



则 $y=2x+\frac{2S}{x}$，即 $2x^2-xy+2S=0$

因为 x 是实数，故判别式 $\Delta\geqslant 0$，即

$y^2-16S\geqslant 0\Rightarrow y\geqslant 4\sqrt{S}$ 或 $y\leqslant -4\sqrt{S}$（不合，舍）

$\therefore\quad y_{min}=4\sqrt{S}$.

由 $4S=2x+\frac{2S}{x}$ 得 $x=\sqrt{S}$.

答：在矩形的长 $x=\sqrt{S}$，此时，宽也为 $\sqrt{S}$ 时，也就是矩形为边长是 $\sqrt{S}$ 的正方形时，周长最小为 $4\sqrt{S}$.

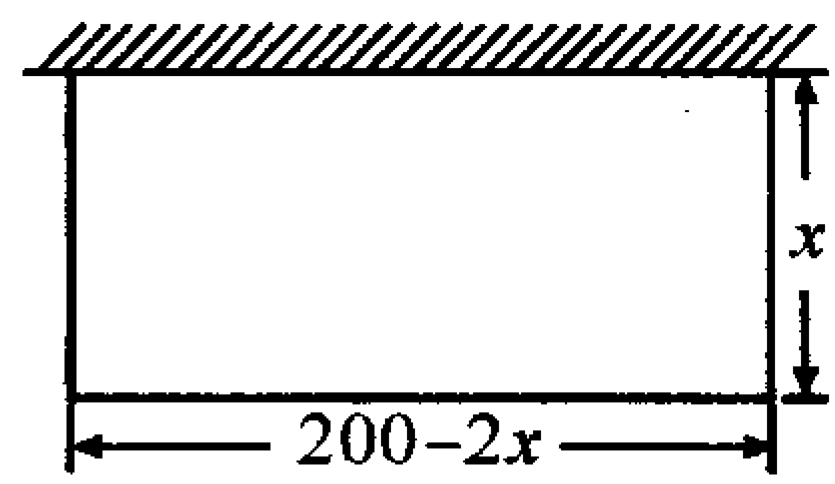
说明：若 $x>0$，$y>0$，则 $\frac{x+y}{2}\geqslant\sqrt{xy}$，其中等号当且仅当 $x=y$ 时成立.

利用这一不等式，也可另解如下：

$$\frac{y}{4}=\frac{x+\frac{S}{x}}{2}\geqslant\sqrt{x\cdot\frac{S}{x}}=\sqrt{S}.$$

所以 $y\geqslant 4\sqrt{S}$. 因此，当且仅当 $x=y$ 时，即 $x=\frac{S}{x}$，$x=\sqrt{S}$ 时，$y_{min}=4\sqrt{S}$.

例 4. 用 200 米长的栅栏沿墙壁围一块园地，围成怎样的矩形，才使这块园地的面积最大？并求这个最大面积.



解：设这个矩形园地的垂直于墙壁的一边长是 x(如图)，它的另一边长就是 $200-2x$，而它的面积是　$S=x(200-2x)$

即　$S=-2x^2+200x=-2(x^2-2\cdot 50x+50^2-50^2)$

$\quad=-2(x-50)^2+5000$

当　$x=50$ 米时，S 有最大面积，最大面积是 5000 平方米.

答：当矩形园地垂直于墙的一边是 50 米，另一边为 100 米时围成的园地面积最大，这个最大面积是 5000 平方米.

例 5. 今建造一个矩形养殖场的围栏，长度每米造价 27 元，宽度每米造价 35 元. 按施工要求，长度与宽度的米数都必须是整数. 问预算 1000 元的造价费，可建成的养殖场最大面积是多少？

解：设矩形养殖场宽为 x 米，长为 y 米，所花费用为 z 元，所围矩形面积为 S 平方米，则有

$35x+27y=z$

于是　$y=\frac{z-35x}{27}$，$S=\frac{x(z-35x)}{27}$

由于 $x(z-35x)=-35(x-\frac{z}{70})^2+\frac{z^2}{140}$

所以当 $x=\frac{z}{70}$ 时，$y=\frac{z}{54}$，S 取最大值为 $\frac{z^2}{70\times 54}$.

因 $z \leqslant 1000$，所以 $S \leqslant \frac{1000^2}{70 \times 54} < 265$.

以下讨论 x, y 可能取的整数值，x, y 的比值应尽可能接近 $54:70$，又由 $35x+27y \leqslant 1000$

知 $x \leqslant 28, y \leqslant 37$.

若 $S=264$，而 $264=2^3 \times 3 \times 11$，最接近 $54:70$ 的 x, y 值是 $x=12, y=22$，此时：$z=35 \times 12+27 \times 22=1014>1000$.

$S=263$ 是质数，不能分解成适合条件要求的 x 与 y；

$S=262=2 \times 131$ 不符合要求.

$S=261=3^2 \times 29, x=9, y=29, z=1098>1000$；

$S=260=2^2 \times 5 \times 13$ 符合条件要求，最接近 $54:70$ 的 x, y 值为 $x=13, y=20$.

此时 $z=35 \times 13+27 \times 20=995<1000$ 符合题意.

答：所围矩形养殖场宽为 13 米，长为 20 米时，最大面积为 260 平方米.

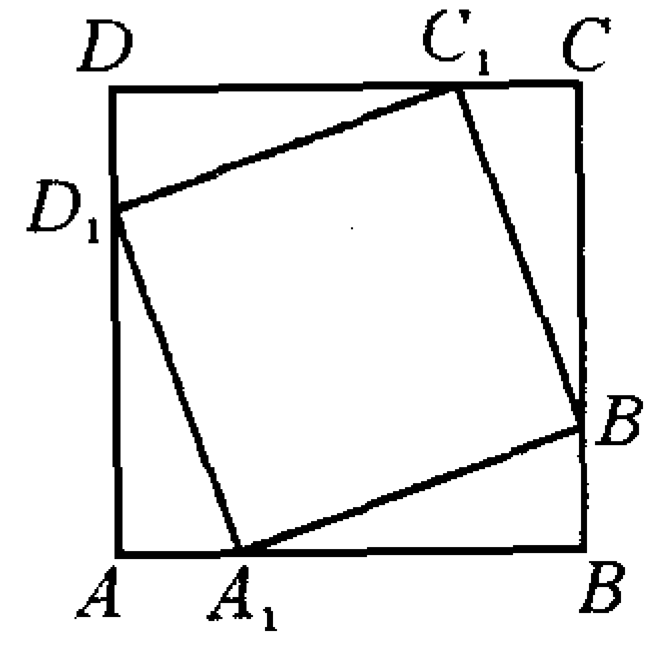
习题 11.2

1. 求 $y=(x-a_1)^2+(x-a_2)^2+\cdots+(x-a_n)^2$ 的最小值.

2. x_1 与 x_2 为方程 $x^2+(m-1)x+(m^2-3m+\frac{9}{4})=0$ 的二实根. 求 $x_1^2+x_2^2$ 的最大值与最小值.

3. 如果对任意两个实数 a, b，定义 $a \bigstar b=\frac{a+2b}{3}$.

求函数 $y=x^2 \bigstar (2x)+2 \bigstar 4$ 的最小值.

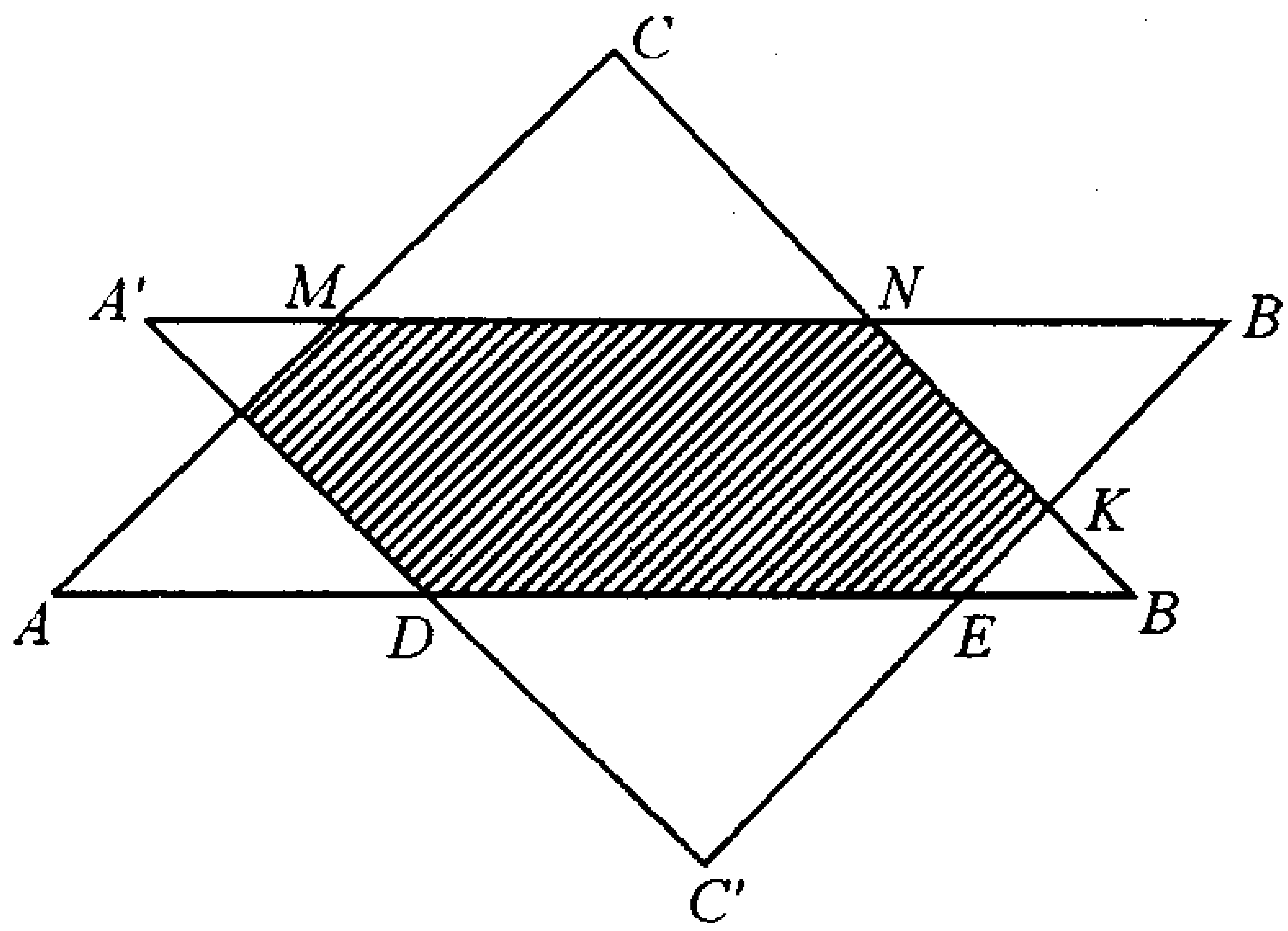


4. 如图 $ABCD$ 与 $A_1B_1C_1D_1$ 都是正方形，其中 A_1, B_1, C_1, D_1 顺次为 AB, BC, CD, DA 上的点. 若 $AB=1$. 求正方形 $A_1B_1C_1D$ 面积的最小值.

5. ΔABC 与 $\Delta A'B'C'$ 是两个直角边都

等于 $2a$ 的等腰直角三角形（如图）叠放在一起. ΔABC 位置固定，直角边 AC，BC 的中点分别是 M、N，保持斜边 $A'B'$ 在直线 MN 上，可使 $\Delta A'B'C'$ 位置左右移动.

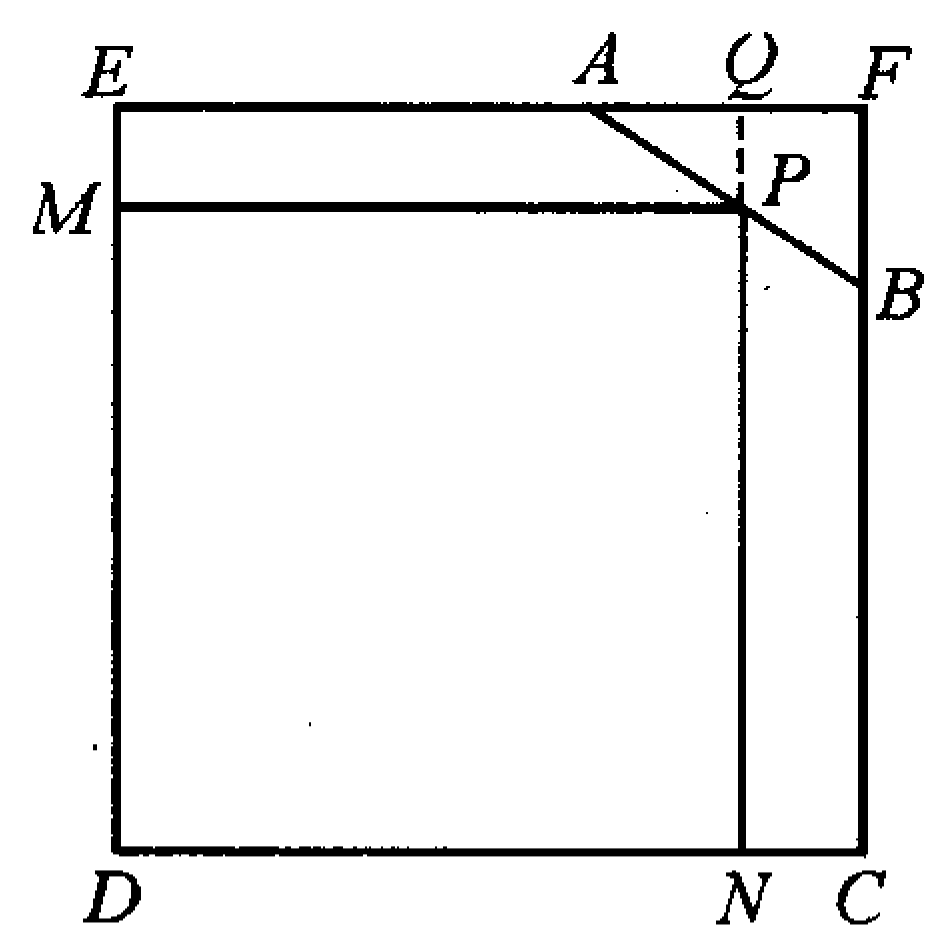
求两个三角形重叠部分（图中阴影部分）面积的最大值.



§11.3　函数极值的应用问题

建立函数关系，运用函数的性质来确定极值，以解决应用问题是训练建模能力，培养应用意识的重要途径，我们择一些典型例题加以分析.

例 1. 已知边长为 4 的正方形裁去一角成五边形 $ABCDE$. 其中 $AF=2$，$BF=1$，在 AB 上求一点 P，使矩形 $PNDM$ 有最大面积，确定这个最大面积.



分析：如图，可设 PM 或 PN 的长为自变量.

如果设 $PN=x$. 则需要表示出 PM. 同时应注意到约束条件 $3\leqslant x\leqslant 4$.

解:设 $PN=x$,延长 NP 交 EF 于 Q,则 $PQ=4-x$.

$\because \quad \dfrac{PQ}{BF}=\dfrac{AQ}{AF}$

$\therefore \quad AQ=2PQ=8-2x, FQ=2x-6.$

因此　$PM=4-2x+6=10-2x$

但 $3\leqslant x\leqslant 4$.

所以矩形 $PNDM$ 的面积

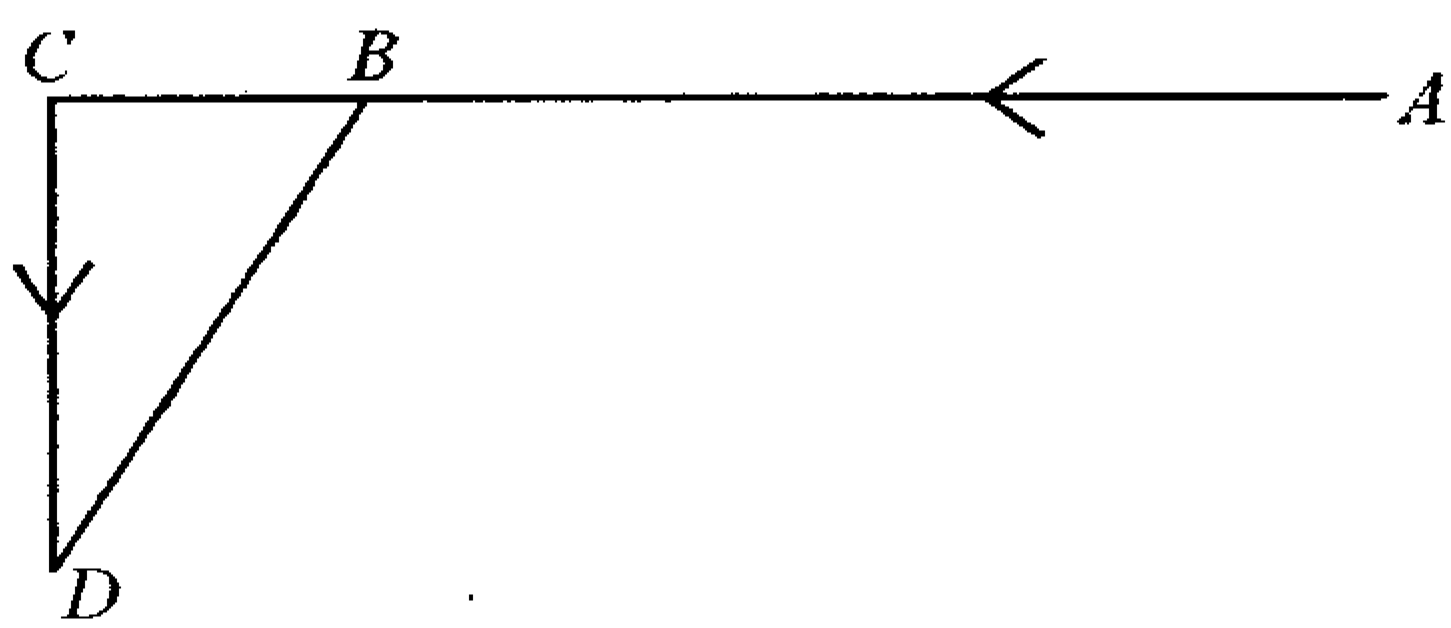
$$S=x(10-2x)=-2(x^2-5x)=-2(x-\frac{5}{2})^2+\frac{25}{2}$$

但 $x=\dfrac{5}{2}$,不在 $3\leqslant x\leqslant 4$ 范围之内.

又因 $x=3$ 时,$S=12$,$x=4$ 时 $S=8$

所以 $x=3$ 时,矩形 $PNDM$ 的面积最大,最大面积是 12.

例 2. 快艇和轮船分别从 A 地和 C 地同时开出,各沿着箭头所指示的方向航行.(如图)



快艇和轮船的速度分别是 40 公里/小时和 16 公里/小时,已知 $AC=145$ 公里,经过多少时间以后快艇和轮船之间的距离最短.

解:用 B 表示快艇从 A 地开出 t 小时后的位置,用 D 表示轮船从 C 地开出 t 小时后的位置,于是

$AB=40t, CD=16t.$

根据勾股定理,得

$$BD=\sqrt{BC^2+CD^2}=\sqrt{(145-40t)^2+(16t)^2}$$
$$=\sqrt{1856t^2-11600t+21025}$$

$BD^2=1856t^2-11600t+21025$

问题是求 BD 的最小值，就是求 $f(t)=1856t^2-11600t+21025$ 的最小值点. 也就是求抛物线顶点的横坐标.

$$t=t_0=-\frac{-11600}{2\times1856}=3\frac{1}{8}\text{(小时)}.$$

答：当快艇和轮船同时分别从 A 地和 C 地开出 $3\frac{1}{8}$ 小时后，它们之间的距离最近.

通过上述二例可见，解答函数最值应用题，一般可分两步：

（Ⅰ）根据应用题的条件，恰当地选择自变量，列出函数关系式把实际问题化成函数的最值问题——建模.

（Ⅱ）在给定的区间内，求出函数的最值及相应的自变量的值. 在初中阶段，一般是利用二次函数与简单不等式来解决问题.

例 3. 某租赁公司拥有汽车 100 辆，当每辆的月租金为 3000 元时，可全部租出，当每辆车的月租金每增加 50 元时，未租出的车将会增加一辆，租出的车每辆每月需要维护费 150 元，未租出的车每辆每月需维护费 50 元.

（Ⅰ）当每辆车的月租金定为 3600 元时，能租出多少辆车？

（Ⅱ）当每辆车的月租金定为多少元时，租赁公司的月收益最大？最大月收益是多少？

解：（Ⅰ）当每辆车的月租金定为 3600 元时，未租出的车辆数为 $\frac{3600-3000}{50}=12$，所以这时租出了 88 辆车.

（Ⅱ）设每辆车的月租金定为 x 元，则 $\frac{x-3000}{50}$ 为未租出车的辆数，$100-\frac{x-3000}{50}$ 是租出车辆数. 所以租赁公司的月收益为

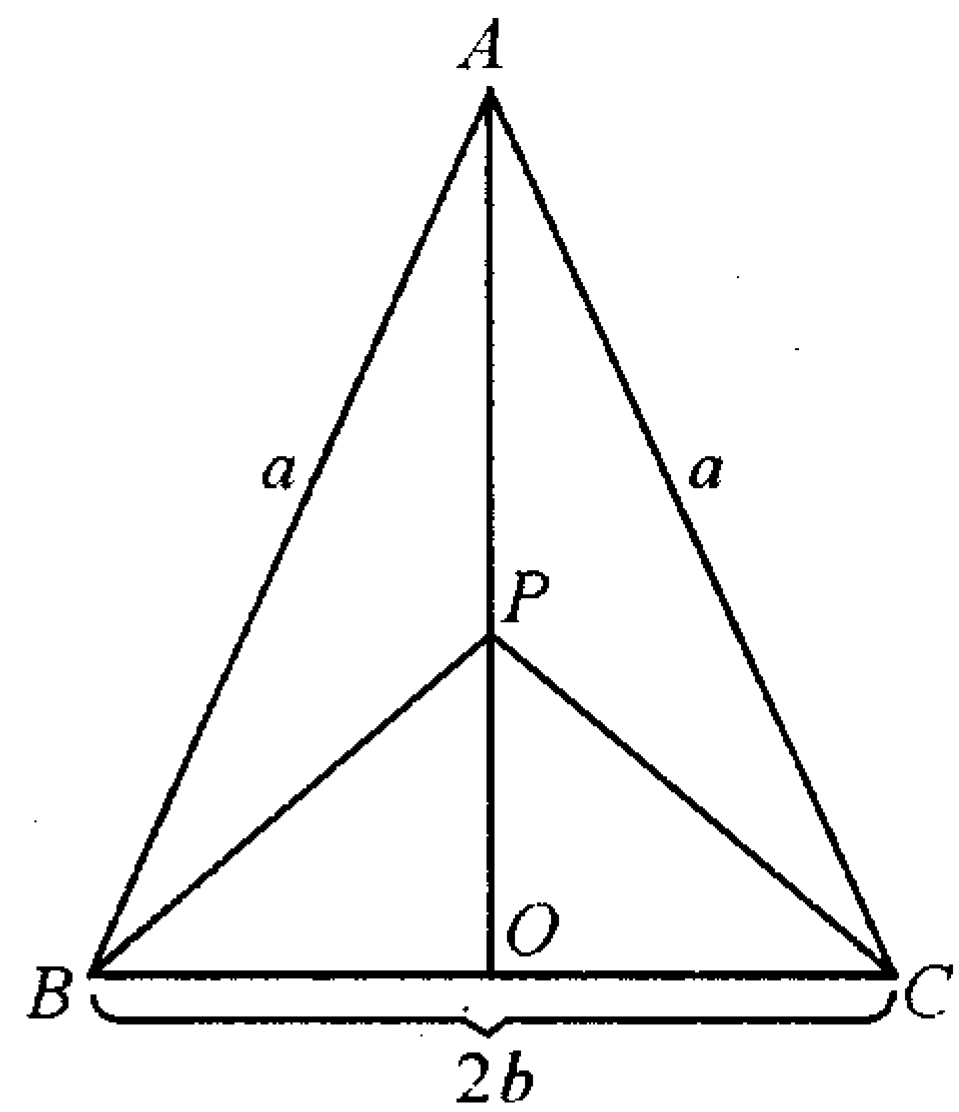
$$f(x)=\left(100-\frac{x-3000}{50}\right)(x-150)-\frac{x-3000}{50}\times50$$

整理得

$$f(x)=-\frac{x^2}{50}+162x-21000$$
$$=\frac{1}{50}(x-4050)^2+307050.$$

所以，当 $x=4050$ 时，$f(x)$最大，最大值为 $f(4050)=307050$. 即当每辆车月租金定为 4050 元时，租赁公司的月收益最大，最大月收益为 307050 元.

例 4. 有三个新兴城镇分别位于 A、B、C 三处，$AB=AC=a$，$BC=2b$. 今计划建一个中心医院，为同时方便三镇，准备建在 BC 边的垂直平分线上的 P 点处



问：若 P 点到三镇距离的平方和为最小，问点 P 位于何处？

解：设 $OP=y$，则 $PC^2=b^2+y^2=PB^2$，$h=AO=\sqrt{a^2-b^2}$，$AP^2=(h-y)^2$

所以 $f(y)=PC^2+PB^2+AP^2=2(b^2+y^2)+(h-y)^2$

$$=3\left(y-\frac{h}{3}\right)^2+\frac{2}{3}h^2+2b^2.$$

可见，当 $y=\frac{h}{3}$时，P 到三镇距离的平方和最小，P 点位置恰在点 AO 的$\frac{1}{3}$处，即等腰三角形的重心处.

习题 11.3

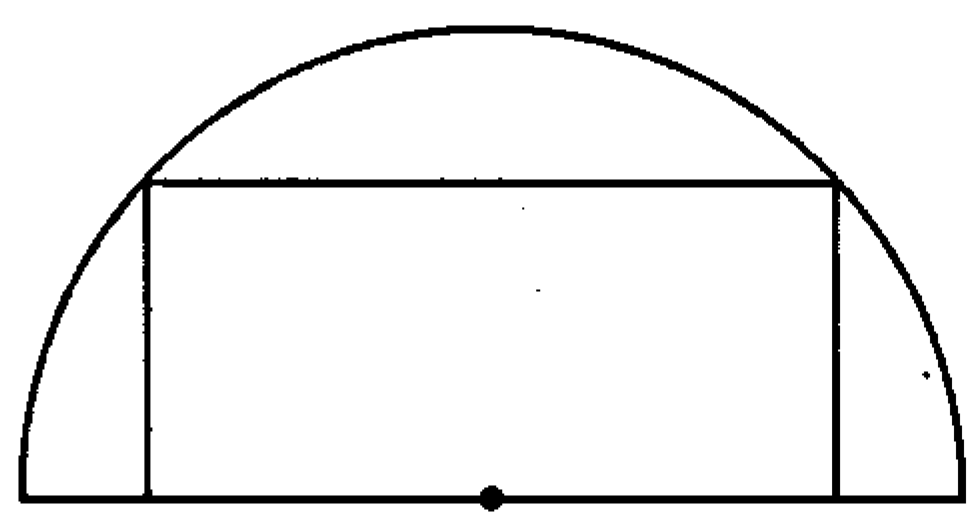
1. 在 ΔABC 中，$BC=2$，BC 边上的高 $AD=1$. P 是 BC 上任一点、$PE /\!/ AB$ 交 AC 于 E，$PF /\!/ AC$ 交 AB 于 F.

(1)设 $BP=x$，将 $S_{\Delta PEF}$ 用 x 表出；

(2)P 在 BC 的什么位置时，$S_{\Delta PEF}$ 最大？

2. 某商品，若定价每件 5 元，可卖出 1000 件，假若每件每降低 0.01 元，估计可多卖出 10 件. 在此情况下，每件销价为多少时，可获最大利益？

3. 如图，在半径为 R 的半圆形铁片上剪下一个矩形. 使矩形的一边与半圆的直径重合. 那么矩形的长和宽各取多少时，所得矩形面积最大？



§11.4　利用锐角三角函数证几何题

初三年级，解直角三角形是一章重要内容. 其中锐角三角函数的定义，如图 1，

$$\sin A=\frac{a}{c},\ \cos A=\frac{b}{c},\ \tan A=\frac{a}{b},$$

$\cot A=\dfrac{b}{a}$. 定量地刻画了直角三角形中的边、角之间的关系. 而任意三角形都可以通过作一条高线的方法构造两个直角三角形. 这就使得锐角三角函数有了用武之地. 因此，在用锐角三角函数解三角形的过程中，自然会萌发一种念头，能否利用锐角三角函数的定义，来实现边角之间的数量换算，达到证明几何问题的目的呢？我们不妨试一试.

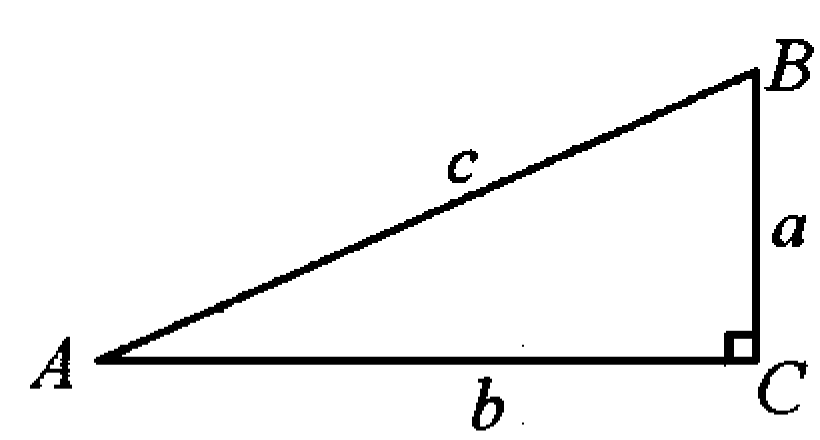


图 1

例 1. 如图 2，ΔABC 的垂心 H 在 ΔABC 内部，$AH=BC$.

求证：$\angle BAC=45°$.

证明：$\angle HAD$ 与 $\angle HBE$ 都与 $\angle C$ 互余. 所以令 $\angle HAD=\angle HBE=\alpha$.

在 RtΔAHD 中，$AD=AH\cos\alpha$，

在 RtΔBCD 中，$BD=BC\cos\alpha$.

但已知 $AH=BC$，

$\therefore\quad AD=BD$.

因此，ΔADB 是等腰直角三角形.

$\therefore\quad \angle BAC=45°$.

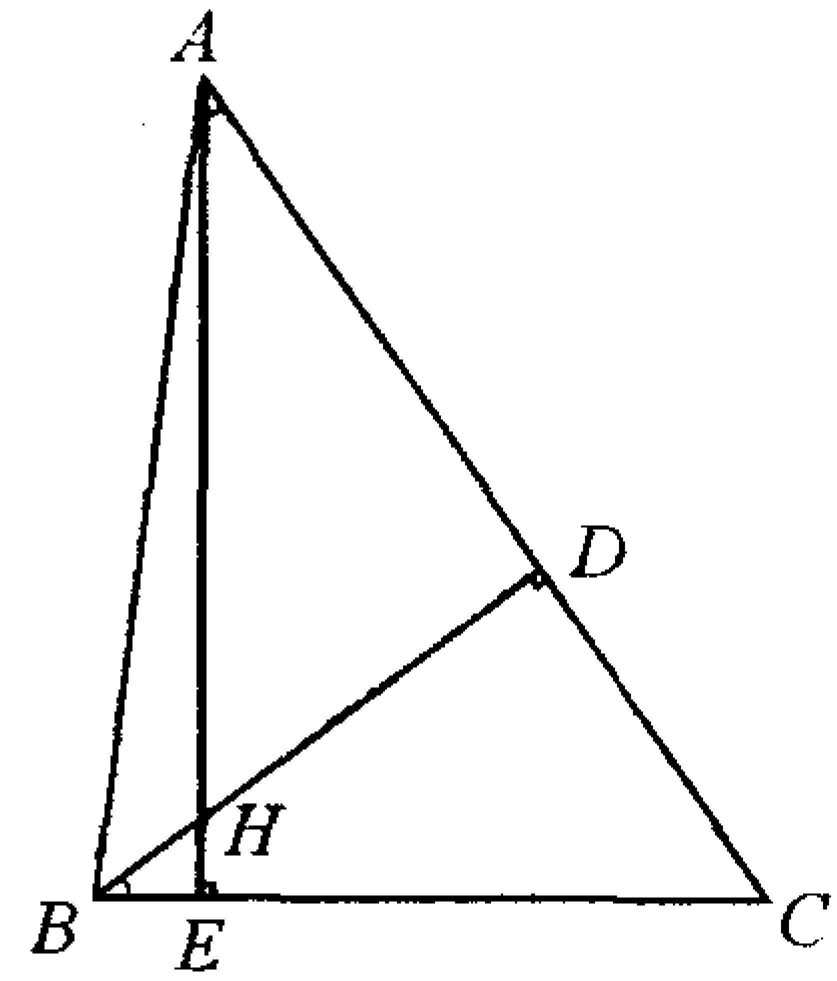


图 2

小试锋芒，实战告捷. 证法简单明快，条理清楚，我们可进一步扩大战果.

例 2. 在 ΔABC 中，$\angle B=\angle C=36°$，$AH\perp BC$ 于 H. AD 是 $\angle BAC$ 的一条三等分线. AE 是 $\angle A$ 外角的一条四等分线（如图 3 所示）.

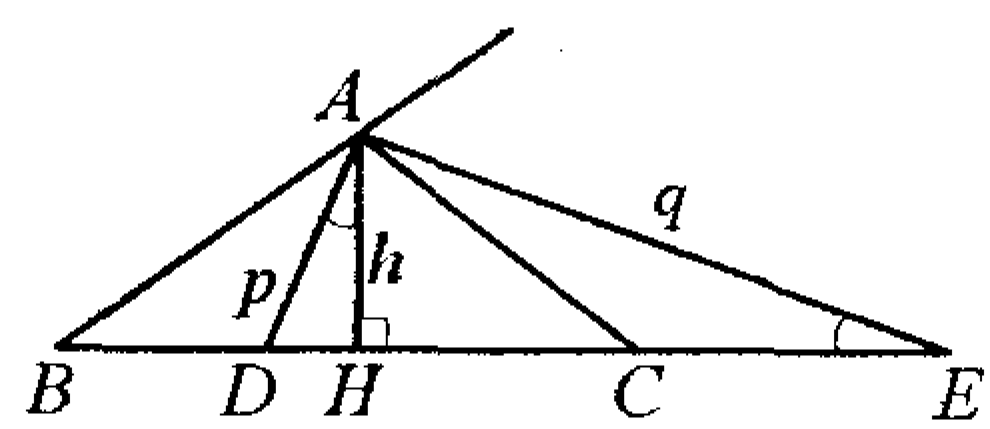


图 3

若 $AD=p$，$AE=q$，$AH=h$.

求证：$\dfrac{1}{p^2}+\dfrac{1}{q^2}=\dfrac{1}{h^2}$.

证明：$\because\quad \angle B=\angle C=36°$，$\qquad\therefore\quad \angle BAC=108°$.

因此，$\angle BAD=\dfrac{1}{3}\times108°=36°$，$\angle EAC=18°$.

$$\therefore\quad \angle DAE=72°+18°=90°,$$
$$\angle DAH=\angle AED=18°.$$

在 RtΔAHD 中，$\dfrac{h}{p}=\dfrac{AH}{AD}=\cos18°$，

在 RtΔAHE 中，$\dfrac{h}{q}=\dfrac{AH}{AE}=\sin18°$，

于是 $(\dfrac{h}{p})^2+(\dfrac{h}{q})^2=\cos^2 18°+\sin^2 18°=1$.

$$\therefore\quad \frac{1}{p^2}+\frac{1}{q^2}=\frac{1}{h^2}.$$

例 3. 在 ΔABC 中，I 是内心(三条内角平分线的交点). $ID\perp BC$ 于 D，$BE\perp AI$ 于 E，$CF\perp AI$ 于 F. 求证 $BD\cdot DC=BE\cdot CF$.

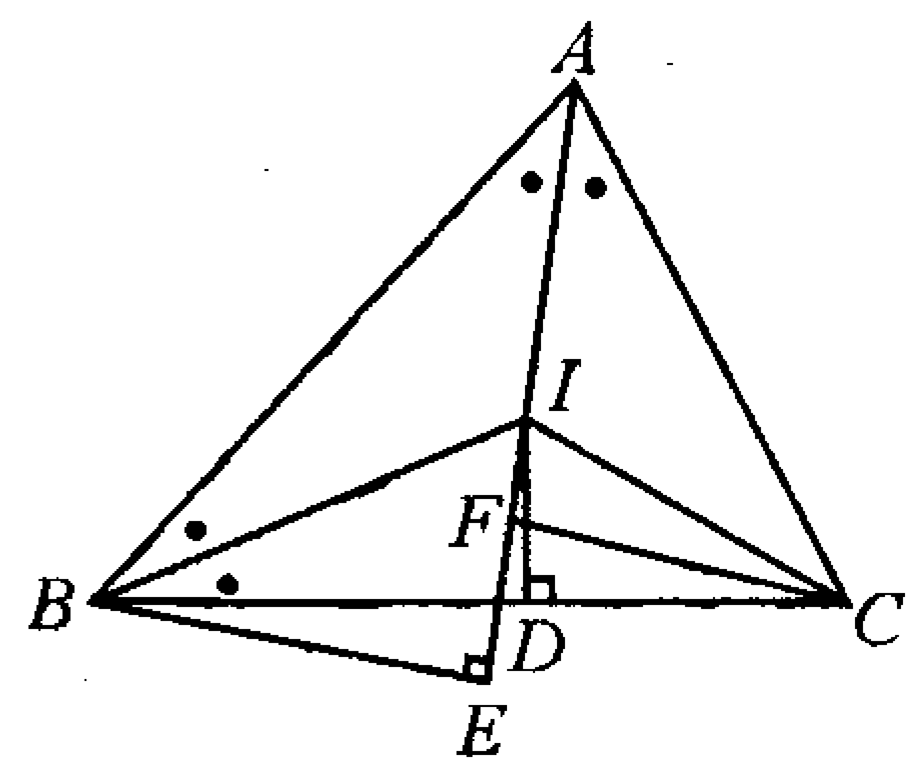


图 4

证明：在 $\mathrm{Rt}\Delta BDI$ 中，$BD=BI\cos\dfrac{B}{2}$.

在 $\mathrm{Rt}\Delta CDI$ 中，$CD=CI\cos\dfrac{C}{2}$.

但 $\dfrac{A}{2}+\dfrac{B}{2}+\dfrac{C}{2}=90^\circ$，

$$\therefore\quad \cos\frac{B}{2}=\cos\left[90^\circ-\left(\frac{A}{2}+\frac{C}{2}\right)\right]=\sin\frac{A+C}{2}=\sin\angle FIC.$$

$$\cos\frac{C}{2}=\cos\left[90^\circ-\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}\right)\right]=\sin\frac{A+B}{2}=\sin\angle BIE.$$

因此，

$$\begin{aligned}BD\cdot CD&=BI\cos\frac{B}{2}\cdot CI\cos\frac{C}{2}\\&=BI\sin\angle FIC\cdot CI\sin\angle BIE\\&=(BI\sin\angle BIE)(CI\sin\angle FIC)\\&=BE\cdot CF\end{aligned}$$

可见，在有高线、垂线可以构成较多的直角三角形的问题中，锐角三角函数的定义对证(解)几何问题大有帮助.

例 4. 在 ΔABC 中，$\angle C=90^\circ$，$CD\perp AB$ 于 D.

求证：(1) $CD^2=AD\cdot BD$.

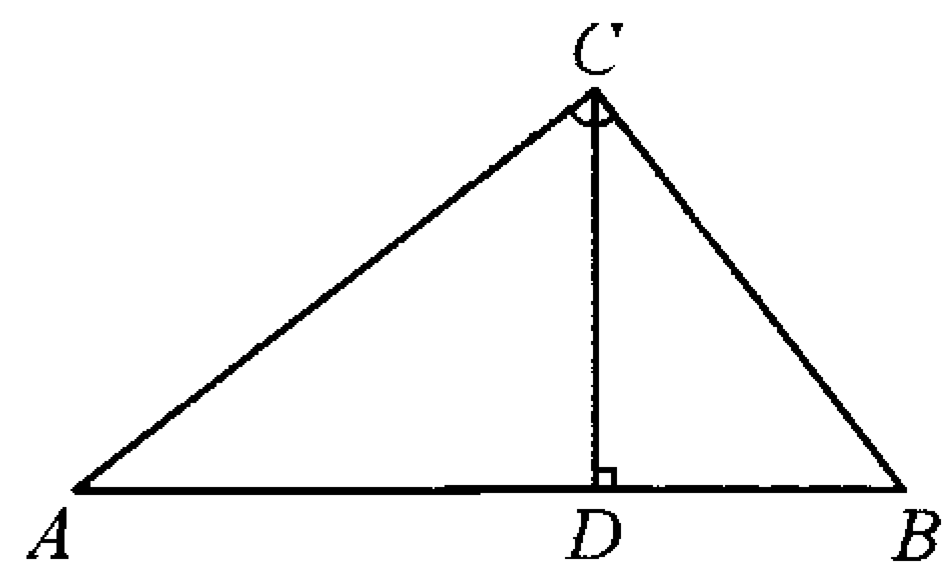


图 5

(2)$AC^2=AD\cdot AB$,

$BC^2=BD\cdot AB$.

证明:(1)在 $\mathrm{Rt}\triangle ACD$ 中,

$CD=AD\cdot\tan A$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle CBD$ 中,$CD=BD\tan B$.

$\therefore\quad CD^2=AD\cdot BD\tan A\tan B$.

但 $\angle A+\angle B=90°$

$\therefore\quad \tan A\tan B=\tan A\tan(90°-A)$

$=\tan A\cdot\cot A=1$.

$\therefore\quad CD^2=AD\cdot BD$.

(2)在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中,$AC=AB\cos A$,

$\therefore\quad AC^2=AB^2\cos^2 A$. ①

在 $\mathrm{Rt}\triangle ACD$ 中

$AD=AC\cos A=(AB\cos A)\cos A$

$=AB\cos^2 A$.

$\therefore\quad AD\cdot AB=AB^2\cos^2 A$. ②

比较①、②,得 $AC^2=AD\cdot AB$.

同理可证 $BC^2=BD\cdot AD$.

例 4 的结论是非常重要的. 由 $CD\perp AB$ 于 D,D 也称为 C 点在 AB 上的射影. 同样可知 A 在 AB 上的射影为 A,B 在 AB 上的射影为 B. AD 是 AC 在 AB 上的射影,BD 是 BC 在 BA 上的射影. 于是例 4 的结论可以表述为:

(1)直角三角形斜边上的高的平方等于两直角边在斜边上射影的乘积.

(2)直角三解形的一条直角边的平方等于斜边与这直角边在斜边上射影的乘积.

以上结论统称为直角三角形中的射影定理. 射影定理在解决物理及实际应用的计算时,是使用频率很高的一个定理.

例 5. 设 a、b 为 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 的两个直角边,c 为斜边,n 是不小

于 3 的自然数.

求证：$a^n+b^n<c^n$.

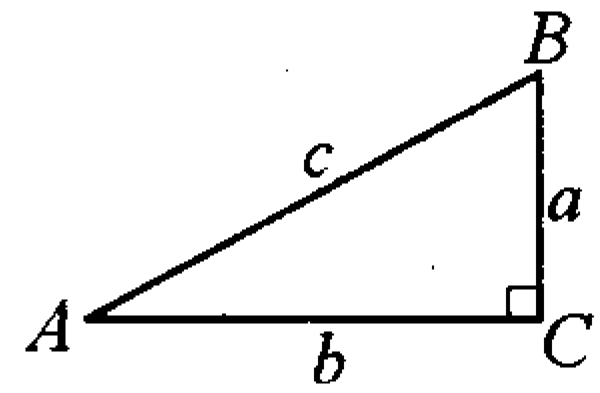


图 6

分析：要证 $a^n+b^n<c^n$ 等价于证明 $\left(\frac{a}{c}\right)^n+\left(\frac{b}{c}\right)^n<1$，而 $\frac{a}{c}=\sin A$. $\frac{b}{c}=\cos A$，这样就有可能利用锐角三角函数的计算达到证明的目的.

证明：在 Rt$\triangle ABC$ 中，

$\cos A=\frac{b}{c}$，$\sin A=\frac{a}{c}$. $\cos^2 A+\sin^2 A=\frac{a^n+b^n}{c^n}=\frac{c^2}{c^2}=1$.

$\frac{a^n+b^n}{c^n}=\left(\frac{a}{c}\right)^n+\left(\frac{b}{c}\right)^n=(\sin A)^n+(\cos A)^n$.

由于 $0<\sin A<1$，$0<\cos A<1$.

$\therefore$ 当 $n\geqslant 3$ 时，$\sin^n A<\sin^2 A$，$\cos^n A<\cos^2 A$，

因此 $\frac{a^n+b^n}{c^n}=\sin^n A+\cos^n A<\sin^2 A+\cos^2 A=1$.

即 $a^n+b^n<c^n$.

例 6. $\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$BC=1$，$AC=\frac{7}{8}$. D 在 A、B 之间，$BD=\frac{1}{2}$. 作 $DE\perp BC$ 于 E，$DF\parallel AE$ 交 BE 于 F.

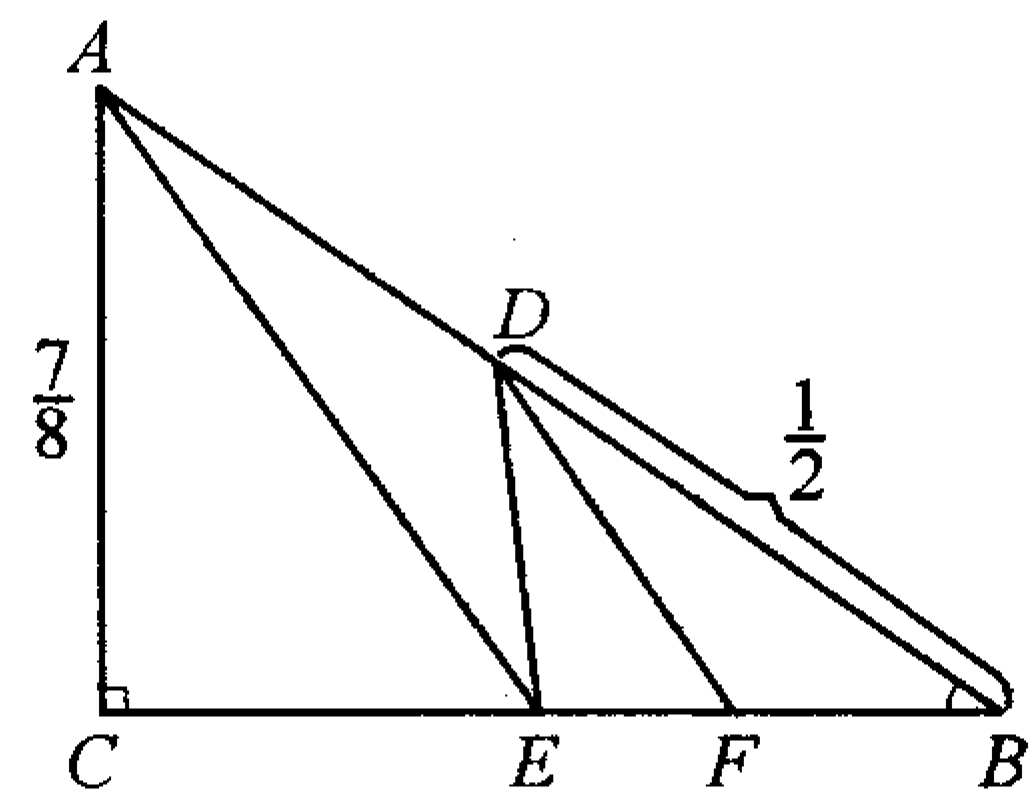


图 7

求证：$BF=\frac{355}{113}-3$.

证明：由勾股定理，知

$BA=\sqrt{1^2+(\frac{7}{8})^2}=\frac{\sqrt{113}}{8}$.

$\therefore$ $BE=\frac{1}{2}\cos B=\frac{1}{2}\times\frac{1}{AB}=\frac{4}{\sqrt{113}}$.

$$\because \quad \frac{BF}{BE}=\frac{BD}{BA}=\frac{BE}{BC}=BE,$$

$$\therefore \quad BF=BE^2=\frac{16}{113}=\frac{355}{113}-3.$$

大家知道，祖冲之计算圆周率时，取$\frac{355}{113}$为密率. 如果圆的直径 $BC=1$. 如何通过尺规作图得到周长的近似值$\frac{355}{113}$呢？本例给出了用尺规作 $BF=\frac{355}{113}-3$ 的方法，当然再加上 3，就会作出一条长为$\frac{355}{113}$的线段了.

例 7. 在 **Rt**$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$CD\perp AB$ 于 D.

求证：$AC+BC<CD+AB$.

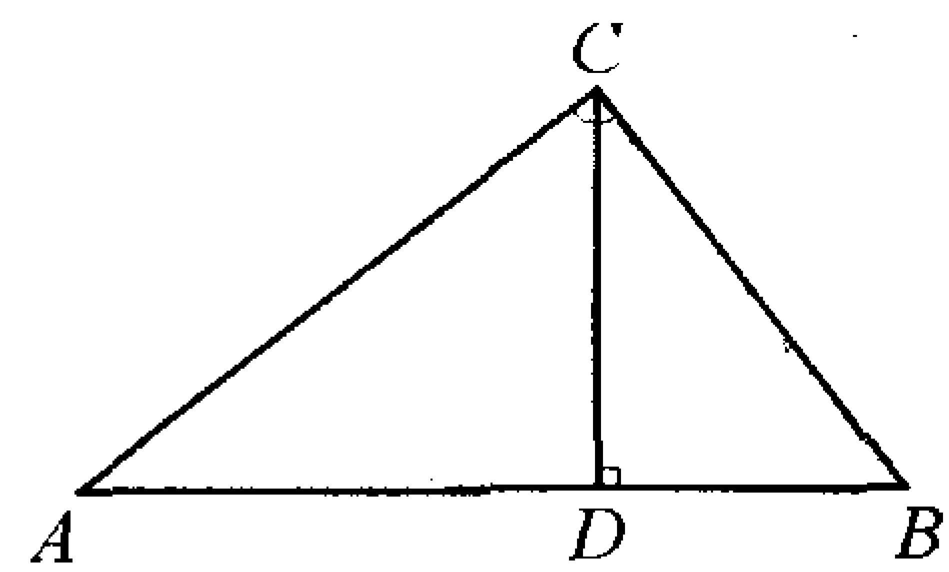


图 8

分析：要证 $AC+BC<CD+AB$，等价于证明

$\frac{AC}{AB}+\frac{BC}{AB}<\frac{CD}{AB}+1$. 也等价于证明$\frac{AC}{AB}+\frac{BC}{AB}<\frac{CD}{AC}\cdot\frac{AC}{AB}+1$. （*）

注意到在 **Rt**$\triangle ABC$ 中，$\cos A=\frac{AC}{AB}$，$\sin A=\frac{BC}{AB}$，在**Rt**$\triangle ACD$ 中，$\sin A=\frac{CD}{AC}$.

因此要证（*）式，等价于证明

$\cos A+\sin A<\sin A\cos A+1$.

也等价于证明 $\sin A\cos A-\cos A-\sin A+1>0$.

即 $(1-\sin A)(1-\cos A)>0$.

但由于 $0°<A<90°$，所以 $1-\sin A>0$，$1-\cos A>0$.

因此$(1-\sin A)(1-\cos A)>0$ 显然成立.

由于上述分析步骤可逆，因此，

$AC+BC<CD+AB$ 成立.

至于综合性的证明过程，就由读者自己完成吧！

例 8. ΔABC 中，$\angle C=90°$，$CD\perp AB$ 于 D，$DE\perp AC$ 于 E，$DF\perp BC$ 于 F.

求证：$\dfrac{BF}{AE}=\dfrac{BC^3}{AC^3}$.

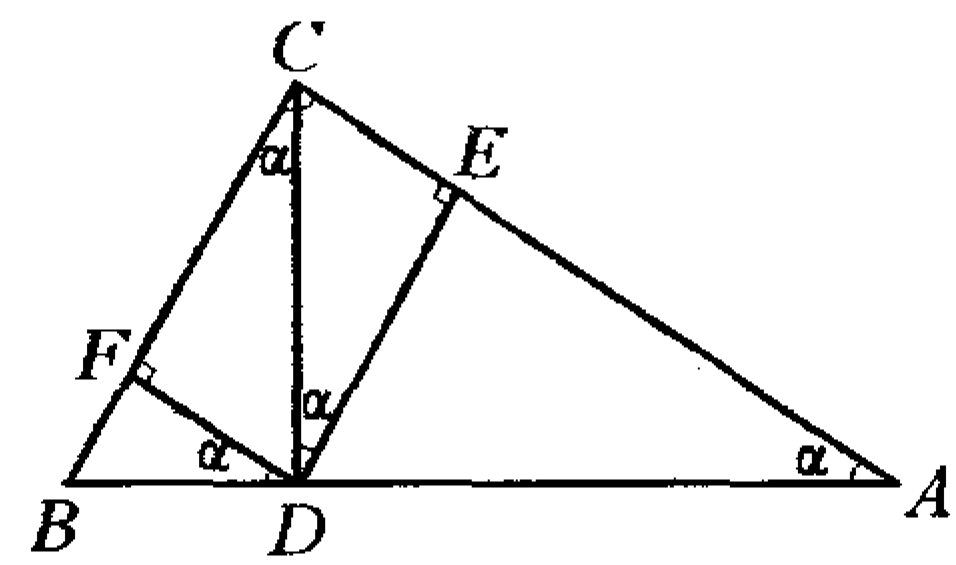


图 9

分析：图中直角三角形很多，又有很多相等的角，当然可以应用相似直角三角形去证明. 但用锐角三角函数定义证明，会更简捷.

证明：易知 $\angle BAC=\angle BDF=\angle EDC=\angle DCF$.

可设 $\angle BAC=\angle BDF=\angle EDC=\angle DCF=\alpha$，在 $\mathrm{Rt}\Delta ACB$ 中，

$$\frac{BC}{AC}=\tan\alpha \Rightarrow \frac{BC^3}{AC^3}=\tan^3\alpha, \qquad ①$$

$$\left.\begin{aligned} &\text{又在 } \mathrm{Rt}\Delta AED \text{ 中 } \tan\alpha=\frac{DE}{AE}, \\ &\text{在 } \mathrm{Rt}\Delta BFD \text{ 中 } \tan\alpha=\frac{BF}{FD}, \\ &\text{在 } \mathrm{Rt}\Delta CFD \text{ 中 } \tan\alpha=\frac{FD}{CF}=\frac{FD}{DE}. \end{aligned}\right\} \qquad (*)$$

$(*)$ 中三式相乘，得

$$\tan^3\alpha=\frac{DE}{AE}\cdot\frac{BF}{FD}\cdot\frac{FD}{DE}=\frac{BF}{AE}. \qquad ②$$

比较①，②可得 $\dfrac{BF}{AE}=\dfrac{BC^3}{AC^3}$.

利用锐角三角函数的定义证明平面几何题，是一种体现代数、几何、三角方法综合应用的思路. 在学习解直角三角形一章后作一些这种类型的课外智力开发的练习是很有好处的. 待大家学完圆中有关角以后，这种方法会进一步显示更大的效果. 然而利用锐角三角函数定义证明几何题，只是三角法证几何题的发端，

真正的灵活、全面的应用要等到学习正、余弦定理及角的和差倍分的三角函数变换之后.那时你才会大显身手的!

习题 11.4

1. ΔABC 中,$AB=AC=4BC$. $BD\perp AC$ 交 AC 于 D.
求证:$AC=32CD$.
2. 锐角 ΔABC 中,$BD\perp AC$ 于 D,$CE\perp AB$ 于 E.
求证:$DE=BC\cos A$.

第 12 章　综合知识介绍

§12.1　学点数的进位制

数的进位制，是数的基本知识之一，也是进行数学运算的基础．与进位制有关的竞赛题别具一格，很有趣味．利用课外活动学点进位制知识是很有好处的．

一、进位制的基本概念

日常生活中，人们习惯于 10 进制．其实星期是 7 进制，钟表计时 12 进制，还用 60 进制．

一个 10 进制自然数 $1997=1\times10^3+9\times10^2+9\times10+7$.

一般地，$\overline{abcde}=a\times10^4+b\times10^3+c\times10^2+d\times10+e$(其中 a,b,c,d,e 均为 0～9 的数码，且 $a\neq0$)

在 10 进制中

Ⅰ．“10”是这种进位制的基数，逢 10 进 1.

Ⅱ．表示一个数，需用 0,1,2,…,9 这 10 个不同的数码．

Ⅲ．数码处于不同位置(数位)表示的意义不同，比如 1997 中，左数第 1 个 9 代表 9 百，而左数第 2 个 9 代表 90. 换言之，每个数都可以按 10 的方幂形式展开．

按照 10 进制的特点，我们可以推广到 p 进制．

设 p 是不为 1 的正整数．我们可以选 p 为基数确定 p 进制，要求

Ⅰ．逢 p 进一．

Ⅱ. 在 p 进制中有 $0,1,2,\cdots,q(=p-1)$共 p 个数码．

Ⅲ. 每个数都能按基数 p 的幂的形式展开.

在 p 进制定义中，当 $p=10$ 时，就是我们常用的 10 进制. 当 $p=2$ 时，就是我们在计算机中使用的 2 进制：以 2 为基数，逢 2 进一，只使用 0,1 两个数码，每个数都能按基数 2 的方幂形式展开. 2 进制数 a 记为 $(a)_2$，则

$$(1011.1011)_2=1\times2^3+0\times2^2+1\times2^1+1\times2^0+1\times\frac{1}{2}+0\times\frac{1}{2^2}+1\times\frac{1}{2^3}+1\times\frac{1}{2^4}.$$

为了熟悉 10 进制数与 2 进制数的换算关系，记住下面的对应表是有好处的.

10 进制	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2 进制	1	10	11	100	101	110	111	1000	1001

二、其它进位制化为 10 进制

把 p 进制数转化为 10 进制数，只要把 p 进制数按 p 的幂的形式展开，然后按 10 进制数相加即可得结果.

比如，将 $(7215)_{12}$ 化为 10 进制

$$\begin{aligned}(7215)_{12}&=7\times12^3+2\times12^2+1\times12^1+5\times12^0\\&=12096+288+12+5\\&=(12401)_{10}\end{aligned}$$

即　12 进制中的数 7215 在 10 进制中是 12401.

例 1. 在哪个进位制中，10 进制数 52 记为 34？

解：设这种进位制是 p 进制，则

$$(34)_p=3p+4.$$

则　$3p+4=52$，解得 $p=16$.

答：在 16 进制中，10 进制数 52 记为 34.

例 2. 在某个进位制中 $6\times6=44$. 问在这个进位制中 76 是 10 进制中的哪个数?

解:设 $p(p>7)$为这种进位制的基数.

则$(44)_p=4p+4$.

而 6×6 在 10 进制中等于 36,根据转换原则

有 $4p+4=36$,解得 $p=8$.

即　在 8 进制中 $6\times6=44$.

而$(76)_8=7\times8+6=(62)_{10}$.

例 3. 以 a 进制的数 47 与以 b 进制的数 74 相等,这里 a,b 都是大于 1 的自然数,试求 $a+b$ 的最小可能的值.

解:a 与 b 必须大于 7.

$(47)_a=4\times a+7\quad(74)_b=7\times b+4$.

由　$4a+7=7b+4$　得

$7a+7b=11a+3$

$\therefore\quad a+b=\dfrac{11a+3}{7}$必取正整数值,$(a>7,b>7)$

a	8	9	10	11	12	13	14	15	16	…
$\frac{11a+3}{7}$	13	$\frac{102}{7}$	$\frac{113}{7}$	$\frac{124}{7}$	$\frac{135}{7}$	$\frac{146}{7}$	$\frac{157}{7}$	24	$\frac{179}{7}$	…

由于 $a>7,b>7,a+b>14$,所以 $a+b$ 不能取值 13,因此,$a+b$ 的最小可能值是 24.

三、10 进制数转换为 2 进制数

1. 把 10 进制整数,换算成 2 进制数可按下面短除规则去进行,如把$(29)_{10}$化为 2 进制数方法如下:

$$
\begin{array}{rl}
2\,\underline{|\quad 29} & (余) \\
2\,\underline{|\quad 14} & \cdots\cdots 1 \\
2\,\underline{|\quad 7} & \cdots\cdots 0 \\
2\,\underline{|\quad 3} & \cdots\cdots 1 \\
2\,\underline{|\quad 1} & \cdots\cdots 1 \\
0 & \cdots\cdots 1
\end{array}
$$

∴ $(29)_{10}=(11101)_2$

其法则是“除 2 取余，倒序排列”.

2. 把一个 10 进制纯小数化为 2 进制数，如把$(0.625)_{10}$写成 2 进数，可按如下方式演算．

$$
\begin{array}{ll}
\quad 0.625 & \\
\underline{\times \qquad 2} & \cdots\cdots 整数位=1 \\
\quad 1.\underline{250} & \\
\quad 0.25 & \\
\underline{\times \quad\ 2} & \cdots\cdots 整数位=0 \\
\quad 0.\underline{50} & \\
\quad 0.5 & \\
\underline{\times \quad 2} & \cdots\cdots 整数位=1 \\
\quad 1.0 &
\end{array}
$$

∴ $(0.625)_{10}=(0.101)_2$

其法则是“乘 2 取整，顺序排列”.

以上的换算方法对其它进位制也类似．一般地，我们有

①10 进整数化为 p 进数，采用“除 p 取余，反序排余数”. 10 进纯小数化为 p 进数，采用“乘 p 取整，顺序排整数”的演算法则．

②对于 10 进带小数（整数部分不是 0）化为 p 进数，把整数部分与小数部分分别来计算，再加起来即得．

如$(29.625)_{10}$化为 2 进制数应为$(11101.101)_2$

四、2 进制的运算

2 进制中，只有两个数码 0 与 1，它们的加法与乘法规则如下表．

+	0	1
0	0	1
1	1	10

×	0	1
0	0	0
1	0	1

10 进制运算中有“逢 10 进 1”“借 1 当 10”的进位与退位原则，类似地，2 进制四则运算中也有“逢 2 进 1”与“借 1 当 2”的进位与退位原则．

比如

$$\begin{array}{r} 1100.101 \\ +\quad 10.1 \\ \hline 1111.001 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 101.001 \\ \times\quad 1.011 \\ \hline 101\,001 \\ 1010\,01 \\ 101001 \\ \hline 111000\,011 \end{array}$$

逢2进1

借1当2

$$\begin{array}{r} 1111.001 \\ -1100.101 \\ \hline 10.1 \end{array}$$

至于除法运算，先化为除数为整数，然后再除，比如 $(111.000011)_2 \div (1.011)_2$，先将除数、被除数小数点均向后移 3 位，使除数化为整数，再去计算．

$$\begin{array}{r} 101\,001 \\ 1011\,\overline{)\,111000.011} \\ 1011 \\ \hline 1100 \\ 1011 \\ \hline 1011 \\ 1011 \\ \hline 0 \end{array}$$

$\therefore (111.000011)_2 \div (1.011)_2 = (101.001)_2$.

下面我们集中继续例举有关进位制的竞赛题．

例 4. 设 $1990 = 2^{\alpha_1} + 2^{\alpha_2} + \cdots + 2^{\alpha_n}$，其中 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 为彼此

两两不等的非负整数．

求 $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$ 之值．

分析：由 $1990=2^{\alpha_1}+2^{\alpha_2}+\cdots+2^{\alpha_n}$ 且 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 为彼此两两不等的非负整数，使我们联想到 1990 的 2 进制表示，且这种表示法是唯一的．因此可用 2 进制去解．

解：$1990=(11111000110)_2$

$$=2^{10}+2^9+2^8+2^7+2^6+2^2+2^1$$

$\therefore\quad \alpha_1=10,\alpha_2=9,\alpha_3=8,\alpha_4=7,\alpha_5=6,\alpha_6=\alpha_7=\alpha_8=0,\alpha_9=2,\alpha_{10}=1.$

$\therefore \alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=10+9+8+7+6+2+1=43.$

例 5. 证明：$2^{10}-2^8+2^6-2^4+2^2-1$ 被 9 整除．

分析：把这个数计算出来，再用 9 试除是一个办法，但计算量大，我们转化为 2 进制，计算可简便一些．

解：$2^{10}-2^8+2^6-2^4+2^2-1$

$=(2^{10}+2^6+2^2)-(2^8+2^4+1)$

$=(10001000100)_2-(100010001)_2$

$=(1100110011)_2$

而　$9=(1001)_2$

$$
\begin{array}{r}
1011011\\
1001\overline{)1100110011}\\
\underline{1001}\\
1111\\
\underline{1001}\\
1100\\
\underline{1001}\\
1101\\
\underline{1001}\\
1001\\
\underline{1001}\\
0
\end{array}
$$

所以 $9\mid(2^{10}-2^8+2^6-2^4+2^2-1)$.

说明：数的整除性不因进位制变化而改变，若 10 进制中数

a 被数 b 整除．a、b 在 p 进制中分别表为 $(A)_p$ 及 $(B)_p$．则 $(A)_p$ 也被 $(B)_p$ 整除．

例 6．现有 1 千克，2 千克，4 千克，8 千克，16 千克的某种货物各一袋，要想整袋买这种货物，问有多少种不同的购买方式？

分析：这个问题可以用枚举法来解，就是说，把各种可能的情况一一列举．例如：只含有一种重量的购法共 5 种，只含两种不同重量的购法有 10 种，等等，这样费力又可能出错．若观察这 5 种重量 $1,2^1,2^2,2^3,2^4$，由此启发，采用 2 进制来解决．

解：含或不含 1 千克分别在 2 进制中第 1 位用 1 或 0 表示；含或不含 2 千克分别在 2 进制第二位用 1 或 0 表示；含或不含 4 千克分别在 2 进制第三位用 1 或 0 表示；含或不含 8 千克分别在 2 进制第四位用 1 或 0 表示；含或不含 16 千克分别在 2 进制中第五位用 1 或 0 表示．

这样就构成了一个由 5 位数码（1 或 0）组成的 2 进制数（其中最高数码可以是 0）．

问题转化为一共有多少个 2 进制五位数．就有多少种不同的购物方法，2 进制中最大的五位数是 $(11111)_2$，化为 10 进制是 $2^4+2^3+2^2+2^1+1=31$．最小是 $(00001)_2$ 即为 1．因此，可以购买从 1 到 31 千克这 31 种不同重量的货物，即有 31 种不同的购物方法．

例 7．将 1500 只产品分装 15 箱出厂，在包装密封完毕后，发现还有 1 只产品未装入箱内．请你设计一种办法，只须称 4 次，就可以把少装的 1 箱查出来．

解：只要把 15 箱产品依次编号为 1，2，3，…，14，15．再把 1—15 这 15 个数化为 2 进制表示．

	四位	三位	二位	一位
1				1
2			1	0
3			1	1
4		1	0	0
5		1	0	1
6		1	1	0
7		1	1	1
8	1	0	0	0
9	1	0	0	1
10	1	0	1	0
11	1	0	1	1
12	1	1	0	0
13	1	1	0	1
14	1	1	1	0
15	1	1	1	1

按每位出现 1 分为 4 组，由表观察知：

个位出现 1 的一组：1,3,5,7,9,11,13,15.

第二位出现 1 的一组：2,3,6,7,10,11,14,15.

第三位出现 1 的一组：4,5,6,7,12,13,14,15.

第四位出现 1 的一组：8,9,10,11,12,13,14,15.

把每一组的箱子集中起来称一次．如果重量正常记为 0，如果重量轻了记作 1. 这样共称 4 次后得到一个用 2 进制表示的数 x.

$$x=\begin{pmatrix}①②③④\\ \times\times\times\times\end{pmatrix}_2$$

例如，称的结果是第①次与③次轻了，则 $x=(0101)_2=5$. 说明轻的一箱(即少装 1 只的那一箱一定是第 5 号箱子．)

例 8. 想办法将别针装成 10 盒，每盒数量互不相同，如果顾客买不超过 1000 枚的任意个数的别针，都能在这 10 盒中恰当地选取，刚好凑成顾客要买的数目．请你说明，怎样的装法才能达到目的？

解：这个问题就是如何用 10 个数的组合表示 1—1000 的所

有自然数．事实上

即用 $2^9,2^8,2^7,2^6,2^5,2^4,2^3,2^2,2^1$，及 1 可以表示不超过 1023 的任意自然数，当然更可以表示不超过 1000 的任意自然数，具体操作如下：

将别针装成 10 盒，分别装有别针的枚数为 $1,2^1=2,2^2=4,2^3=8,2^4=16,2^5=32,2^6=64,2^7=128,2^8=256,2^9=512$.

比如买 966 枚别针．因为 $966=2^9+2^8+2^7+2^6+2^2+2^1$ 所以给他装有 512,256,128,64,4,2 数量别针的包装各一盒即可．

习题 12.1

1. 在哪个进位制中，10 进制数 90 记为 76?
2. 将十进制数 2008 表为二进制数．
3. 若 $2005=2^{\alpha_1}+2^{\alpha_2}+\cdots+2^{\alpha_n}$.

其中 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 为彼此两两不等的非负整数．

求 $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$ 的值．

§12.2　统计常识初步例谈

统计分析就是对样本值进行加工，分析，作出结论说明总体. 也就是从看见的样本值，推断看不见的总体情况．

(一)平均值

例 1. 为了考察某地初中毕业生数学考试成绩的情况，从全体考生中抽查了 200 名考生的数学成绩，在这个问题中 200 名考生的数学成绩称为(　)

(A)总体　(B)个体　(C)样本　(D)样本容量

解：通过本例是为了区分总体，个体，样本，样本容量这四个

基本概念．某地初中毕业的全体考生的数学成绩是总体，每个考生的数学成绩为个体，抽取的200名考生的数学成绩为样本，200是样本容量．所以选(C)．

例2. 某学习小组共8人，在一次数学测验中，得100分的1人，得90分的2人，得74分的4人，得64分的1人，求这个学习小组的数学平均成绩．

解：$\bar{x}=\frac{1}{8}(100\times1+90\times2+74\times4+64\times1)$

$=\frac{1}{8}\times640=80.$

答：这小组的数学平均成绩为80分．

例3. 求11.20，11.28，11.12，11.20，11.40这5个数的平均数．

解：利用平均数的定义，$\bar{x}=\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)$得

$\bar{x}=\frac{1}{5}(11.20+11.28+11.12+11.20+11.40)$

$=\frac{1}{5}\times56.2=11.24.$

说明：在实际计算中，为了计算便利，可以经过适当代换，将数值变小或整化，又可得如下两种解法．

另解1：看到各数值都与11接近，因此，可令$y_n=x_n-11$，则

n	1	2	3	4	5
x_n	11.20	11.28	11.12	11.20	11.40
y_n	0.20	0.28	0.12	0.20	0.40

$\bar{y}=\frac{1}{5}(0.20+0.28+0.12+0.20+0.40)$

$=\frac{1}{5}\times1.20=0.24$

又 $\bar{y}=\bar{x}-11$ 所以 $\bar{x}=11+\bar{y}=11+0.24=11.24$.

另解 2:设 $y_n=(x_n-11)\times 100$ 则

n	1	2	3	4	5
y_n	20	28	12	20	40

$$\bar{y}=\frac{1}{5}(20+28+12+20+40)=\frac{1}{5}\times 120=24$$

所以　$\bar{y}=100(\bar{x}-11)$

即　$24=100(\bar{x}-11)\Rightarrow\bar{x}=11.24$.

例 4. 在某项人口统计中,妇女人数与男子人数之比为 11∶10. 若妇女的平均年龄(算术平均)为 34 岁,男子的平均年龄为 32 岁. 则该项人口统计中的平均年龄是(　)

(A)$32\frac{1}{10}$　(B)$32\frac{20}{21}$　(C)33　(D)$33\frac{1}{21}$　(E)$33\frac{1}{10}$

解:设 w 是妇女人数,m 是男子人数. 则依题意有 $w=11x$,$m=10x$,此处 x 为其中一份,故平均实为加权平均:

$$\bar{x}=\frac{34\times 11x+32\times 10x}{11x+10x}=\frac{34\times 11+32\times 10}{21}=\frac{694}{21}=33\frac{1}{21}.\text{ 选(D)}$$

平均值反映的是数据的集中趋势.

(二)方　差

同样采集的两组样本,平均值如果都相同,如何比较这两组数据的差别呢? 比如一组数据是 1,2,3,4,5. 另一组数据是 2,2.5,3,3.5,4,它们的平均值都是 3. 直观看,第二组数据与平均数更接近一些,集中一些. 如何反映这一事实呢,每一数据 x_i 与 $\bar{x}$ 之差,可以表示二者的差别,但 $\sum\limits_{1}^{5}(x_i-\bar{x})=0$ 没有区别,原因是 2.5−3 与 3.5−3 相加过程中抵消了,为了克服这一缺点,我们定义

$$S^2=\frac{1}{n}[(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots+(x_n-\bar{x})^2]$$

称为这个样本的方差．

样本方差大，反映了样本中的数据的波动大；样本方差小，反映了样本中的数据波动小．

例 5．求证：$S^2=\frac{1}{n}(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)-\bar{x}^2$

其中 S^2 是样本的方差，$\bar{x}$ 为样本的平均值．

证明：
$$\begin{aligned}S^2&=\frac{1}{n}[(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots+(x_n-\bar{x})^2]\\&=\frac{1}{n}[(x_1^2-2x_1\bar{x}+\bar{x}^2)+(x_2^2-2x_2\bar{x}+\bar{x}^2)+\cdots+(x_n^2-2x_n\bar{x}+\bar{x}^2)]\\&=\frac{1}{n}(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)-2[\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)]\bar{x}+\frac{1}{n}(n\bar{x}^2)\\&=\frac{1}{n}(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)-2\cdot\bar{x}\cdot\bar{x}+\bar{x}^2\\&=\frac{1}{n}(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)-\bar{x}^2.\end{aligned}$$

在统计学中将

$S=\sqrt{\frac{1}{n}[(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots+(x_n-\bar{x})^2]}$称为**标准差**.

显然，只要求出了方差，标准差也能求出，关键在于求出 $\bar{x}$ 来．

例 6．测得数据

99.3，98.7，100.5，101.2，98.4，99.7，99.3，100.5.

求方差与标准差．

解法 1：求出 $\bar{x}=99.7$ 列表

n	1	2	3	4	5	6	7	8	和
x_n	99.3	98.7	100.5	101.2	98.4	99.7	99.3	100.5	797.6
$x_n-\bar{x}$	−0.4	−1	0.8	1.5	−1.3	0	−0.4	0.8	
$(x_n-\bar{x})^2$	0.16	1	0.64	2.25	1.69	0	0.16	0.64	6.54

$$S^2=\frac{1}{8}[(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots+(x_8-\bar{x})^2]$$

$$=\frac{1}{8}\times 6.54=0.8175.$$

标准差 $S=\sqrt{0.8175}\approx 0.904$.

解法 2:利用公式 $S^2=\frac{1}{8}(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_8^2)-\bar{x}^2$ 来求解.

先求 $\bar{x}=99.7$,再将数据列表如下

n	1	2	3	4	5	6	7	8	和
x_n	99.3	98.7	100.5	101.2	98.4	99.7	99.3	100.5	797.6
x_n^2	9860.49	9741.69	10100.25	10241.44	9682.56	9940.09	9860.49	10100.25	$\sum_{1}^{8}x_i=79527.26$

$$S^2=\frac{1}{8}(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_8^2)-\bar{x}^2=\frac{1}{8}\times 79527.26-99.7^2$$

$$=9940.9075-9940.09=0.8175.$$

标准差 $S=\sqrt{0.8175}\approx 0.904$.

解法 3:计算采用“整化”.

设 $y_i=10(x_i-100)(i=1,2,3,4,5,6,7,8)$

$y_1=7,y_2=-13,y_3=5,y_4=12,y_5=-16,y_6=-3,y_7=-7,y_8=5$.

$\therefore\ \bar{y}=\frac{1}{8}(-7-13+5+12-16-3-7+5)=\frac{1}{8}(-24)=-3.$

$$S^2=\frac{1}{8}[(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots+(x_8-\bar{x})^2]$$

$$=\frac{1}{10^2}\left\{\frac{1}{8}[(y_1-\bar{y})^2+(y_2-\bar{y})^2+\cdots+(y_8-\bar{y})^2]\right\}$$

$$=\frac{1}{800}[(-7+3)^2+(-13+3)^2+(5+3)^2+(12+3)^2+(-16+3)^2+(-3+3)^2+(-7+3)^2+(5+3)^2]$$

$$=\frac{1}{800}\times 654=0.8175.$$

$S=\sqrt{0.8175}\approx 0.904.$

在初中阶段统计知识只是初步的，特别是依据图表分析，可以直观具体地了解数据的整体性质．

习题 12.2

1. 初三年级 4 个班全体同学参加数学测验，结果如下：

1 班 48 人，平均分 90 分．2 班 49 人，平均分 88 分．3 班 50 人，平均分 85 分．4 班 53 人，平均分 83 分．

求全年级的总平均分．

2. 有一个学生花了很多时间求出了 $a_1,a_2,\cdots,a_{1986}$ 这 1986 个数的平均数为 2000，后来这个学生粗心地将这个平均数又混入了这 1986 个数中，于是他又求出了这 1987 个数的平均数．问这 1987 个数的平均数是多少？

3. 已知样本数据为 3,4,5,6,7，求这个样本的标准差．

4. 已知样本 −1,0,3,6,7. 求这个样本的方差．

5. 试证：如果一个样本的方差等于 0，那么这个样本中的数据一定都相等．

附录

研究练习题提示与解答

习题 1.1 的提示或解答

1. 选择(D)

2. 代表 a,b,c,d 四个数的算术平均值.

3. $a=b=c$.

4. 设前年的生产总值为 m,则去年的生产总值为 $m(1+\frac{a}{100})$. 前年比去年少 $m(1+\frac{a}{100})-m=m\times\frac{a}{100}$,这个产值差占去年的 $\frac{ma\%}{m(1+\frac{a}{100})}=\frac{a}{100+a}$. 前年比去年少的百分数是$\frac{100a}{100+a}\%$.

5. 设这件工作总工作量是 1,因此甲每天完成$\frac{1}{a}$,乙每天完成$\frac{1}{b}$. 两人合作每天能完成$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$,两人合作需要

$$1\div(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})=\frac{ab}{a+b}(\text{天}).$$

习题 1.2 的提示或解答

1. 一方面从整体看正方形面积为$(a+b)^2$.

从四块面积之和看,是 $a^2+ab+ab+b^2=a^2+2ab+b^2$ 所以 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$.

2. 从整体看,大矩形面积是$(a+b+c)(m+n)$

从分解开来看是 $am+bm+cm+an+bn+cn$

所以 $(a+b+c)(m+n)=am+bm+cm+an+bn+cn$.

3. 阴影部分面积为 $(a+b)(c+d)-\frac{1}{2}ac-\frac{1}{2}b(c+d)-\frac{1}{2}d(a+b)=\frac{1}{2}(ac+bc+ad)$.

4. 阴影面积 $=\frac{3}{4}\pi r^2+\frac{1}{4}r^2=\frac{1}{4}(3\pi+1)r^2$

5. 阴影面积 $=\frac{(a+b)}{2}\cdot(a+b)-\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{2}b^2=\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}b^2+ab-\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{2}b^2=ab$.

习题 1.3 的提示或解答

1. 这是还原问题，所求原数为 $(cn-b)\div m+a$.

若列代数式，设原数为 x，则 $[(x-a)\times m+b]\div n=c$

所以 $(x-a)\times m+b=cn\Rightarrow(x-a)\times m=cn-b\Rightarrow x-a=(cn-b)\div m\Rightarrow x=(cn-b)\div m+a$.

2. m 个数之和为 mp，加上 n 个数后，这 $m+n$ 个数之和为 $(m+n)q$.

所以所添加的 n 个数之和为 $(m+n)q-mp$，其平均数为 $\frac{(m+n)q-np}{n}=\frac{mq+n(q-p)}{n}$.

3. 小红买 n 本与买 m 本相差 $n-m$ 本，共差 $a+b$ 元，所以每本为 $\frac{a+b}{n-m}$（元）. 小红共带钱 $\frac{a+b}{n-m}\cdot m+a=\frac{am+bm-an-am}{n-m}=\frac{bm-an}{n-m}$（元）.

4. 设火车长为 x，则火车速度 $v=\frac{x}{t_1}$，即 $x=vt_1$.

由于火车过桥需 t_2 秒，则$(l+x)=vt_2$

即　$l+vt_1=vt_2$. 所以 $v=\dfrac{l}{t_2-t_1}$（米/秒）

火车的长度为 $x=vt_1=\dfrac{lt_1}{t_2-t_1}$（米）

5. 多边形 $ABCHG$ 的面积为：$4-\dfrac{1}{2}(2-x)^2=2+2x-\dfrac{1}{2}x^2$

多边形 $CDEIH$ 的面积为 $4-\dfrac{1}{2}(2-x)(2-\dfrac{1}{2}x)=2+\dfrac{3}{2}x-\dfrac{x^2}{4}$

同理多边形 $AGIEF$ 的面积为 $2+\dfrac{3}{2}x-\dfrac{x^2}{4}$.

三块面积之积为

$$(2+2x-\frac{x^2}{2})+2(2+\frac{3}{2}x-\frac{x^2}{4})=(2+2x-\frac{x^2}{2})+4+3x-\frac{x^2}{2}$$

$=6+5x-x^2$.

习题 1.4 的提示或解答

1. 设三个连续自然数为 $n-1,n,n+1$（其中 $n\geqslant1$），则$(n-1)+n+(n+1)=3n$.

2. 设 $2k+1$ 与 $2k+3$ 为两个相邻的奇数．

则$(2k+1)+(2k+3)=4k+4=4(k+1)$为 4 的倍数，所以不被 4 整除的偶数一定不是两个相邻奇数之和．

3. 设这个四位数为$\overline{abcd}$，则$\overline{abcd}=3\times\overline{bcd}-42$.

即　$a\times1000+\overline{bcd}=3\times\overline{bcd}-42$

$500a=\overline{bcd}-21$.

由于 a 为四位数首位，$a\neq0$，当 $a\geqslant2$ 时，$\overline{bcd}>1000$，不合题意，所以 $a=1$，$\overline{bcd}=521$，所求四位数为 1521.

4. 设 $a=100n+10(n+1)+(n+2)$

反序数 b，则 $b=100(n+2)+10(n+1)+n$

$b-a=100\times2-2=198$.

5. 设三位数为$\overline{abc}$,则这个三位数减去其数字和为

$(100a+10b+c)-(a+b+c)=99a+9b=9(11a+b)$即得.

习题 1.5 的提示或解答

1. $1*2=1\times2+1+2=5$.

$1*2*3=5*3=5\times3+5+3=23$.

$\therefore\quad 1*2*3*4=23*4=23\times4+23+4=119$.

2. $6*5=6^2+5^2=36+25=61$.

3. $4\bigstar4=\dfrac{4\times4}{4+4}=\dfrac{16}{8}=2$,

所以 $4\bigstar(4\bigstar4)=4\bigstar2=\dfrac{4\times2}{4+2}=\dfrac{8}{6}=\dfrac{4}{3}$.

4. $1*9=\dfrac{1-9}{2}=-4, 9*5=\dfrac{9-5}{2}=2$,

所以$(1*9)*(9*5)=(-4)*(2)=\dfrac{(-4)-2}{2}=-3$.

5. $\left\{\dfrac{22}{7},\dfrac{355}{113}\right\}=\dfrac{22}{7}$.

$\therefore\quad \left\{\left\{\dfrac{22}{7},\dfrac{355}{113}\right\},3.1416\right\}=\left\{\dfrac{22}{7},3.1416\right\}=\dfrac{22}{7}$.

习题 2.1 的提示或解答

1. 因为 $a+2b+3c=m=a+b+c$,所以 $b+c=0$,即 b,c 互为相反数,选(A).

2. 选(B).

3. 选(A).

4. 画出数轴,标出-8.14的位置,数一数-8.14右边不是

正整数的整数只有$-8,-7,-6,-5,-4,-3,-2,-1,0$共九个.

5. 线段AB的长为$20-(-8)=28$. 共分成8个相等的小段,每一小段的长为$\frac{28}{8}=3.5$. 所以$y=(-8)+3\times3.5=(-8)+10.5=2.5$.

6. 因为$0<a<1$,所以$\frac{1}{a}>1$,于是$0,a,1,\frac{1}{a}$的次序是$0<a<1<\frac{1}{a}$. 其相反数次序是$-\frac{1}{a}<-1<-a<0$.

所以总的次序是$-\frac{1}{a}<-1<-a<0<a<1<\frac{1}{a}$.

7. 从图中可见,a,c均为负数,c到原点的距离大于a到原点的距离. 即$|c|>|a|$. 推出$c<a\Rightarrow\frac{1}{c}>\frac{1}{a}$排除(A),(C). 但$b>0$,$\frac{1}{b}>0$,所以必有$\frac{1}{b}>\frac{1}{c}>\frac{1}{a}$. 选(B).

8. 在-109.2与-11.9之间包含最小整数是-109,最大整数是-12,共计$(-12)-(-109)+1=98$个整数. 在10.5与199.5之间包含最小整数是11,最大整数是199. 共计包含$199-11+1=189$个整数. 因此墨水共盖住了$98+189=287$个整数.

习题 2.2 的提示或解答

1. 原式$=-\left(\frac{1}{1992}-\frac{1}{1991}\right)-\left(\frac{1}{1993}-\frac{1}{1992}\right)-\left[-\left(\frac{1}{1993}-\frac{1}{1991}\right)\right]$

$$=-\frac{1}{1992}+\frac{1}{1991}-\frac{1}{1993}+\frac{1}{1992}+\frac{1}{1993}-\frac{1}{1991}=0.$$

2. 从图中可见,$a<0$,则$|a|=-a$,$b>1\Rightarrow|b|=b$,$b-1>0$.

由$-1<a<0$知$1+a>0$,所以$a+b=(1+a)+(b-1)>0\Rightarrow|a+b|=a+b$.

又 $c>b$,则 $c-b>0\Rightarrow|b-c|=c-b$.

因此$|a|+|b|+|a+b|+|b-c|=(-a)+b+a+b+c-b=b+c$.

3. $|1-2|=|-1|=1$, $||1-2|-3|=|1-3|=|-2|=2$, $|||1-2|-3|-4|=|2-4|=|-2|=2$.

$\therefore ||||1-2|-3|-4|-5|=|2-5|=3$.

4. 当 $1<x<2$ 时,有 $x>0, x-1>0, x-2<0$

$\therefore |x|=x, |x-1|=x-1, |x-2|=-(x-2)$

所以$\dfrac{|x-2|}{x-2}-\dfrac{|x-1|}{x-1}+\dfrac{|x|}{x}=\dfrac{-(x-2)}{x-2}-\dfrac{x-1}{1-x}+\dfrac{x}{x}=(-1)+\dfrac{1-x}{1-x}+1=(-1)+1+1=1$.

5. ①若 $a<b<c<d\leqslant e$ 时,$|a-b|=-(a-b)$, $|b-c|=-(b-c)$, $|c-d|=-(c-d)$, $|d-e|=-(d-e)$

$\therefore \quad |a-b|+|b-c|+|c-d|+|d-e|=-(a-b)-(b-c)-(c-d)-(d-e)=e-a$.

当 $e=9, a=1$ 时,取得最大值为 8.

②若 $a<b<c<d$ 且 $d>e$ 时,有 $|a-b|=-(a-b)$, $|b-c|=-(b-c)$, $|c-d|=-(c-d)$, $|d-e|=d-e$.

$\therefore \quad |a-b|+|b-c|+|c-d|+|d-e|=-(a-b)-(b-c)-(c-d)+(d-e)=2d-a-e$.

当 $d=9, a=1, e=0$ 时,取最大值为 17.

综合①,②知,$|a-b|+|b-c|+|c-d|+|d-e|$的最大值是 17.

6. 原式$=\dfrac{|(-a)-a|}{(-a)}=\dfrac{2a}{-a}=-2$. （其中 $a=-\dfrac{355}{113}$）

7. $\because \quad x>0, y<0, z<0$,所以$|x|=x, |y|=-y, |z|=-z$.

由$|x|>|y|$得 $x>-y\Rightarrow x+y>0$,由$|z|>|x|$得$-z>x\Rightarrow x+z<0$

$\therefore \quad |x+y|=|x+y|, |x+z|=-(x+z)$

又 $y<0, z<0\Rightarrow y+z<0$,所以$|y+z|=-(y+z)$

原式$=-(x+z)-[-(y+z)]-(x+y)=-x-z+y+z-x-y=-2x$.

8. 由$\frac{|abcd|}{abcd}=-1$知 a,b,c,d 中负数为奇数个.

若 a,b,c,d 中一负三正,不妨设 $a<0,b>0,c>0,d>0$

则$\frac{|a|}{a}+\frac{|b|}{b}+\frac{|c|}{c}+\frac{|d|}{d}=\frac{-a}{a}+\frac{b}{b}+\frac{c}{c}+\frac{d}{d}=(-1)+1+1+1=2$.

若 a,b,c,d 中三负一正,不妨设 $a<0,b<0,c<0,d>0$

则 $\frac{|a|}{a}+\frac{|b|}{b}+\frac{|c|}{c}+\frac{|d|}{d}$

$=\frac{-a}{a}+\frac{-b}{b}+\frac{-c}{c}+\frac{-d}{d}$

$=(-1)+(-1)+(-1)+1$

$=-2$

所以$\frac{|a|}{a}+\frac{|b|}{b}+\frac{|c|}{c}+\frac{|d|}{d}$的最大值是 2.

9. 由 $a\leqslant b,b\leqslant c,c\leqslant d,d\geqslant a$ 可知,$a-b\leqslant 0,b-c\leqslant 0,c-d\leqslant 0,d-a\geqslant 0$

∴ $|a-b|=-(a-b),|b-c|=-(b-c),|c-d|=-(c-d),|d-a|=(d-a)$.

所以$|a-b|+|b-c|+|c-d|+|d-a|=-(a-b)-(b-c)-(c-d)+(d-a)=2(d-a)$

由于$a\neq c$,因此当$d=9,a=1$时原式取得最大值为$2\times(9-1)=16$.

10. a,b,c 三数的积为负数,所以 a,b,c 均不为 0,且其中只能是两正一负或三个都是负数两种可能. 但若 $a<0,b<0,c<0$ 则有 $a+b+c<0$,与 a,b,c 三数和为正数的条件不符. 因此 a,b,c 中只能是一负两正,为确定起见,不妨设 $a<0,b>0,c>0$ 于是

$|a|=-a,|b|=b,|c|=c$

∴ $x=\frac{|a|}{a}+\frac{|b|}{b}+\frac{|c|}{c}=\frac{-a}{a}+\frac{b}{b}+\frac{c}{c}=(-1)+1+1=1$.

所以，以 $x=1$ 代入代数式 $x^{19}-92x+2$ 得

$x^{19}-92x+2|_{x=1}=1^{19}-92\times1+2=-89.$

习题 2.3 的提示或解答

1. 两两相乘所得之乘积最小，由于乘数有正数，也有负数．所以两个乘数应一正一负，且绝对值要最大，可见最小乘积是 $(-7)\times3=-21.$

2. 小华写的四个有理数之和为$\dfrac{2+17+(-1)+(-3)}{3}=5.$

分别减去每三数之和后可得这四个有理数，依次为 3，−12，6，8. 所以，这四个有理数的乘积 $=3\times(-12)\times6\times8=-1728.$

3. 由于$\dfrac{a}{f}=\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{b}{c}\cdot\dfrac{c}{d}\cdot\dfrac{d}{e}\cdot\dfrac{e}{f}=(-\dfrac{1}{2})(\dfrac{1}{3})(-\dfrac{1}{4})(\dfrac{1}{5})(-\dfrac{1}{6})=-\dfrac{1}{720}$

$\therefore\quad \dfrac{a}{f}=-720.$

4. 满足条件的整数是 $\pm1992,\pm1993,\pm1994,\cdots,\pm2000$，它们的和是 0.

5. 其值恒为正数的共有 3 个，它们是 $a^2b^2+1,a^2+b^2+0.1,2a^2+3b^4+1.$

6. 在 1993.4 与它的负倒数 $-\dfrac{1}{1993.4}$之间有 1994 个整数，

$\therefore\quad a=1994.$ 在 1993.4 与它的相反数 −1993.4 之间有 $2\times1993+1=3987$个整数，$b=3987$. 在 $-\dfrac{1}{1993.4}$与它的绝对值 $\dfrac{1}{1993.4}$之间只有一个整数 0，即 $c=1$，所以 $a+b+c=1994+3987+1=5982.$

7. $\left(\frac{A}{B}\right)^{2001}=\left[\dfrac{\frac{8}{1}\cdot\frac{9}{2}\cdot\frac{10}{3}\cdot\frac{11}{4}\cdot\frac{12}{5}\cdot\frac{13}{6}\cdot\frac{14}{7}\cdot\frac{15}{8}\cdot\frac{16}{9}}{\frac{10}{1}\cdot\frac{11}{2}\cdot\frac{12}{3}\cdot\frac{13}{4}\cdot\frac{14}{5}\cdot\frac{15}{6}\cdot\frac{16}{7}}\right]^{2001}$

$=\left[\frac{8\times 9}{8\times 9}\right]^{2001}=1^{2001}=1.$

8. $M=(a+b)^2, N=a+b^2$

$\therefore\quad \frac{M}{N}=\frac{(a+b)^2}{a+b^2}=\frac{[7+(-5)]^2}{7+(-5)^2}=\frac{2^2}{7+25}=\frac{4}{32}=\frac{1}{8}.$

9. 前 15 个质数是 2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37,41,43,47. 其和为 328. 它们的负倒数是$-\frac{1}{328}$.

10. 由 $6+d+f=f+7+2\Rightarrow d=3$.

由 $d+2+a=6+b+a$ 及 $d=3\Rightarrow b=-1$.

$b+d+7=-1+3+7=9$,所以各行,各列,两对角线上三个数的和都等于 9.

进一步求得 $a=4,c=5,e=1,f=0$

$\therefore\quad \frac{ab+cd+ef}{a+b+c+d+e+f}=\frac{4\times(-1)+5\times 3+1\times 0}{4+(-1)+5+3+1+0}=\frac{11}{12}.$

习题 3.1 的提示或解答

1. 由$\frac{1+x}{4}-\frac{x-2}{8}=1$ 得 $2+2x-x+2=8, x=4$.

2. $\frac{x}{22.2}=\frac{5}{3.7}\Leftrightarrow\frac{x}{6}=\frac{5}{1}\Leftrightarrow x=30$,选(D).

3. 由原方程得$\frac{x}{16}=1$ 即 $x=16$.

4. $\frac{2x-1}{3}-\frac{10x+1}{12}=\frac{2x+1}{4}-1$

去分母得 $4(2x-1)-(10x+1)=3(2x+1)-12$

$8x-4-10x-1=6x+3-12$

$8x-10x-6x=3-12+4-1$

$-8x=-4, x=\frac{1}{2}$.

5. 根据同解理论知(D)正确．

6. 由于 $19-a$ 是方程 $19x-a=0$ 的根，所以 $19(19-a)-a=0$，即 $361-20a=0 \Rightarrow a=\frac{361}{20}=18.05$.

习题 3.2 的提示或解答

1. 设弟弟现年为 x 岁，则哥现年为 $2x$ 岁．

9 年前弟弟为 $x-9$ 岁，哥哥为 $2x-9$ 岁，弟年龄是哥的 $\frac{1}{5}$，列出方程：$5(x-9)=2x-9$，解得 $x=12$. 所以弟弟现年 12 岁，哥哥现年 24 岁．

2. 设等数为 a，第一个数为 $x-2$，第二个数为 $x+2$，第三个数为 $\frac{x}{2}$，第四个数为 $2x$. 它们的和为 45，列得方程

$(x-2)+(x+2)+\frac{x}{2}+2x=45$，解得 $x=10$.

所以第一个数为 8，第二个数为 12，第三个数为 5，第四个数为 20.

3. 设购买幸福金笔占幸福金笔总数的百分比为 x，幸福金笔总数为 m 支，付款总数为 T 元，则依题意有

$$\begin{aligned} T &= 6xm+3.78(143-m) \\ &= (6x-3.78)m+3.78\times 143. \end{aligned}$$

$\because$ T 与 m 无关，$\therefore 6x-3.78=0, x=0.63=63\%$.

4. 设需加入盐 x 千克，则得

$20\times 15\%+x=(20+x)\times 20\%$

解得 $x=1.25$(千克).

5. 设某缝纫师作一件衬衣 t 工时，则依题意，作一件裤子 $2t$ 工时，做一件上衣 $3t$ 工时

依题意 $2t+3\times(2t)+4\times(3t)=10$

则 $t=0.5$(工时).

所以，他要做 14 件衬衣，10 条裤子，和 2 件上衣共用

$14\times0.5+10\times2\times0.5+2\times3\times0.5=20$(工时).

6. 设乙跑一圈 x 秒，则每秒跑 $\frac{1}{x}$ 圈，甲、乙反向跑，每秒跑 $\frac{1}{40}+\frac{1}{x}$ 圈，这个等于 $\frac{1}{15}$ 圈，即 $\frac{1}{40}+\frac{1}{x}=\frac{1}{15}$.

解得 $x=24$.

答：乙跑一圈的时间需 24 秒．

习题 3.3 的提示或解答

1. 设骑车人正常情况下车速 v 米/分，共走 t 分钟行完全程，则 $S=vt$.

由于每分钟快 10 米，因而提前了 5 分钟，这表示 $(t-5)\times10$ 恰是 5 分钟的正常行程，

$(t-5)\times10=5v$ ①

同理可得 $(t+7)\times10=7v$ ②

$\frac{①}{②}$ 得 $\frac{t-5}{t+7}=\frac{5}{7}$ 解得 $t=35$ 代入①得

$v=60, S=60\times35=2100$ 米．

2. 设 A、B 两地距 x 米，甲、乙二人第一次相遇所用时间为 t，则由第一次相遇到第二次相遇所用时间为 $2t$，依题意得

$\frac{700}{t}=\frac{x-700+400}{2t}$，解之得 $x=1700$(米).

3. 设该手表 10 点 50 分时比准确时间慢了 x 分钟，则看表时距 4 点 30 分已有 6 小时又 $(20+x)$ 分钟，由题意可知手表走

20 分钟比准确时间慢 1 分钟，于是有

$6\times3+\frac{20+x}{20}=x$　解得 $x=20$.

即，当天上午该手表指示时间是 10 点 50 分时准确时间应该是 11 点 10 分.

习题　3.4 的提示或解答

1. 图中小正方形 A 面积是 1 平方厘米，边长为 1 厘米，设最大正方形 B 的边长为 x 厘米，则 C 的边长为 $(x-1)$ 厘米，D 的边长为 $(x-2)$ 厘米，E 的边长为 $(x-3)$ 厘米，F 的边长也是 $x-3$ 厘米.

根据矩形对边相等，得

$2(x-3)+(x-2)=x+(x-1)$，解得 $x=7$(厘米)

于是 C 的边长为 6 厘米，D 的边长为 5 厘米，E 和 F 的边长为 4 厘米. 长方形面积为 $(7+6)\times(7+4)=13\times11=143$(平方厘米).

2. 设这个数为 x，其相反数为 $-x$，它的负倒数是 $-\frac{1}{-x}=\frac{1}{x}$

即　$\frac{1}{x}=\frac{1}{19}$ 所以 $x=19$.

3. 设选对 x 题，不选的有 z 题，选错的有 y 题，依题意有 $x+y+z=6.8x+2z=20$，由于 x,y,z 都是非负整数，解之得 $x=2,y=2,z=2$. 即该生答对，不选，选错各 2 题.

习题 4.1 的提示或解答

1. $$\begin{aligned}(a+b)^3&=(a+b)^2(a+b)\\&=(a^2+2ab+b^2)(a+b)\\&=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.\end{aligned}$$

2. $(a-b)^3=(a-b)^2(a-b)$

$$=(a^2-2ab+b^2)(a-b)$$
$$=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3.$$

3. $(a+b)(a^2-ab+b^2)=(a+b)[(a+b)^2-3ab]$
$$=(a+b)^3-3ab(a+b)$$
$$=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3-3a^2b-3ab^2$$
$$=a^3+b^3.$$

4. $(a-b)(a^2+ab+b^2)=(a-b)[(a-b)^2+3ab]$
$$=(a-b)^3+3ab(a-b)$$
$$=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3+3a^2b-3ab^2$$
$$=a^3-b^3.$$

5. $(x^2-xy+y^2)(x^2+xy+y^2)=[(x^2+y^2)-xy][(x^2+y^2)+xy]$
$$=(x^2+y^2)^2-(xy)^2$$
$$=x^4+2x^2y^2+y^2-x^2y^2$$
$$=x^4+x^2y^2+y^4.$$

6. 原式$=\dfrac{(p-1)(p+1)(p^2+1)(p^4+1)(p^8+1)(p^{16}+1)}{p-1}(p>1)$

$$=\frac{1}{p-1}[(p^2-1)(p^2+1)(p^4+1)(p^8+1)(p^{16}+1)]$$
$$=\frac{1}{p-1}[(p^4-1)(p^4+1)(p^8+1)(p^{16}+1)]$$
$$=\frac{1}{p-1}[(p^8-1)(p^8+1)(p^{16}+1)]$$
$$=\frac{1}{p-1}[(p^{16}-1)(p^{16}+1)]=\frac{1}{p-1}(p^{32}-1)$$
$$=\frac{(p^{32}-1)}{p-1}.$$

7. 注意$(a-b)-(a-c)=c-b$.

所以原式$=[(a-b)-(a-c)]\cdot[(a-b)^2+(a-b)(a-c)+(a-c)^2]$

$=(a-b)^3-(a-c)^3=2^3-(\sqrt[3]{7})^3=1.$

8. 由 $a+\frac{1}{a}=m$，则 $a^2+\frac{1}{a^2}+2=m^2 \Rightarrow a^2+\frac{1}{a^2}=m^2-2.$

$a^3+\frac{1}{a^3}=(a+\frac{1}{a})[a^2+\frac{1}{a^2}-1]=m[m^2-2-1]$

$=m^3-3m.$

习题 4.2 的提示或解答

1. $x^2+x^2(x+1)^2+(x+1)^2$

$=(x+1)^2-2x(x+1)+x^2+2x(x+1)+x^2(x+1)^2$

$=(x+1-x)^2+2x(x+1)+[x(x+1)]^2$

$=1+2x(x+1)+[x(x+1)]^2$

$=[1+x(x+1)]^2=(x^2+x+1)^2.$

2. $x^4+y^4+(x+y)^4$

$=x^4+x^2y^2+y^4+[(x+y)^2]^2-(xy)^2$

$=x^4+2x^2y^2+y^4-x^2y^2+[(x+y)^2+xy][(x+y)^2-xy]$

$=(x^2+y^2)^2-(xy)^2+[(x+y)^2+xy][(x+y)^2-xy]$

$=[x^2+y^2-xy][x^2+y^2+xy]+[x^2+y^2+3xy][x^2+y^2+xy]$

$=(x^2+y^2+xy)[(x^2+y^2-xy)+(x^2+y^2+3xy)]$

$=(x^2+y^2+xy)(2x^2+2y^2+2xy)=2(x^2+xy+y^2)^2.$

3. 由于 $(a-b)+(b-c)+(c-a)=0$

根据本节例 3 说明①可得

$(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3=3(a-b)(b-c)(c-a).$

4. $4^{545}+545^4=(2^{545})^2+(545^2)^2$

$=(2^{545})^2+2\cdot 2^{545}\cdot 545^2+(545^2)^2-2\cdot 2^{545}\cdot 545^2$

$=(2^{545}+545^2)^2-2^{546}\cdot 545^2$

$=(2^{545}+545^2)^2-(2^{273}\cdot 545)^2$

$=(2^{545}+545^2+2^{273}\cdot 545)(2^{545}+545^2-2^{273}\cdot 545)$

当知 $4^{545}+545^4$ 是个合数.

习题 5.1 的提示或解答

1. (1) $\frac{|x|}{2}-5\neq0, |x|\neq10, x\neq-10, x\neq10$ 时分式有意义.

(2) $|x|^2-3|x|+2=(|x|-1)(|x|-2)$

所以当 $|x|\neq1$ 且 $|x|\neq2$ 时，分式有意义.

2. (1) $\frac{|x|^2-9}{x^2-5x+6}=\frac{(|x|+3)(|x|-3)}{(x-2)(x-3)}$. 当 $x\neq2, x\neq-3$ 时分式有意义，要分数值为 0，$|x|^2-9=0$，但 $x\neq3$，所以 $x=-3$ 时，分数值为 0.

(2) $$\frac{x^2-x}{x^5+x^3-x^2-1}=\frac{x(x-1)}{x^3(x^2+1)-(x^2+1)}=\frac{x(x-1)}{(x^2+1)(x^3-1)}$$

当 $x\neq1$ 时，分式有意义，要分数值为 0，但 $x\neq1$，只能是 $x=0$.

(3) $$\frac{x^2-x-6}{2+\frac{2}{2+x}}=\frac{(x-3)(x+2)}{\frac{4+2x+2}{2+x}}=\frac{(x-3)(x+2)}{\frac{2(x+3)}{2+x}}$$

当 $x\neq-2, x\neq-3$ 时分式有意义.

要分式为 0，需 $(x-3)(x+2)=0$，但 $x\neq-2$，所以 $x=3$.

3. 分式 $\frac{7-4x}{x+3}$　当 $x\neq-3$ 时有意义.

要 $\frac{7-4x}{x+3}>0\Leftrightarrow(7-4x)(x+3)>0$

$\Leftrightarrow\begin{cases}7-4x>0\\x+3>0\end{cases}$ 或 $\begin{matrix}7-4x<0\\x+3<0\end{matrix}$ 解得 $-3<x<\frac{7}{4}$.

所以，当 $-3<x<\frac{7}{4}$ 时　$\frac{7-4x}{x+3}$ 取正值.

易知当 $x<-3$ 或 $x\geqslant\frac{7}{4}$ 时　$\frac{7-4x}{x+3}$ 取负值.

4. 原式$=\dfrac{\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{x}{x-1}}{\dfrac{\dfrac{x}{x+1}}{\dfrac{x}{x-1}}}=\dfrac{\dfrac{x(x-1)+x(x+1)}{(x+1)(x-1)}}{\dfrac{x-1}{x+1}}$

$=\dfrac{2x^2}{(x+1)(x-1)}\cdot\dfrac{x+1}{x-1}=\dfrac{2x^2}{(x-1)^2}.$

5. 原式$=\dfrac{(a+b)^2+(a-b)^2}{a^2-b^2}-\dfrac{4ab}{a^2-b^2}$

$=\dfrac{2a^2+2b^2}{a^2-b^2}-\dfrac{4ab}{a^2-b^2}$

$=\dfrac{2(a-b)^2}{a^2-b^2}=\dfrac{2(a-b)}{a+b}.$

6. 原式$=\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}+\dfrac{1}{(x+2)(x+3)}+\dfrac{1}{(x+3)(x+4)}$

$=\left(\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+2}\right)+\left(\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{x+3}\right)+\left(\dfrac{1}{x+3}-\dfrac{1}{x+4}\right)$

$=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+4}=\dfrac{(x+4)-(x+1)}{(x+1)(x+4)}$

$=\dfrac{3}{(x+1)(x+4)}.$

7. 令$\dfrac{x}{a-b}=\dfrac{y}{b-c}=\dfrac{z}{c-a}=t$　显然 a、b、c 两两不等.

$x=(a-b)t, y=(b-c)t, z=(c-a)t$

则 $x+y+z=[(a-b)+(b-c)+(c-a)]t=0.$

8. $S=\dfrac{1}{1\cdot3}+\dfrac{1}{3\cdot5}+\dfrac{1}{5\cdot7}+\cdots+\dfrac{1}{1993\cdot1995}$

$=\dfrac{1}{2}(1-\dfrac{1}{3})+\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5})+\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7})+\cdots+$

$\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{1993}-\dfrac{1}{1995})$

$=\dfrac{1}{2}[1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}+\cdots+\dfrac{1}{1993}-\dfrac{1}{1995}]$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+7}\right)=\frac{1}{2(x-1)}-\frac{1}{2}$$

$\therefore \quad \frac{1}{2(x+7)}=\frac{1}{2}$ 　　解得 $x=-6$.

(3) $2x-\frac{7}{2}=\frac{1}{1-2x} \qquad (x\neq\frac{1}{2})$

$\frac{4x-7}{2}=\frac{1}{1-2x}\Leftrightarrow(4x-7)(1-2x)=2$

$8x^2-18x+9=0\Leftrightarrow(4x-3)(2x-3)=0$

解得　$x_1=\frac{3}{4},x_2=\frac{3}{2}$.

习题 5.2 的提示或解答

1. $\sqrt{8}-\sqrt{98}+\sqrt{50}=2\sqrt{2}-7\sqrt{2}+5\sqrt{2}=0$.

2. $a^2-ab+b^2=\left(\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2}\right)^2-\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}+\left(\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}\right)^2$

$$=\frac{1}{4}\left[(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2-(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})+(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2\right]$$

$$=\frac{1}{4}\left[5+2\sqrt{15}+3-(5-3)+5-2\sqrt{15}+3\right]$$

$$=\frac{7}{2}.$$

3. $x<0\Rightarrow\sqrt{x^2}=-x$

$\sqrt{(x-\sqrt{x^2})^2}=\sqrt{[x-(-x)]^2}=\sqrt{(2x)^2}=-2x$.

4. 由于 $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2=2+2\sqrt{6}+3=5+2\sqrt{6}=5+\sqrt{24}$

$(\sqrt{10})^2=10=5+5=5+\sqrt{25}$

由于 $5+\sqrt{25}>5+\sqrt{24}$ 　　所以　$\sqrt{10}>\sqrt{2}+\sqrt{3}$.

5. $\frac{1}{1+\sqrt[4]{10}}+\frac{1}{1-\sqrt[4]{10}}+\frac{2}{1+\sqrt{10}}$

$$=\frac{1-\sqrt[4]{10}+1+\sqrt[4]{10}}{1-\sqrt{10}}+\frac{2}{1+\sqrt{10}}$$

$$=\frac{2}{1-\sqrt{10}}+\frac{2}{1+\sqrt{10}}$$

$$=\frac{2(1+\sqrt{10}+1-\sqrt{10})}{1-10}=\frac{2\times 2}{-9}=-\frac{4}{9}.$$

6. 设 $a=\sqrt{6-\sqrt{35}}+\sqrt{6+\sqrt{35}}$

则 $a^2=\left(\sqrt{6-\sqrt{35}}+\sqrt{6+\sqrt{35}}\right)^2$

$$=(6-\sqrt{35})+2\sqrt{6-\sqrt{35}}\cdot\sqrt{6+\sqrt{35}}+(6+\sqrt{35})$$

$$=12+2\cdot\sqrt{36-35}=14.$$

$\therefore\quad a=\sqrt{14}.$

7. 由　$a=\frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{2}+\frac{1}{8}}-\frac{1}{8}\sqrt{2}$

得　$a+\frac{1}{8}\sqrt{2}=\frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{2}+\frac{1}{8}}$

平方　$a^2+\frac{1}{4}\sqrt{2}a+\frac{1}{32}=\frac{1}{4}\sqrt{2}+\frac{1}{32}$

移项得　$a^2=\frac{\sqrt{2}}{4}(1-a),a^4=\frac{1}{8}(1-a)^2$

所以　$a^2+\sqrt{a^4+a+1}=\frac{\sqrt{2}}{4}(1-a)+\sqrt{\frac{(1-a)^2}{8}+a+1}$

$$=\frac{\sqrt{2}}{4}(1-a)+\sqrt{\frac{1}{8}(1-2a+a^2+8a+8)}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{4}(1-a)+\frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{(a+3)^2}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{4}(1-a+a+3)=\sqrt{2}.$$

8. $(a+b)^2=\sqrt{1992}+\sqrt{1991}$,

$$(a-b)^2=\sqrt{1992}-\sqrt{1991}$$

即 $a^2+2ab+b^2=\sqrt{1992}+\sqrt{1991}$,

$a^2-2ab+b^2=\sqrt{1992}-\sqrt{1991}$

相减得 $4ab=2\sqrt{1991}$，所以 $ab=\frac{1}{2}\sqrt{1991}$.

9. 已知 $1\leqslant x\leqslant 2$,则 $0\leqslant x-1\leqslant 1$

$$\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$$

$$=\sqrt{(x-1)+2\sqrt{x-1}+1}+\sqrt{(x-1)-2\sqrt{x-1}+1}$$

$$=\sqrt{(\sqrt{x-1}+1)^2}+\sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2}$$

$$=|\sqrt{x-1}+1|+|\sqrt{x-1}-1|$$

$$=(\sqrt{x-1}+1)+(1-\sqrt{x-1})=2.$$

10. $$\frac{\sqrt{6}+4\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{(\sqrt{6}+\sqrt{3})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}$$

$$=\frac{(\sqrt{6}+\sqrt{3})+3(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{6}+\sqrt{3})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}$$

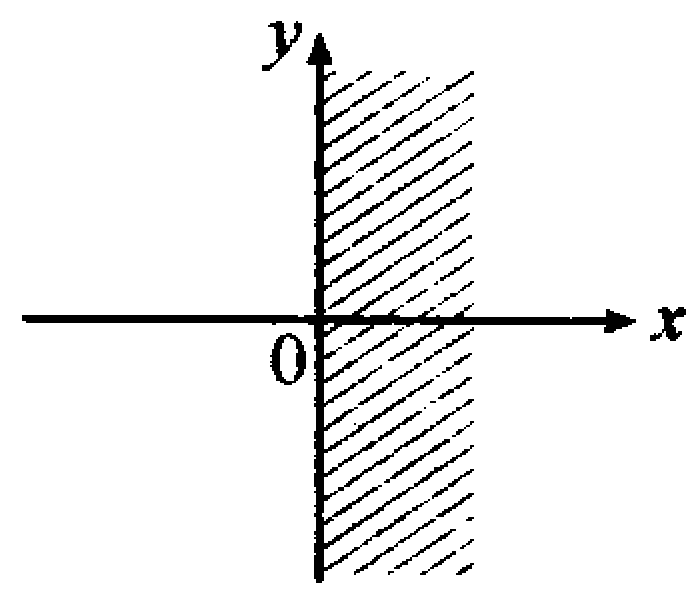
$$=\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{3}{\sqrt{6}+\sqrt{3}}$$

$$=(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\frac{3(\sqrt{6}-\sqrt{3})}{3}$$

$$=\sqrt{6}-\sqrt{2}.$$

习题 6.1 的提示或解答

1. 由 $x-|x|=0$,可见 y 为任意实数,$x=|x|$ 知 $x\geqslant 0$,所以表示右半平面上的点(含 y 轴)



2. 设 $a=-2, b=-3$，则 $-2>-3$，$|-2|>-3$，但 $(-2)^2<(-3)^2$，故排除(A)，(B)

设 $a=-3, b=3$，显然 $-3\neq|3|$，但 $(-3)^2=3^2$，排除(D)

这样只有 C 是正确的，事实上，差 $a>|b|$，则 a 是正数，必有 $a^2>b^2$.

3. 由 $|ab|+1-|a|-|b|=0$，$|b|(|a|-1)-(|a|-1)=0$

∴　$(|a|-1)(|b|-1)=0$.　$|a|-1=0$ 或 $|b|-1=0$

$|a|=1$ 或 $|b|=1$，所以 a 为 ±1 或 b 为 ±1.

4. 由 a、b 为整数，所以 $|ab|$，$|a+b|$ 均为非负整数，要 $|ab|+|a+b|=1$，只能 $|ab|=0$，$|a+b|=1$ 或 $|ab|=1$，$|a+b|=0$.

若 $|ab|=0$，要么 $a=0$，$|b|=1$ 或 $b=0$，$|a|=1$，这时有解 $(0,1)$，$(0,-1)$，$(1,0)$，$(-1,0)$，若 $|ab|=1$，当 a、b 同号，$ab=1$ 时，$|a+b|=2$ 无解；

当 a、b 异号，即 $|ab|=1$，$|a+b|=0$，此时又有解 $(1,-1)(-1,1)$. 总计共 6 个解.

5. 若 a、b 满足题设的不等式，则有

$||a|-(a+b)|^2<|a-|a+b||^2$

经化简整理得 $|a|(a+b)>a|a+b|$

由此知，$a\neq0$，$a+b\neq0$，从而

$$\frac{a+b}{|a+b|}>\frac{a}{|a|}$$

上式仅当 $a<0$，$a+b>0$ 时成立，从而 $b>-a>0$，选(B).

习题 6.2 的提示或解答

1. 由 $\begin{cases}2a+b=7\\a-b=2\end{cases}$ 解得唯一一组解 $\begin{cases}a=3\\b=1\end{cases}$ 选(B).

2. $1+x^2=1+\dfrac{1}{4}\left[(\sqrt[n]{1991})^2-2+\left(\dfrac{1}{\sqrt[n]{1991}}\right)^2\right]$

$=\left[\dfrac{1}{2}\left(\sqrt[n]{1991}+\dfrac{1}{\sqrt[n]{1991}}\right)\right]^2$

所以原式$=\left(-\dfrac{1}{\sqrt[n]{1991}}\right)^n=(-1)^n\cdot\dfrac{1}{1991}$ 选(D).

3. $\because\quad \sqrt{(a-\dfrac{1}{a})^2}=(\dfrac{1}{a}-a)=\dfrac{1-a^2}{a}$

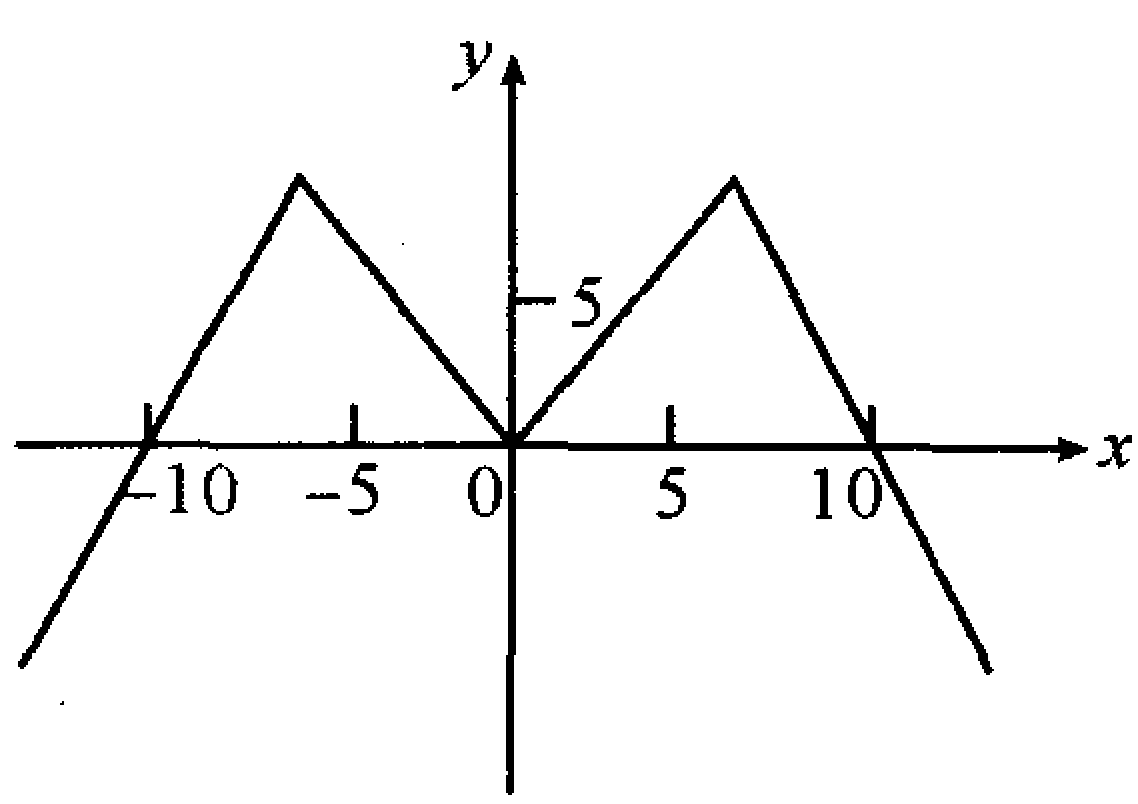
$\therefore\quad$ 原式$=\dfrac{1-a^2}{a}\times\dfrac{a}{a+1}\times\dfrac{1}{1+a}=\dfrac{1-a}{1+a}$ 选(A).

4. 由 $1-2|x|>0\Leftrightarrow|x|<\dfrac{1}{2}$,函数定义域为$-\dfrac{1}{2}<x<\dfrac{1}{2}$.

5. $\because\quad f[g(x)]=5-|g(x)|=5-|-5+|x||$

$$=\begin{cases}5-(5-|x|)=|x| & (|x|\leqslant 5\text{ 时})\\5-(|x|-5)=10-|x| & (|x|>5\text{ 时})\end{cases}$$

其图形关于 y 轴对称,如图所示.



6. $y=\sqrt{x^2+4x+4}+\sqrt{x^2-2x+1}+\sqrt{x^2-6x+9}$

$$=\sqrt{(x+2)^2}+\sqrt{(x-1)^2}+\sqrt{(x-3)^2}$$

$$=|x+2|+|x-1|+|x-3|$$

1°. 如果 $x\leqslant -2$，则 $x+2\leqslant 0, x-1<0, x-3<0$

$$y=-x-2-x+1-x+3=-3x+2$$

2°. 如果 $-2<x\leqslant 1$，则 $x+2\geqslant 0, x-1\leqslant 0, x-3<0$

$$\therefore\quad y=x+2-x+1-x+3=-x+6$$

3°. 如果 $1<x\leqslant 3$，则 $x+2>0, x-1\geqslant 0, x-3\leqslant 0$

$$\therefore\quad y=x+2+x-1-x+3=x+4$$

4°. 如果 $x>3$，则 $x+2>0, x-1>0, x-3>0$

$$y=x+2+x-1+x-3=3x-2.$$

综合得

$$y=\begin{cases}-3x+2 & (x\leqslant -2)\\ -x+6 & (-2<x\leqslant 1)\\ x+4 & (1<x\leqslant 3)\\ 3x-2 & (x>3)\end{cases}$$

7. 由 $\sqrt{2-a}$，$\sqrt{1-a}$ 有意义，必须 $a\leqslant 2$，且 $a\leqslant 1$．因此，$a\leqslant 1$，此时，$a-3<0$.

$$\text{原式}=\sqrt{\frac{(a-1)(a-2)}{(a-3)^2}}\cdot\frac{a-3}{\sqrt{2-a}}+\sqrt{1-a}$$

$$=\frac{\sqrt{1-a}\cdot\sqrt{2-a}}{|a-3|}\cdot\frac{a-3}{\sqrt{2-a}}+\sqrt{1-a}$$

$$=\frac{\sqrt{1-a}}{-(a-3)}\cdot(a-3)+\sqrt{1-a}$$

$$=-\sqrt{1-a}+\sqrt{1-a}=0.$$

8. 当 $1<x<2$ 时，$|x-2|=2-x$，$|x-1|=x-1$，$|x|=x$

$$\frac{|x-2|}{x-2}-\frac{|x-1|}{1-x}+\frac{|x|}{x}=-1-(-1)+1=1.$$

习题 6.3 的提示或解答

1. 由 $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=\frac{1}{2}(a-b)^2+\frac{1}{2}(a-c)^2+\frac{1}{2}(b-c)^2=0$

由非负数的性质得　$a=b=c$.

2. 由 $\frac{1}{2}|x-y|+\sqrt{2y+z}+z^2-z+\frac{1}{4}=0$.

得　$\frac{1}{2}|x-y|+\sqrt{2y+z}+(z-\frac{1}{2})^2=0$

由非负数性质得　$x-y=0, 2y+z=0, z-\frac{1}{2}=0$

所以 $z=\frac{1}{2}, y=-\frac{1}{4}, x=-\frac{1}{4}$,

$x+y+z=\frac{1}{2}+(-\frac{1}{4})+(-\frac{1}{4})=0$.

所以 $(x+y+z)^{2005}=0$.

3. 由已知等式变形为

$(a^4-2a^2bc+b^2c^2)+(b^4-2b^2ac+a^2c^2)+(c^4-2c^2ab+a^2b^2)=0$

即　$(a^2-bc)^2+(b^2-ac)^2+(c^2-ab)^2=0$

∴　$a^2=bc, b^2=ac, c^2=ab$，易得 $a=b=c$.

4. 由已知得 $|a-1|+|b+1|=0$，所以 $a=1, b=-1$

$a^{2003}+b^{2004}=(1)^{2003}+(-1)^{2004}=2$.

5. 由 $a^2+b^2-4a-2b=-5$ 得$(a-2)^2+(b-1)^2=0$

由非负数性质得 $a=2, b=1$.

所以 $\frac{\sqrt{a}+b}{\sqrt{3b+2a}}=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{3+4}}=\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{7}+\sqrt{14}}{7}$.

6. 由 $a+b+c=2\sqrt{a+1}+4\sqrt{b+1}+6\sqrt{c-2}-14$ 得

$[(a+1)-2\sqrt{a+1}+1]+[(b+1)-4\sqrt{b+1}+4]+[(c-2)-6\sqrt{c-2}+9]=0$

即　$(\sqrt{a+1}-1)^2+(\sqrt{b+1}-2)^2+(\sqrt{c-2}-3)^2=0$

$\therefore$　$\sqrt{a+1}=1, \sqrt{b+1}=2, \sqrt{c-2}=3$ 得

$a=0$，$b=3$，$c=11$

因此 $a(b+c)+b(c+a)+c(a+b)=33+33=66$.

习题 7.1 的提示或解答

1. $(a+1)+b(1+a)+c(1+a)(1+b)+d(1+a)(1+b)(1+c)$

$=(1+a)(1+b)+c(1+a)(1+b)+d(1+a)(1+b)(1+c)$

$=(1+a)(1+b)(1+c)+d(1+a)(1+b)(1+c)$

$=(1+a)(1+b)(1+c)(1+d)$

$\therefore$　$a+b(1+a)+c(1+a)(1+b)+d(1+a)(1+b)(1+c)$

$=(1+a)(1+b)(1+c)(1+d)-1$.

2. 左$=[(a+b)^2-(c+d)^2]+[(a+c)^2-(b+d)^2]$

$=(a+b+c+d)(a+b-c-d)+(a+c+b+d)(a+c-b-d)$

$=2(a-d)(a+b+c+d)=$右.

3. 左$=(a^2+b^2)(ab+cd)-ab(a^2+b^2)+ab(c^2+d^2)$

$=(a^2+b^2)(ab+cd-ab)+ab(c^2+d^2)$

$=(a^2+b^2)cd+ab(c^2+d^2)=a^2cd+b^2cd+abc^2+abd^2$

$=ac(ad+bc)+bd(bc+ad)=(ad+bc)(ac+bd)=$右.

4. 左$=(a+b)^3+3(a+b)^2c+3(a+b)c^2+c^3-a^3-b^3-c^3$

$=(a+b)^3+3(a+b)^2c+3(a+b)c^2-(a^3+b^3)$

$=(a+b)(a^2+2ab+b^2+3ac+3bc+3c^2-a^2+ab-b^2)$

$=(a+b)(3ab+3ac+3bc+3c^2)=3(a+b)[a(b+c)+c(b+c)]$

$=3(a+b)(b+c)(c+a)=$右.

5. 因$(a-b)+(b-c)+(c-a)=0$

所以 $[(a-b)+(b-c)+(c-a)]^2=0$

即 $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2+2(a-b)(b-c)+2(b-c)(c-a)+2(c-a)(a-b)=0$

所以 $2(a-b)(a-c)+2(b-c)(b-a)+2(c-a)(c-b)$

$=(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2.$

6. 由 $\frac{x}{ax-a^2}+\frac{y}{ay-a^2}+\frac{z}{az-a^2}-\frac{1}{x-a}-\frac{1}{y-a}-\frac{1}{z-a}-\frac{3}{a}$

$=\frac{x}{a(x-a)}-\frac{1}{x-a}+\frac{y}{a(y-a)}-\frac{1}{y-a}+\frac{z}{a(z-a)}-\frac{1}{z-a}-\frac{3}{a}$

$=\frac{x-a}{a(x-a)}+\frac{y-a}{a(y-a)}+\frac{z-a}{a(z-a)}-\frac{3}{a}$

$=\frac{3}{a}-\frac{3}{a}=0$，所以原式成立.

习题 7.2 的提示或解答

1. 右边 $=a(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})+b(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})+c(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})-3$

$=(a+b+c)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})-3=-3.$

2. 由条件 $[(c-b)+(b-a)]^2-4(b-a)(c-b)$

$=[(c-b)-(b-a)]^2$

$=(c+a-2b)^2=0$，

所以 $2b=a+c$.

3. 设 $\frac{a-b}{x}=\frac{b-c}{y}=\frac{c-a}{z}=k$，因 a、b、c 两两不等，显然 $k\neq0$.

所以 $a-b=kx,b-c=ky,c-a=kz$.

三式相加得 $k(x+y+z)=0$，又 $k\neq0$ 所以 $x+y+z=0$.

4. $$\frac{a}{ab+a+1}+\frac{b}{bc+b+1}+\frac{c}{ca+c+1}$$
$$=\frac{ac}{1+ac+c}+\frac{1}{c+1+ac}+\frac{c}{ca+c+1}$$
$$=\frac{1+c+ac}{1+c+ac}$$
$$=1.$$

5. 因为 $\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}=0$

所以 $$0=\left(\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}\right)\left(\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}+\frac{1}{a-b}\right)$$
$$=\frac{a}{(b-c)^2}+\frac{b}{(c-a)^2}+\frac{c}{(a-b)^2}+\frac{b}{(c-a)(b-c)}+$$
$$\frac{c}{(a-b)(b-c)}+\frac{a}{(b-c)(c-a)}+\frac{c}{(a-b)(c-a)}$$
$$+\frac{a}{(b-c)(a-b)}+\frac{b}{(c-a)(a-b)}$$
$$=\frac{a}{(b-c)^2}+\frac{b}{(c-a)^2}+\frac{c}{(a-b)^2}+$$
$$\frac{b(a-b)+c(c-a)+a(a-b)+c(b-c)+a(c-a)+b(b-c)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$
$$=\frac{a}{(b-c)^2}+\frac{b}{(c-a)^2}+\frac{c}{(a-b)^2}+$$
$$\frac{ab-b^2+c^2-ca+a^2-ab+cb-c^2+ac-a^2+b^2-bc}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$
$$=\frac{a}{(b-c)^2}+\frac{b}{(c-a)^2}+\frac{c}{(a-b)^2}.$$

6. $\because (a^3+b^3+c^3)(a^2+b^2+c^2)$

$=a^5+b^5+c^5+a^2b^2(a+b)+b^2c^2(b+c)+c^2a^2(c+a)$ ①

又因 $a+b+c=0, b+c=-a, a+b=-c, c+a=-b$, ②

且 $a^2+b^2+c^2=-2(ab+bc+ca)$ ③

$a^3+b^3+c^3=3abc$ ④

由①、②得

$(a^3+b^3+c^3)(a^2+b^2+c^2)=a^5+b^5+c^5-abc(ab+bc+ca)$

以③、④代入得

$$(a^3+b^3+c^3)(a^2+b^2+c^2)$$

$$=a^5+b^5+c^5-\left(\frac{a^3+b^3+c^3}{3}\right)\left(-\frac{a^2+b^2+c^2}{2}\right)$$

$$\therefore \quad a^5+b^5+c^5=\frac{5}{6}(a^3+b^3+c^3)(a^2+b^2+c^2)$$

即 $\dfrac{a^5+b^5+c^5}{5}=\left(\dfrac{a^3+b^3+c^3}{3}\right)\left(\dfrac{a^2+b^2+c^2}{2}\right)$

7. $\because \quad x+y=a+b$ ①

$x^2+y^2=a^2+b^2$ ②

则由 ①^2−②得$(x+y)^2-(x^2+y^2)=(a+b)^2-(a^2+b^2)$

即 $2xy=2ab$ ③

②−③得 $x^2-2xy+y^2=a^2-2ab+b^2$

即 $(x-y)^2=(a-b)^2$

$\therefore \quad |x-y|=|a-b|$

因此 $x-y=a-b$ 或 $x-y=b-a$

分别与 $x+y=a+b$ 联立，解得

$\begin{cases}x=a\\y=b\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=b\\y=a\end{cases}$

都有 $x^{1997}+y^{1997}=a^{1997}+b^{1997}$.

习题 7.3 的提示或解答

1. 由方程两边比较可知 $\dfrac{x}{x-1}=0$，但 $x-1\neq0$，故只能 $x=0$

所以 $\left.\dfrac{x^3-2001}{x^4+29}\right|_{x=0}=\dfrac{-2001}{29}=-69.$

2. 由 $a^2+b^2=6ab \Rightarrow (a+b)^2=8ab$,其中 $a+b>0$,

同理可得 $(a-b)^2=4ab$　　其中 $a-b>0$,

所以 $\left(\dfrac{a+b}{a-b}\right)^2=\dfrac{(a+b)^2}{(a-b)^2}=\dfrac{8ab}{4ab}=2.$

由于 $\dfrac{a+b}{a-b}>0$,所以 $\dfrac{a+b}{a-b}=\sqrt{2}.$

3. 由 $\begin{cases} x+xy+y=2+3\sqrt{2} \\ x^2+y^2=6 \end{cases}$ 变形为 $\begin{cases} (x+y)^2+xy=2+3\sqrt{2} & ① \\ (x+y)^2-2xy=6 & ② \end{cases}$

①×2+②得　　$(x+y)^2+2(x+y)=10+6\sqrt{2}$

即　$(x+y)^2+2(x+y)+1=10+6\sqrt{2}+1$

$(x+y+1)^2=11+6\sqrt{2}=3^2+2\times3\sqrt{2}+(\sqrt{2})^2=(3+\sqrt{2})^2$

所以　$|x+y+1|=3+\sqrt{2}.$

4. 两式 $y+|\sqrt{x}-\sqrt{3}|=1-a^2$,与 $|x-3|=y-1-b^2$ 相加得

$|\sqrt{x}-\sqrt{3}|+|x-3|=-(a^2+b^2)$

$|\sqrt{x}-\sqrt{3}|(1+|\sqrt{x}+\sqrt{3}|)=-(a^2+b^2)$

由于左边非负,右边非正,只能 $|\sqrt{x}-\sqrt{3}|(1+|\sqrt{x}+\sqrt{3}|)=0$

且　　$a^2+b^2=0$

所以 $\sqrt{x}-\sqrt{3}=0$ 且 $a^2+b^2=0$ 于是 $x=3$ 且 $a=0$ 同时 $b=0$.

以 $x=3,a=b=0$ 代入 $y+|\sqrt{x}-\sqrt{3}|=1-a^2$ 得 $y=1$,所以 $x+y=4,a-b=0,2^{x+y}+2^{a-b}=2^4+2^0=16+1=17.$

5. 由 $(\sqrt{x^2+1997}-x)(\sqrt{y^2+1997}-y)=1997$

得　$(\sqrt{x^2+1997}+x)(\sqrt{x^2+1997}-x)(\sqrt{y^2+1997}-y)$

$=1997(\sqrt{x^2+1997}+x)$

即　$\sqrt{y^2+1997}-y=\sqrt{x^2+1997}+x$　　①

同理可得 $\sqrt{x^2+1997}-x=\sqrt{y^2+1997}+y$ ②

①+②得 $2(x+y)=0.$

$\therefore \quad 100^{10x}\cdot 10^{20y}=10^{20x}\cdot 10^{20y}=10^{20(x+y)}=10^0=1.$

6. 因为 $1<a<2$,所以 $\sqrt{\frac{2-a}{a}}$,$\sqrt{\frac{a}{2-a}}$有意义且$\sqrt{\frac{2-a}{a}}-\sqrt{\frac{a}{2-a}}\neq 0$.

由于 $b=\dfrac{\sqrt{\frac{2-a}{a}}+\sqrt{\frac{2}{2-a}}}{\sqrt{\frac{2-a}{a}}-\sqrt{\frac{a}{2-a}}}=\dfrac{\left(\sqrt{\frac{2-a}{a}}+\sqrt{\frac{2}{2-a}}\right)^2}{\frac{2-a}{a}-\frac{a}{2-a}}$

$$=\frac{\frac{2-a}{a}+\frac{a}{2-a}+2\sqrt{\frac{2-a}{a}}\cdot\sqrt{\frac{a}{2-a}}}{\frac{(2-a)^2-a^2}{a(2-a)}}$$

$$=\frac{(2-a)^2+a^2+4a-2a^2}{(2-a)^2-a^2}$$

$$=\frac{4}{4(1-a)}=\frac{1}{1-a},$$

所以 $\quad b(a-1)=-1.$

7. 由 $ab+a+b=3$ 得 $ab+a+b+1=4$ 即$(a+1)(b+1)=4.$

同理可得 $\quad(b+1)(c+1)=4,(c+1)(a+1)=4$

三式相乘可得 $\quad(a+1)^2(b+1)^2(c+1)^2=64.$

注意到 $a>0,b>0,c>0$,因此 $a+1>0,b+1>0,c+1>0$,所以$(a+1)(b+1)(c+1)=8.$

8. 原式$=\dfrac{\left(\frac{a}{b}\right)^2+\frac{a}{b}+2}{\left(\frac{a}{b}\right)^2+\frac{a}{b}+1}=\dfrac{5+\sqrt{5}+2}{5+\sqrt{5}+1}=\dfrac{7+\sqrt{5}}{6+\sqrt{5}}$

$$=\frac{(7+\sqrt{5})(6-\sqrt{5})}{(6+\sqrt{5})(6-\sqrt{5})}=\frac{1}{31}(37-\sqrt{5}).$$

习题 8.1 的提示或解答

1. 由 $a<b \Rightarrow a-b<0$，排除(A)

由 $a<-b \Rightarrow a+b<0$ 排除(B)

若 $a<b<0 \Rightarrow a-b<0, a(a-b)>0$ 即 $a^2-ab>0$，(C)真

若 $a>b$，则 $5a-b>0$ 不真.

比如 $a=-1, b=-2, -1>-2$，但 $(-1)\times5<(-2) \Rightarrow (-1)\times5-(-2)<0$.

2. $a=3^{55}, b=4^{44}, c=5^{33}$

$\frac{a}{b}=\frac{(3^5)^{11}}{(4^4)^{11}}=\left(\frac{243}{256}\right)^{11}<1$，所以 $a<b$.

$\frac{b}{c}=\frac{(4^4)^{11}}{(5^3)^{11}}=\left(\frac{256}{125}\right)^{11}>1$，所以 $b>c$.

$\frac{c}{a}=\frac{(5^3)^{11}}{(3^5)^{11}}=\left(\frac{125}{243}\right)<1$　　所以 $c<a$.

所以　$c<a<b$　　选(C)

3. 因为 $13^{13}\cdot11^{11}=13^{11}\cdot13^2\cdot11^{11}>13^{11}\cdot11^2\cdot11^{11}=13^{11}\cdot11^{13}$.

所以　$13^{13}\cdot11^{11}>13^{11}\cdot11^{13}$.

4.
$$\begin{aligned}199119911991 &=1991\times100010001<1991\times11\times10^7\\&=11^2\times181\times10^7<11^3\times17\times10^7\\&=11^3\times170\times10^6\\&<11^4\times160\times10^5<11^5\times150\times10^4<11^6\times140\times10^3\\&<11^7\times130\times10^2<11^8\times120\times10<11^{11}.\end{aligned}$$

所以 $199119911991<11^{11}$.

5. 因为 $19^{15}>16^{15}=2^{60}>2^{57}$，所以 $19^{91}=(19)^{76}\times(19^{15})>19^{76}\cdot2^{57}$

又 $(999991)^{19}<(1042568)^{19}=(19^4\times8)^{19}=19^{76}\times2^{57}$

所以 $19^{91}>(999991)^{19}$.

6. $\frac{1}{10^2}+\frac{1}{11^2}+\cdots+\frac{1}{999^2}+\frac{1}{1000^2}<\frac{1}{9\cdot 10}+\frac{1}{10\cdot 11}+\frac{1}{11\cdot 12}+\cdots$

$+\frac{1}{998\cdot 999}+\frac{1}{999\cdot 1000}$

$=(\frac{1}{9}-\frac{1}{10})+(\frac{1}{10}-\frac{1}{11})+\cdots+(\frac{1}{999}-\frac{1}{1000})=\frac{1}{9}-\frac{1}{1000}<0.111.$

同法 $\frac{1}{10^2}+\frac{1}{11^2}+\cdots+\frac{1}{1000^2}>\frac{1}{10\times 11}+\frac{1}{11\times 12}+\cdots+\frac{1}{1000\times 1001}$

$=(\frac{1}{10}-\frac{1}{11})+(\frac{1}{11}-\frac{1}{12})+\cdots+(\frac{1}{1000}-\frac{1}{1001})$

$=\frac{1}{10}-\frac{1}{1001}>0.099.$

所以 $0.99<\frac{1}{10^2}+\frac{1}{11^2}+\frac{1}{12^2}+\cdots+\frac{1}{999^2}+\frac{1}{1000^2}<0.111.$

习题 8.2 的提示或解答

1. 由 $a(x-1)>x-1 \Rightarrow (a-1)(x-1)>0$,若 $a=1$,不等式无解,当 $a\neq 1$ 时,若 $a>1$ 则 $a-1>0, x-1>0 \Rightarrow x>1$.

若 $a<1$ 则 $a-1<0$ $x-1<0 \Rightarrow x<1$.

2. $\left.\begin{array}{l}\text{由 } 2x-5>3-2x \Leftrightarrow 4x>8 \Rightarrow x>2 \\ \text{由 } 3x-6>4x-9 \Leftrightarrow 3>x \Rightarrow x<3\end{array}\right\} \Rightarrow 2<x<3.$

3. $\left.\begin{array}{l}\text{由 } 3x-10>0 \Rightarrow x>\frac{10}{3} \\ \text{由 } \frac{16}{3}x-7<4x+3 \Rightarrow \frac{4}{3}x<10 \Rightarrow x<7.5\end{array}\right\}$

所以$\frac{10}{3}<x<7.5$.

因此所求的所有正整数解是满足 $\frac{10}{3}<x<7.5$ 的正整数:4,5,6,7.

4. 由 $ax>(a+b)(a-b)+bx$

得 $(a-b)x>(a+b)(a-b)$

当 $a-b=0$ 即 $a=b$ 时，不等式无解；

当 $a-b>0$　　即 $a>b$ 时，$x>a+b$；

当 $a-b<0$　　即 $a<b$ 时，$x<a+b$.

5. $\begin{cases}3x+2y-z=4 & ①\\ 2x-y+2z=8 & ②\\ x+y+z<7 & ③\end{cases}$

由 2×③　　$2x+2y+2z<14$　　④

④−②　$3y<6 \Rightarrow y<2$.

①×2　$6x+4y-2z=8$　　⑤

⑤×②　$8x+3y=16, 8x=16-3y>16-3\times2=10 \Rightarrow x>\frac{5}{4}$.

由①　　$6x-2z=8-4y$

由②　　$6x+6z=24+3y$

相减得　　$8z=16+7y<16+14=30, z<\frac{30}{8}$.

所以$\frac{5}{4}<x, y<2, z<\frac{30}{8}$.　其整数解 $y=1; z=1,2,3$;

$x=2,3,4$，(x,y,z)三数组：(1,1,2)(1,1,3)，(1,1,4)(1,2,2)，(1,2,3)，(1,3,2)共 6 组解.

习题 8.3 的提示或解答

1. 设小王年龄 x 岁，弟弟 y 岁，则

$x+5y=97$　　$x<20$　　$x>y$

则 $6y<97, y<16\frac{1}{6}, y<x<20$，所以 $17\leqslant x<20$.

因此小王年龄只能是 17,18,19 岁，它的弟弟的年龄是 $y=\frac{97-x}{5}$，试验知，小王年龄只能是 17 岁，弟弟 16 岁.

2. 设该人答对 x 题，答错 y 个题，由于有一题未答

所以 $x+y=15$，所得分数 $6x-2y$ 要在 60 分以上

即 $6x-2y\geqslant 60$ 又 $2x+2y=30$，相加得 $8x\geqslant 90$.

$x\geqslant\frac{90}{8}=11.25$，所以该生至少要作对 12 题才能保证成绩在 60 分以上.

3. 无论如何，每辆卡车上装物不少于 2 吨，而不多于 3 吨.

则 n 辆卡车装物至少 $2n$ 吨，至多 $3n$ 吨

所以 $2n\leqslant 10<3n, 3<n\leqslant 5$.

即 要用 4 辆或 5 辆卡车.

但事实上如果 13 箱货物，每只箱重 $\frac{10}{13}$ 吨，其总重恰为 10 吨，每辆卡车最多只能装 3 箱货物，从而 4 辆卡车无法将这些货一次运走，因此，至少需安排 5 辆载重 3 吨的汽车，才能保证把这些箱子一次运走.

4. 联立 $\begin{cases}x+y=p\\5x+3y=11\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=\dfrac{11-3p}{2}\\[2mm]y=\dfrac{5p-11}{2}\end{cases}$ 要 $x>0$，$y>0$，解得，$2.2<p<3\frac{2}{3}$. 而 p 为整数，所以 $p=3$.

习题 8.4 的提示或解答

1. 因为 $a>b>0$，所以 $a^2>b^2$，$(a-b)>0$

因此 $a^2(a-b)>b^2(a-b)$

即 $a^3-a^2b>ab^2-b^3$

也就是 $a^3+b^3>a^2b+ab^2$.

2. 由于 a、b 都是正数，则 $\frac{a^2}{b}+b\geqslant 2\sqrt{\frac{a^2}{b}\cdot b}=2a$.

3. 根据 2 题的结果　$\frac{a^2}{b}+b\geqslant 2a$　　$\frac{b^2}{a}+a\geqslant 2b$

相加得　　$\frac{a^2}{b}+b+\frac{b^2}{a}+a\geqslant 2a+2b$

也就是　$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}\geqslant a+b.$

4. 因为　　$a^2+b^2\geqslant 2ab$

所以　　$2(a^2+b^2)\geqslant a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$

两边同除以 4 得

$\frac{a^2+b^2}{2}\geqslant\frac{(a+b)^2}{4}$，即　$\frac{a^2+b^2}{2}\geqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^2.$

5. 因为　$a^2+b^2=(a^2+b^2)\cdot 1=(a^2+b^2)\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)$

$$=x^2+\frac{b^2x^2}{a^2}+\frac{a^2y^2}{b^2}+y^2$$

$$\geqslant x^2+y^2+2\,\frac{bx}{a}\cdot\frac{ay}{b}$$

$$=x^2+2xy+y^2$$

$$=(x+y)^2.$$

所以　$a^2+b^2\geqslant(x+y)^2.$

习题 9.1 的提示或解答

1. 由 $1995x+6y=420000$ 的一组整数解应满足 $5|y,6|x$，因此选(64，48720)一组，事实上，$1995\times 64+6\times 48720=420000$ 恰满足要求，选(D).

2. 由 $|x-y+3|$ 与 $|x+y-1995|$ 互为相反数知

$|x-y+3|+|x+y-1995|=0$

根据非负数性质，$x-y+3=0$，$x+y-1995=0$，解得 $\begin{cases}x=996\\y=999\end{cases}$

所以 $\left.\dfrac{x+2y}{x-y}\right|_{\substack{x=996\\y=999}}=\dfrac{996+1998}{996-999}=\dfrac{2994}{-3}=-998.$

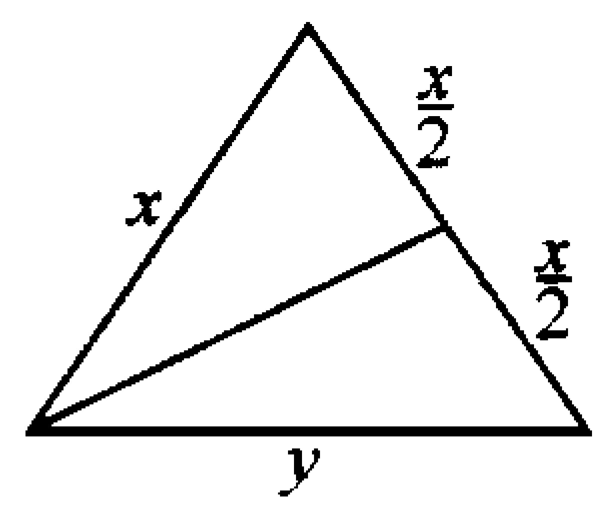
3. 在 $y=kx+b$ 中，当 $x=0$ 时 $y=2$，表明 $b=2$；

即 $y=kx+2.$

当 $x=3$ 时，$y=3$，有 $3=3k+2$，所以 $k=\dfrac{1}{3}$.

则 $\dfrac{b^2}{k}=\dfrac{2^2}{\frac{1}{3}}=12.$

4. 设等腰三角形的一腰长为 x 厘米，底边长为 y 厘米. 则有



$$\begin{cases}\dfrac{x}{2}+x=12\\ \dfrac{x}{2}+y=21\end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases}\dfrac{x}{2}+x=21\\ \dfrac{x}{2}+y=12\end{cases}$$

解得 $\begin{cases}x=8\\y=17\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=14\\y=5.\end{cases}$

经检验，三边为 8，8，17 不能构成三角形，只有 $x=14$，$y=5$ 合题意，所以这个等腰三角形底边为 5 厘米.

5. 设一等奖 x 人，二等奖 y 人，则 $x+y=22$，$200x+50y=1400$，即 $4x+y=28$，可知 $4\mid y$，只有选择支(B) $x=2$，$y=20$ 合要求，事实上 $200\times2+20\times50=1400$ 满足条件，选(B).

习题 9.2 的提示或解答

1. 方程 $k(x-1)=5x-2$ 的解为 1995

即 $k(1995-1)=5\times1995-2$， $1994k=9973$，$k=\dfrac{9973}{1994}$.

2. 设有 x 个人 则 $ax+15=9x-5$ $x=\dfrac{10}{9-a}$

因 x 为正整数，只能 $9-a=1, 9-a=2, 9-a=5$

相应的 $x=10, x=5, x=2$.

所求人数为 10 人，5 人，2 人三种可能.

3. 设从第一组调 x 人到第二组，这时第一组剩 $5-x$，第二组为 $a+x$ 人，此时第二组人数为第一组之 2 倍，$a+x=2(5-x)$ 得 $3x=10-a, x=\frac{10-a}{3}$，由于人数为正整数，$x<5$.

$a=1$ 时，$x=3$(人)，$a=4$ 时 $x=2$(人)，$a=7$ 时 $x=1$(人).

如果 $a=1$ 时，从第一组向第二组调 3 人；

如果 $a=4$ 时，从第一组向第二组调 2 人；

如果 $a=7$ 时，从第一组向第二组调 1 人.

4. 设买红彩笔 x 支，黑彩笔 y 支，则 $x+y=a, 5x+3y=31$

联立解得 $x=\frac{31-3a}{2}, y=\frac{5a-31}{2}$，由 $x>0, y>0$，解不等式得 $6\frac{1}{5}<a<10\frac{1}{3}$，由于 a 为整数，a 可取 7、8、9、10，但要 x, y 为整数，a 必为整数，所以 $a=7$ 或 9.

当 $a=7$ 时，$x=5, y=2$；当 $a=9$ 时，$x=2, y=7$.

经验证，这两组解均含要求.

5. 设丙班有 n 个女同学，甲班第一组有 x 个女同学，乙班第一组有 y 个女同学，则乙班原有 $n+1$ 个女同学，甲班原有 $n+5$ 个女同学，依题意，列出方程：

$$(n+5)-x+2=(n+1)-y+x=n-2+y,$$

$$\therefore \quad 7-x=1-y+x=y-2$$

即 $\begin{cases}7-2x=1-y\\1+x=2y-2\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=5,\\y=4.\end{cases}$

答：甲班第一组有 5 个女同学，乙班第一组有 4 个女同学.

习题 9.3 的提示或解答

1. 设该人答对 x 题，答错 y 题，不答 z 题

则 $x+y+z=6, 8x+2z=20$　即 $4x+z=10$.

可见 z 为偶数，只能取 0,2,4,6，试验知 $z=2, x=2$，所以 $y=2$，即该同学答错 2 题.

2. 设笼中有蜘蛛 x 只，甲虫 y 只，则 $8x+6y=42 \Leftrightarrow 4x+3y=21 \Rightarrow 3\mid x$.

所以 $x=3,6,9,\cdots$，当 $x\geqslant 6$ 时，其足数 $\geqslant 48>42$，所以只能 $x=3$.

于是 $y=3, x+y=6$，即蜘蛛与甲虫一共有 6 只.

3. 设小明共有邮票 x 张，其中外国邮票为 a 张，则 a 为正整数，且 $0<a<100$，由题意得 $\frac{x}{4}+\frac{x}{8}+\frac{x}{19}+a=x$，化简得 $x=\frac{152}{87}a$. 由于 $(152,87)=1$，$0<a<100$，a 为正整数，只能是 $a=87, x=152$.

4. $5x-14y=11$，易知一组特解 $a=5, b=1$.

所以 $x=5+(-14)t, y=1-5t$.

即 $\begin{cases} x=5-14t \\ y=1-5t \end{cases}$

但 $5-14t>0, 1-5t>0$，得 $t<\frac{1}{5}$.

即　t 取非正整数时，即可.

习题 9.4 的提示或解答

1. 由 $\begin{cases} 323x+457x=1103 & ① \\ 177x+543y=897 & ② \end{cases}$

①＋② 得 $500x+1000y=2000 \Rightarrow x+2y=4$ 　③

③×177 得 $177x+354y=708$ 　④

②－④ 得 $189y=189 \Rightarrow y=1$，代入③得 $x=2$

∴　方程组的解为 $\begin{cases} x=1 \\ y=2. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 8x+13y+13z=154 & ① \\ 13x+8y+13z=154 & ② \\ 43x+36y+87z=846 & ③ \end{cases}$

观察①与②知 $x=y$，此时方程①变为 $21x+13z=154$

方程③变为 $79x+87z=846$

联立解得 $x=3, z=7$.

所以原方程组的解是 $\begin{cases} x=3 \\ y=3 \\ z=7. \end{cases}$

3.　将 $\begin{cases} \dfrac{xy}{x+y}=2 \\ \dfrac{yz}{y+z}=4 \\ \dfrac{zx}{z+x}=5 \end{cases}$

取倒数得 $\begin{cases} \dfrac{x+y}{xy}=\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{y+z}{yz}=\dfrac{1}{4} \\ \dfrac{z+x}{zx}=\dfrac{1}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{2} & ① \\ \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{4} & ② \\ \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{5} & ③ \end{cases}$

①＋②＋③　$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}\right)=\dfrac{19}{40}$ 　④

④－①得 $\frac{1}{z}=\frac{19}{40}-\frac{1}{2}=\frac{19-20}{40}=-\frac{1}{40}\Rightarrow z=-40$

④－②得 $\frac{1}{x}=\frac{19}{40}-\frac{1}{4}=\frac{19-10}{40}=\frac{9}{40}\Rightarrow x=\frac{40}{9}$

④－③得 $\frac{1}{y}=\frac{19}{40}-\frac{1}{5}=\frac{19-8}{40}=\frac{7}{40}\Rightarrow y=\frac{40}{7}$

所以 $\begin{cases} x=\frac{40}{9} \\ y=\frac{40}{7} \\ z=-40. \end{cases}$

4. 方程组 $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y+z}=\frac{1}{2} \\ \frac{1}{y}+\frac{1}{z+x}=\frac{1}{3} \\ \frac{1}{z}+\frac{1}{x+y}=\frac{1}{4} \end{cases}$

各方程左端通分，方程两边同时取倒数

得 $\begin{cases} \frac{xy+xz}{x+y+z}=2 & ① \\ \frac{yz+yx}{x+y+z}=3 & ② \\ \frac{zx+zy}{x+y+z}=4 & ③ \end{cases}$

①＋②＋③得 $\frac{xy+yz+zx}{x+y+z}=\frac{9}{2}$ ④

④－①得 $\frac{yz}{x+y+z}=\frac{5}{2}$ ⑤

同理可得 $\frac{zx}{x+y+z}=\frac{3}{2}$ ⑥

$\frac{xy}{x+y+z}=\frac{1}{2}$ ⑦

$\dfrac{⑤}{⑥}$得 $\dfrac{y}{x}=\dfrac{5}{3}$　　即 $y=\dfrac{5}{3}x$　　⑧

$\dfrac{⑤}{⑦}$得 $\dfrac{z}{x}=5$　　即 $z=5x$　　⑨

以⑧、⑨代入 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y+z}=\dfrac{1}{2}$ 得 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{\dfrac{5}{3}x+5x}=\dfrac{1}{2}$，解得 $x=\dfrac{23}{10}$.

所以 $y=\dfrac{23}{6}$，$z=\dfrac{23}{2}$.

经检验，原方程组的解为 $\begin{cases}x=\dfrac{23}{10}\\ y=\dfrac{23}{6}\\ z=\dfrac{23}{2}.\end{cases}$

5. 方程组 $\begin{cases}1995x+1997y=5989 & ①\\ 1997x+1995y=5987 & ②\end{cases}$

①＋②得 $3992x+3992y=11796 \Rightarrow x+y=1$　　③

②－①得 $2x-2y=-2 \Rightarrow x-y=-1$　　④

由③、④解得 $x=1$，$y=2$，所以原方程组的解为 $\begin{cases}x=1\\ y=2.\end{cases}$

6. 方程组 $\begin{cases}ay+bx=c & ①\\ cx+az=b & ②\\ bz+cy=a & ③\end{cases}$ $(abc\neq 0)$，由 $\dfrac{①}{ab}$，$\dfrac{②}{ac}$，$\dfrac{③}{bc}$ 得

$$\begin{cases}\dfrac{y}{b}+\dfrac{x}{a}=\dfrac{c}{ab} & ④\\ \dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}=\dfrac{b}{ac} & ⑤\\ \dfrac{z}{c}+\dfrac{y}{b}=\dfrac{a}{bc} & ⑥\end{cases}$$

$\dfrac{④+⑤+⑥}{2}$得 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{c}{ab}+\dfrac{b}{ac}+\dfrac{a}{bc}\right)$　　⑦

⑦－④得 $\frac{z}{c}=\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)-\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{c}{ab}+\frac{b}{ac}+\frac{a}{bc}\right)-\frac{c}{ab}$$

$$=\frac{a^2+b^2-c^2}{2abc},$$

∴ $z=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

同法求得 $y=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}, x=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$.

习题 10.1 的提示或解答

1. 以 $x=1$ 代入得 $(a-b)\times1^2+(b-c)\times1+(c-a)$

$$=(a-b)+(b-c)+(c-a)=0$$

根据方程根的定义知，$x=1$ 是方程 $(a-b)x^2+(b-c)x+(c-a)=0$ 的一个根.

2. 由于 $1,\frac{1}{2}$ 是 $ax^2+bx+2=0$ 的两个根，依根的定义得

$$\begin{cases} a+b+2=0 & ① \\ \frac{a}{4}+\frac{b}{2}+2=0 & ② \end{cases}$$

解得 $a=4$， $b=-6$.

3. 由于 m 是方程 $ax^2+bx+a=0$ 的一个根，所以 $am^2+bm+a=0$.

由于 $a\neq0$，易知 $m\neq0$，所以 $\frac{am^2+bm+a}{m^2}=0$

即 $a+b(\frac{1}{m})+a\left(\frac{1}{m}\right)^2=0$，这表明 $\frac{1}{m}$ 也是 $ax^2+bx+a=0$ 的根.

4. $(x-19)(x-83)-p=(x-r_1)(x-r_2)$，

即 $(x-r_1)(x-r_2)+p=(x-19)(x-83)$. 易知 19，83 是

$(x-r_1)(x-r_2)=-p$ 仅有的两个根.

$\therefore$　方程 $(x-r_1)(x-r_2)=-p$ 的根是 19 和 83.

习题 10.2 的提示或解答

1. 方程 $(x-\alpha)(x-\beta)=1$ 即 $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta-1=0$.

其判别式为
$$\begin{aligned}\Delta &=[-(\alpha+\beta)]^2-4\times1(\alpha\beta-1)\\ &=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta+4=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2-4\alpha\beta+4\\ &=(\alpha-\beta)^2+4>0\end{aligned}$$

所以方程 $(x-\alpha)(x-\beta)=1$ 有两个不等实数根.

2. 假设方程 $x^2+p_1x+q_1=0$ 和 $x^2+p_2x+q_2=0$ 都没有实数根.

则　$\Delta_1=p_1^2-4q_1<0$，且 $\Delta_2=p_2^2-4q_2<0$

$$p_1^2+p_2^2-4(q_1+q_2)<0$$

即　$p_1^2+p_2^2-2p_1p_2<0$，也就是 $(p_1-p_1)^2<0$，矛盾.

所以 Δ_1 与 Δ_2 中至少有一个不小于 0，也就是题设的两个一元二次方程中至少有一个有实根.

3. 对方程①$\frac{1}{2}x^2+\sqrt{2a+b}x+\sqrt{cd}=0$，设其判别式为 Δ_1；

对方程②：$\frac{1}{2}x^2+\sqrt{2b+c}x+\sqrt{da}=0$，设其判别式为 Δ_2；

对方程③：$\frac{1}{2}x^2+\sqrt{2c+d}x+\sqrt{ab}=0$，设其判别式为 Δ_3；

对方程④：$\frac{1}{2}x^2+\sqrt{2d+a}x+\sqrt{bc}=0$，设其判别式为 Δ_4.

则
$$\begin{aligned}\Delta_1+\Delta_3&=(2a+b)-2\sqrt{cd}+(2c+d)-2\sqrt{ab}\\ &=(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2+(\sqrt{c}-\sqrt{d})^2+a+c>0\end{aligned}$$
$(a,b,c,d$ 均为正数$)$

所以 Δ_1,Δ_3 中至少有一个大于 0，也就是方程①，③中至少

有一个有不相等的实数根.

同理可证,方程②,④中至少也有一个有不相等的实数根.综上可得,方程①,②,③,④中至少有两个有不相等的实数根.

4. 因为方程有实根,所以判别式

$$\begin{aligned}\Delta &= 4[(1+a)^2-(3a^2+4ab+4b^2+2)]\\ &= 4(-1+2a-2a^2-4ab-4b^2)\\ &= -4[(1-2a+a^2)+(a^2+4ab+4b^2)]\\ &= -4[(1-a)^2+(a+2b)^2]\geqslant 0\end{aligned}$$

$\because\quad -4[(1-a)^2+(a+2b)^2]\leqslant 0$

$\therefore\quad -4[(1-a)^2+(a+2b)^2]=0$,

$\therefore\quad 1-a=0$ 且 $a+2b=0$

即 $a=1,b=-\dfrac{1}{2}$,因此当 $a=1,b=-\dfrac{1}{2}$ 时,方程有实根.

5. 方程的判别式

$$\begin{aligned}\Delta &= (b^2+a^2-c^2)^2-4a^2b^2\\ &= (b^2+a^2-c^2+2ab)(b^2+a^2-c^2-2ab)\\ &= [(a^2+2ab+b^2)-c^2][(a^2-2ab+b^2)-c^2]\\ &= [(a+b)^2-c^2][(a-b)^2-c^2]\\ &= (a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(a-b-c)\end{aligned}$$

此处 $a+b+c>0,a+b-c>0$,由 $|a-b|<c\Rightarrow -c<a-b<c$

因此 $a-b+c>0,a-b-c<0$. 因此 $\Delta<0$,所以二次方程无实根.

习题 10.3 的提示或解答

1. 设方程 $x^2+px+q=0$ 的两个正整数根为 x_1,x_2,依韦达定理

$$x_1+x_2=-p,x_1x_2=q.$$

则 $p+q=-(x_1+x_2)+x_1x_2=198$

$x_1x_2-x_1-x_2+1=199$

$(x_1-1)(x_2-1)=199=1\times199$

$x_1-1=1,x_2-1=199.\ x_1=2,x_2=200.$

所以,方程的两个正整数根为 2 和 200.

2. 由于两个质数 p,q 是整系数方程 $x^2-99x+m=0$ 的两根.

依韦达定理,$p+q=99,pq=m$ 由 p,q 均为质数,只能 p,q 分别为 2 与 97,因此$\frac{q}{p}+\frac{p}{q}=\frac{2}{97}+\frac{97}{2}=\frac{9413}{194}$.

3. 由 a、b 是方程 $x^2+px+1=0$ 的两个实根,c、d 是方程 $x^2+qx+1=0$ 的两个实根.

则 $a+b=-p,ab=1,c+d=-q,cd=1.$

$$\begin{aligned}
&(a-c)(b-c)(a+d)(b+d)\\
=&[(a-c)(b+d)][(b-c)(a+d)]\\
=&(ab-bc+ad-cd)(ab-ac+bd-cd)\\
=&(1-bc+ad-1)(1-ac+bd-1)\\
=&(ad-bc)(bd-ac)=abd^2-b^2cd-a^2cd+abc^2\\
=&d^2-b^2-a^2+c^2=c^2+d^2+2-(a^2+b^2+2)\\
=&(c+d)^2-(a+b)^2=q^2-p^2.
\end{aligned}$$

4. 设 $x^2+px+q=0$ 的二根为 $\alpha,2\alpha$,则由韦达定理得

$3\alpha=-p$,且 $2\alpha^2=q$.

消去 α 得 $q=\frac{2}{9}p^2$.

5. 设方程两根为 x_1,x_2.

由题意,有 $x_1+3=80x_2$,即 $x_1=80x_2-3$.

又 $x_1+x_2=402$,所以 $80x_2-3+x_2=402$.

解得 $x_2=5,x_1=80x_2-3=397$,于是 $k=x_1x_2=397\times5=1985$.

6. 根据韦达定理与根的判别式,知

$$\begin{cases}\alpha+\beta=\alpha\beta=a\\ \Delta=a^2-4a\geqslant0\end{cases}\Rightarrow(\alpha+\beta)^2-4a\geqslant0\Rightarrow\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta-4a\geqslant0$$

$$\Rightarrow \alpha^2+\beta^2-2a\geqslant 0 \Rightarrow \alpha^2+\beta^2\geqslant 2a=2(\alpha+\beta).$$

7. 由韦达定理知 $\begin{cases} c+d=-a \\ cd=b \\ a+b=-c \\ ad=d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+c+d=a+b+c=0 \\ cd=b \\ ab=d \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} b-d=0 \\ cd=b \\ ab=d \end{cases} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} cd-d=d(c-1)=0 \Rightarrow c=1 \\ b-ab=b(1-a)=0 \Rightarrow a=1 \end{array}\right\}$ $d=-a-c=-2$,

$b=-a-c=-2$.

所以 $a+b+c+d=(+1)+(-2)+(+1)+(-2)=-2$.

8. $\Delta=(-a)^2-4\cdot 4\geqslant 0$, $a^2\geqslant 16$, 所以 由 $a<0$ 知 $a\leqslant -4$.

由韦达定理 $x_1+x_2=a$, $x_1x_2=4$, 两根同号.

$$\therefore \quad \left(\sqrt{\frac{x_1}{x_2}}+\sqrt{\frac{x_2}{x_1}}\right)^2=\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}+2=\frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{x_1x_2}+2$$

$$=\frac{(x_1+x_2)^2}{x_1x_2}-2+2=\frac{(x_1+x_2)^2}{x_1x_2}=\frac{a^2}{4}.$$

因为 $a<0$, 故 $\sqrt{\frac{x_1}{x_2}}+\sqrt{\frac{x_2}{x_1}}=-\frac{a}{2}$.

习题 10.4 的提示或解答

1. $p(0)=c$ 为奇数, $p(1)=a+b+c$ 为奇数, 因此 $a+b$ 为偶数.

假设方程 $ax^2+bx+c=0$ 有整数根 m

应有 $am^2+bm+c=0$, 即 $am^2+bm=-c$ 为奇数. (*)

由于 $a+b$ 为偶数, 则 a、b 同奇, 同偶.

若 a、b 同为偶数, 则 am^2+bm 为偶数与(*)矛盾.

着 a、b 同为奇数, m 为偶数时, am^2+bm 为偶数.

m 为奇数时, am^2 为奇数, bm 为奇数

am^2+bm 仍为偶数，均与(＊)矛盾.

所以方程 $ax^2+bx+c=0$ 没有整数根.

2. 设两整数根为 $x,y(x\leqslant y)$ 则 $\begin{cases}x+y=a>0\\ xy=4a>0\end{cases}$

解得 $\frac{a}{2}\leqslant y\leqslant a, 4\leqslant x\leqslant 8$，可推出 $x\neq 4$，$\therefore a=\frac{x^2}{x-4}$

由于 x 为整数

所以 $x=5$ 时，$a=25, y=20$；$x=6$ 时，$a=18, y=12$；

$x=7$ 时，a 不是整数；$x=8$ 时，$a=16, y=8$.

于是，$a=25$ 或 18 或 16 均为所求.

3. 因为 $1985=5\times 397$，其中 5，397 是质取.

设 x_1, x_2 是方程 $px^2-qx+1985=0$ 的两个根，已知 x_1, x_2 均为质数，由韦达定理 $x_1x_2=\frac{1985}{p}\Rightarrow x_1=5, x_2=397, p=1$.

于是 $q=\frac{q}{p}=x_1+x_2=5+397=402$.

所以 $12p^2+q=12\times 1^2+402=414$.

4. 不妨设方程有两个整数根 x_1, x_2，

则 $x_1+x_2=1989$，$x_1x_2=1989$，由 $x_1x_2=1989$ 可知，x_1, x_2 均为奇数，因此 $x_1+x_2=$ 偶数，与 $x_1+x_2=1989$ 矛盾，

所以方程 $x^2-1989x+1989=0$ 无整数根.

5. 原方程整理得 $x^2-(a+8)x+8a-1=0$

x_1, x_2 为方程的两个整数根，由 $x_1+x_2=a+8$，知 a 为整数，因此 $x-a$ 和 $x-8$ 都是整数，故由原方程知

$x-a=(x-8)(=\pm 1)$，所以 $a=8$.

6. (1)判别式 $\Delta=(a+1)^2\times 5-4\times 225\times(b+c)$，依题意，判别式 $\Delta=0$

即　$(a+1)^2=2^2\times 3^2\times 5\times(b+c)$

$5\times(b+c)$应为完全平方数，且为偶数，要使 a 为最小值，必有 $5\times(b+c)=5^2\times 2^2$，因此$(a+1)^2=2^2\times 3^2\times 5^2\times 2^2$

即 $(a+1)^2$ 的最小值为 60，从而 a 的最小值为 59.

(2)当 $a=59$ 时，$b+c=20$，比如取 $b=3$，$c=17$，符合题意的 a、b、c 是存在的.

原方程为 $20x^2+60\sqrt{5}x+225=0$，求得 $x=-\frac{3}{2}\sqrt{5}$.

7. 设方程的两个根为 x_1，x_2，则 $x_1x_2=\frac{1990}{2p}=\frac{5\times 199}{p}$

$\because$ x_1，x_2 为质数，$\therefore p=1$，两根为 5，199.

$\because$ $q=x_1+x_2=5+199=204$，$\therefore 1786p^{1990}+q=1786+204=1990$.

8. 由已知方程得 $x=\frac{-1\pm\sqrt{(2k-1)^2-40}}{2}$

如果 x 为正整数，则 $x=\frac{\sqrt{(2k-1)^2-40}-1}{2}$，并且有 $(2k-1)^2-40=m^2$（m 为正整数），即 $(2k-1+m)(2k-1-m)=40$

$\therefore$ k、m 为自然数，只能有

$2k-1+m$	20	10
$2k-1-m$	2	4

由此得 $\begin{cases}k=6\\m=9\end{cases}$ 或 $\begin{cases}k=4\\m=3.\end{cases}$

9. 设两根为 x_1，x_2，则 $x_1+x_2=-p$ ①，$x_1x_2=q$ ②，由①，②可知，x_1，x_2 均为负整数，q 为质数，若 q 为奇数，则 x_1，x_2 均为奇数，从而 p 为偶数，而偶质数只有 2，两个负整数之和为 -2，且不相等，这是不可能的.

若 q 为偶数，只能 $q=2$，两个负整数之积为 2，且不相等，只能是 -1 和 -2，所以方程的根是 -1 和 -2.

10. 设所给方程两根为 p，q，则 $p+q=a$，$pq=a+1$，所以 $pq=p+q+1\Rightarrow(p-1)(q-1)=2$

$\because$ 2 是质数，所以 $p-1=2, q-1=1$，或 $p-1=1, q-1=2$.

即 $p=3, q=2$ 或 $p=2, q=3$. 这时 $a=p+q=5$.

习题 10.5 的提示或解答

1. 图像开口向下，则 $a<0$；顶点横坐标 $0<-\frac{1}{2a}<1$

则 $b>0, 2a+b<0$，因而 $ab<0, 2a-b<0$

又当 $x=0$ 时，$y=c<0$，因而 $ac>0, a-b+c<0$.

当 $x=1$ 时，$y=a+b+c>0$，所给 6 个代数式中只有 2 个为正. 选(A)

2. 依题意得 $a>0$，$0<-\frac{b}{2a}<1$，

$\therefore b<0, 2a+b>0, 2a-b>0$

又当 $x=1$ 时，$y=a+b+c<0$

当 $x=-1$ 时，$y=a-b+c>0$

故 $M=-(a+b+c)-(a-b+c)+(2a+b)-(2a-b)=-2(a-b+c)<0$. 于是选(C).

3. 令 $y=x^2-2001x+n$ 抛物线开口向上.

由条件(1)，知抛物线不在 x 轴下方，

故 $\Delta=2001^2-4n\leqslant 0$，由此得 $n\geqslant\frac{2001^2}{4}$.

令 $y=x_0^2-2002x_0+n$，抛物线开口向上

由条件(2)，知抛物线有一部分在 x 轴下方.

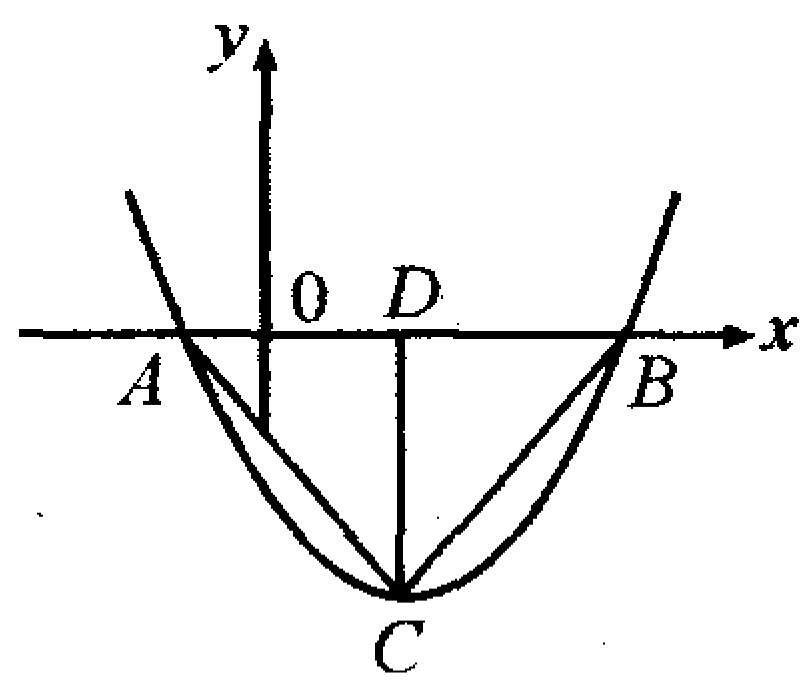
故 $\Delta=2002^2-4n>0, n<\frac{2002^2}{4}$.

综上所述，有$\frac{2001^2}{4}\leqslant n<\frac{2002^2}{4}$，又 n 为正整数，

故 $n=1001001, 1001002, 1001003, \cdots, 1002000$，共 1000

个数.

4. 如图,ΔABC 为等边三角形,设 $A(x_A,0)$,$B(x_B,0)$



$C(x_c,y_c)$,故$\dfrac{CD}{AB}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

即 $\dfrac{|y_c|}{|x_A-x_B|}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.也即 $\dfrac{\frac{\Delta}{4}}{\sqrt{\Delta}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.求得 $\Delta=12$.

即 $(k+1)^2-4=12$,也就是 $k+1=\pm 4$,由题意知$-(k+1)>0$

故取 $k+1=-4$,得 $k=-5$,经检验知 $k=-5$ 成立.

5. 设 $x=5n+r,n\in Z,r=0,1,2,3,4$,则

$$y=\frac{1}{5}[(5n+r)^2-(5n+r)+1]$$

$$=5n^2+(2r-1)n+\frac{1}{5}(r^2-r+1)$$

记 $r^2-r+1=m$,则有

当 $r=0$ 时,$m=1$,

$r=1$ 时,$m=1$,

$r=2$ 时,$m=3$,

$r=3$ 时,$m=7$,

$r=4$ 时,$m=13$.

总之,对 r 的任何允许值 $m=r^2-r+1$ 都不能被 5 整除.

故对任意的整数 x,y 都不可能取整数,因此,$y=\dfrac{1}{5}(x^2-x+1)$不可能经过两个坐标都是整数的点.

6. 对一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$，其中 a,b,c 都是整数，其判别式 $\Delta=b^2-4ac$

若小明的演算无误，则有 $b^2-4ac=1999$，可见 b 为奇数，但奇数的平方被 4 除余 1，所以 b^2 被 4 除余 1，因此 b^2-4ac 被 4 除余 1，即 1999 被 4 除余 1. 然而 1999 被 4 除余 3，得出矛盾. 所以小明的演算必有错误.

习题 11.1 的提示或解答

1. 设毕氏在校至多有学生 x 人. 设在操场运动者有 a 人，则 a 是正整数，$a<10$.

则依题意列出方程：

$\frac{x}{2}+\frac{x}{4}+\frac{x}{7}+a=x$，即 $\frac{3x}{28}=a \Rightarrow 3x=28a$

由于 a 是整数，$(3,28)=1$，所以 $3\mid a$，但 $a<10$，所以 a 的最大可取 9，此时，x 的最大值为 84 人.

2. 设甲库运面粉到甲面包房 x 吨，则 $0\leqslant x\leqslant 40$，共需运费 $120x$ 元，

甲库运面粉到乙面包房 $50-x$ 吨，共需运费 $160(50-x)$ 元，

乙库运面粉到甲面包房 $40-x$ 吨，共需运费 $80(40-x)$ 元，

乙库运面粉到乙面包房 $30+x$ 吨，共需运费 $100(30+x)$ 元.

设总计花运费为 W，则

$$\begin{aligned}W&=120x+160(50-x)+80(40-x)+100(30+x)\\&=120x+8000-160x+3200-80x+3000+100x\\&=-20x+14200\end{aligned}$$

当 $x=40$ 时，$W_{\min}=13400$ 元

这时，甲库运 40 吨面粉到甲面包房，运 10 吨到乙面包房，

乙库运 70 吨面粉到乙面包房，所需总运费最少，为 13400 元.

习题 11.2 的提示或解答

1. $y=(x-a_1)^2+(x-a_2)^2+\cdots+(x-a_n)^2$

$=(x^2-2a_1x+a_1^2)+(x^2-2a_2x+a_2^2)+\cdots+(x^2-2a_nx+a_n^2)$

$=nx^2-2(a_1+a_2+\cdots+a_n)x+(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)$

$=n\left[x-\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right]^2-\frac{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2}{n}$

$+(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)$

故当 $x=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$时，

$y_{\min}=(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)-\frac{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2}{n}$.

2. $\because$ $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$

$=(1-m)^2-2(m^2-3m+\frac{9}{4})$

$=-(m-2)+\frac{1}{2}$.

又 $\Delta=(m-1)^2-4(m^2-3m+\frac{9}{4})\geqslant 0\Rightarrow\frac{4}{3}\leqslant m\leqslant 2$.

故当 $m=2$ 时，$x_1^2+x_2^2$ 有最大值$\frac{1}{2}$，

当 $m=\frac{4}{3}$时，$x_1^2+x_2^2$ 有最小值$\frac{1}{18}$.

3. $y=x^2★(2x)+2★4=\frac{1}{3}[x^2+2(2x)]+\frac{1}{3}(2+2\times 4)$

$=\frac{1}{3}(x^2+4x+10)=\frac{1}{3}(x+c)^2+2$

故当 $x=-2$ 时，$y_{min}=2$.

4. 显然，$\Delta AA_1D_1\cong\triangle BB_1A_i\cong\triangle CC_1B_1\cong\Delta DD_1C_1$

设 $C_1D=x$，则 $CC_1=1-x$，

$$=S_{A_1B_1C_1D_1}=1-4\times\frac{1}{2}x(1-x)$$

$$=1-2x+2x^2=2(x-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{2}$$

当 $x=\frac{1}{2}$ 时，$S_{A_1B_1C_1D_1}$ 取最小值为 $\frac{1}{2}$，此时 $A_1B_1C_1D_1$ 分别为 AB,BC,CD,DA 的中点．

5. 由 M,N 分别为 AC,BC 中点，可知 D,E 也分别为 $A'C',B'C'$ 的中点.

于是 $S_{HMNKED}=S_{MABN}-S_{\Delta AHD}-S_{\Delta EKB}$

设 $AH=x$，则 $AD=\sqrt{2}x,DE=\sqrt{2}a,EB=\sqrt{2}(a-x)\Rightarrow EK=a-x$，则有 $S_{HMNKED}=\frac{3}{2}a^2-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}(a-x)^2=a^2+ax-x^2$

$$=-(x-\frac{a}{2})^2+\frac{5}{4}a^2.$$

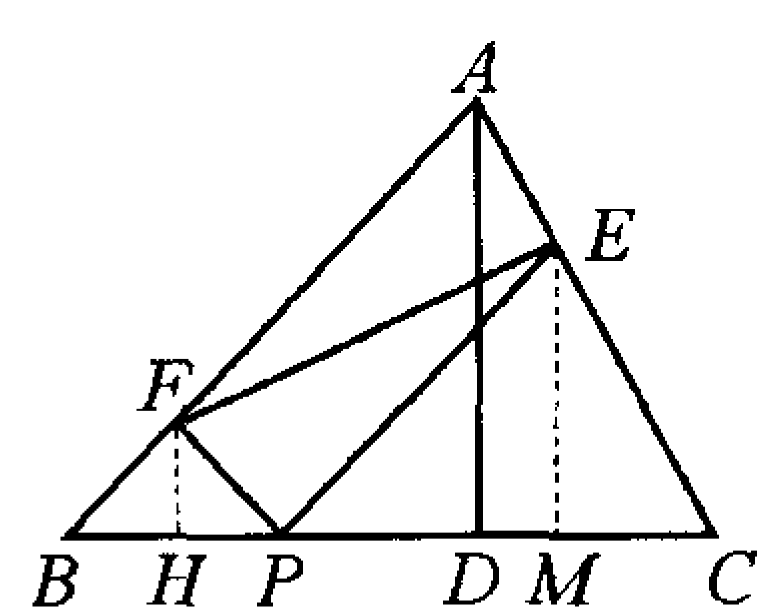
所以当 $x=\frac{a}{2}$ 时，S_{MHDEKN} 取得最大值 $\frac{5}{4}a^2$，由此可得，这两个三角形重叠部分面积的最大值是 $\frac{5}{4}a^2$.

习题 11.3 的提示或解答

1. 作 $FH\perp BP$ 于 H，$EM\perp PC$ 于 M

因为 $S_{\Delta PEF}=\frac{1}{2}(S_{\Delta ABC}-S_{\Delta BFP}-S_{\Delta CEP})$

并且 $FH=\frac{1}{2}x,EM=\frac{1}{2}(2-x)$



所以 $S_{\triangle PEF}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}AD\cdot BC-\frac{1}{2}FH\cdot BP-\frac{1}{2}PC\cdot EM\right)$

$$=\frac{1}{4}[2-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}(2-x)^2]$$

$$=-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x=-\frac{1}{4}(x-1)^2+\frac{1}{4}$$

因此 $x=1$ 时，$S_{\triangle PEF}$ 有最大值，最大值为 $\frac{1}{4}$.

2. 设卖出的件数为 Q，每件售价应降低

$\frac{Q-1000}{10}\times0.01=0.001Q-1$(元)

从而每件售价为

$p=5-(0.001Q-1)$ (元/件)

总收益函数

$R=P\cdot Q=[5-(0.001Q-1)]Q=6Q-0.001Q^2$

$1000R=-Q^2+6000Q$

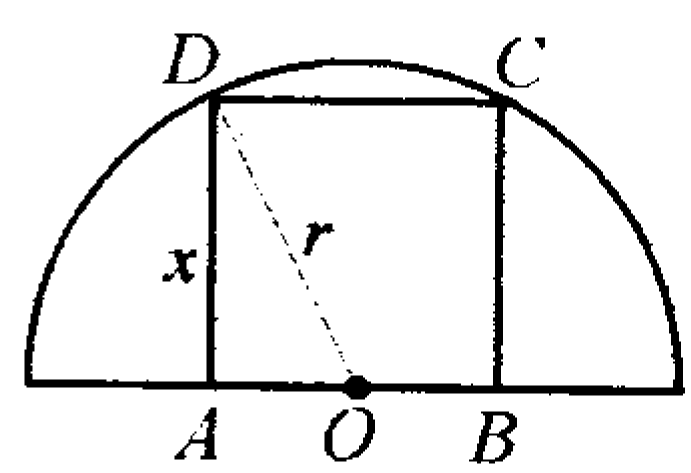
$$=-(Q^2-2\cdot3000Q+3000^2)+3000^2$$

$$=-(Q-3000)^2+3000^2$$

当 $Q=3000$ 时，$1000R$ 取最大值 3000^2 所以 R 取最大值 9000 元，收益最大时的商品售价

$p=5-(0.01\times300-1)=3$ 元.

3. 该矩形边为 x，则由勾股定理



$OA=\sqrt{r^2-x^2}$

所以 $AB=2\sqrt{r^2-x^2}$

矩形面积

$S(x)=AD\cdot AB=2x\sqrt{r^2-x^2}$

所以 $S^2(x)=4x^2(r^2-x^2)=4r^2x^2-4x^4$

$$=-4(x^4-r^2x^2)=-4\left[x^2-\frac{r^2}{2}\right]^2+r^4$$

当 $x^2=\frac{r^2}{2}$ 时 $S^2(x)$ 取得最大值 r^4.

即　$x=\frac{r}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}r$ 时，$S(x)$ 取得最大值 r^2.

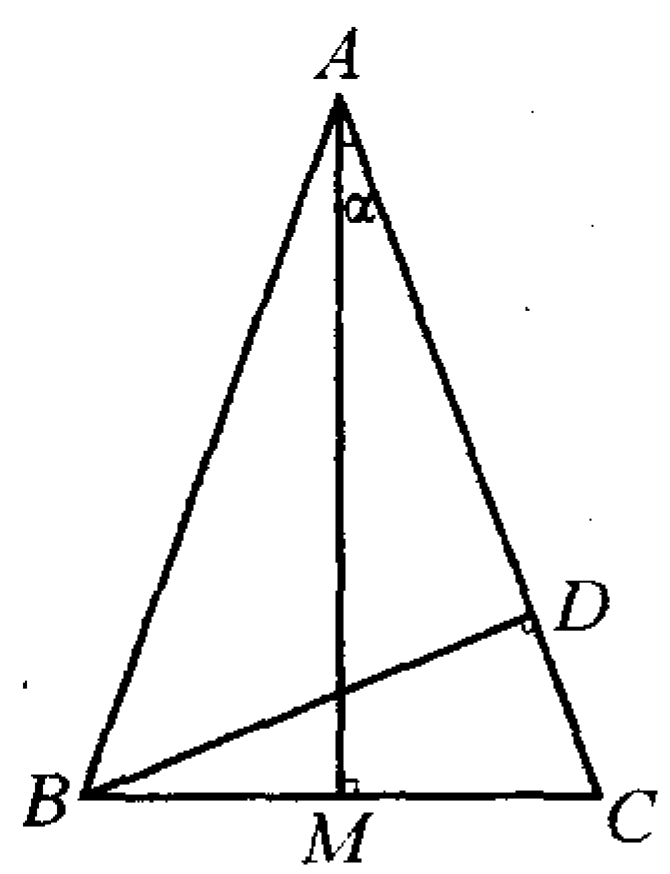
习题 11.4 的提示或解答

1. 作 $AM\perp BC$ 于 M，则 $BM=MC$.

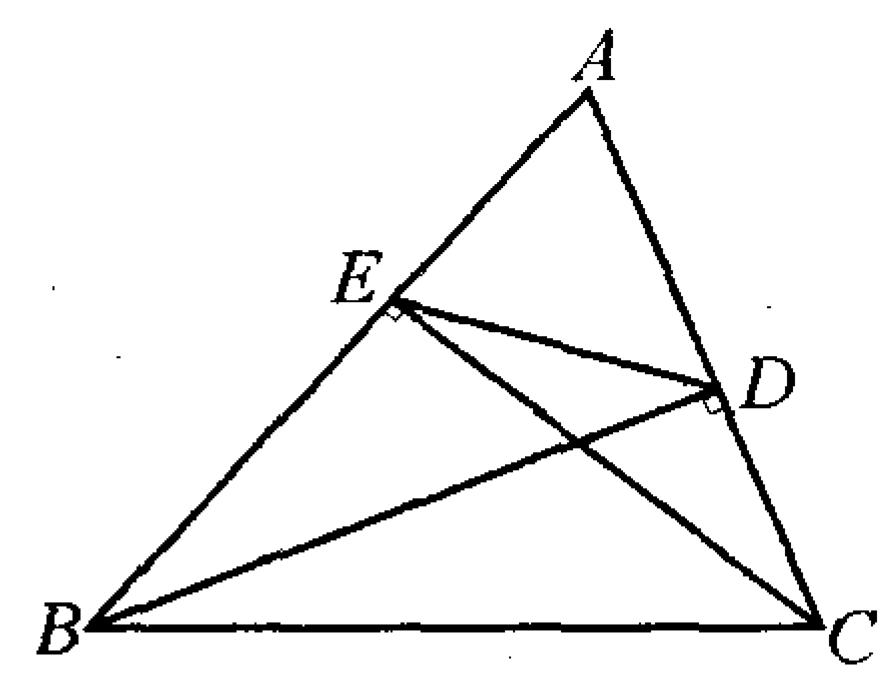
设 $\angle CAM=\alpha$，则 $\angle CBD=\alpha$

$\frac{CD}{BC}=\sin\alpha=\frac{CM}{AC}=\frac{1}{8}$

所以 $AC=4BC=4\times 8CD=32CD$.



答题 1 图



答题 2 图

2. 在 Rt$\triangle ACE$ 中，$\frac{AE}{AC}=\cos A$

在 Rt$\triangle ABD$ 中，$\frac{AD}{AB}\cos A$

所以 $\frac{AE}{AC}=\frac{AD}{AB}=\cos A$

又 $\angle A$ 公用

$\triangle AED\backsim\triangle ACB$

$\therefore\ \frac{DE}{BC}=\cos A\Rightarrow DE=BC\cos A$.

习题 12.1 的提示或解答

1. 设这种进位制是 p 进制，则 $(76)_p=7p+6$

由题意 $7p+6=90$，$7p=84 \Rightarrow p=12$.

答：在 12 进制中，10 进制数 90 记为 76.

2. 由

		（余）
2	2008	
2	1004	……0
2	502	……0
2	251	……0
2	125	……1
2	62	……1
2	31	……0
2	15	……1
2	7	……1
2	3	……1
2	2	……1
2	1	……1
	0	

所以 $(2008)_{10}=(11111011000)_2$

3. $(2005)_{10}=(11111010101)_2$

$$=2^{10}+2^9+2^8+2^7+2^6+2^4+2^2+1^0$$

$\therefore \alpha_1=10, \alpha_2=9, \alpha_3=8, \alpha_4=7, \alpha_5=6, \alpha_6=0, \alpha_7=4, \alpha_8=0, \alpha_9=2, \alpha_{10}=0, \alpha_{11}=0$

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5+\alpha_6+\alpha_7+\alpha_8+\alpha_9+\alpha_{10}+\alpha_{11}$$
$$=10+9+8+7+6+0+4+0+2+0+0=46.$$

习题 12.2 的提示或解答

1. 总平均分设为 $\bar{x}$，则

$$\bar{x}=\frac{90\times48+88\times49+85\times50+83\times53}{48+49+50+53}$$

$$=\frac{17281}{200}=86.405\approx86.4\text{(分)}.$$

2. 1986 个数的平均数为 2000，所以这 1986 个数之和为 2000×1986

该生将 2000 混入后形成的 1987 个数总和为 $2000\times1986+2000$，这 1987 个数的平均数为 $\frac{2000\times1986+2000}{1987}=2000$.

3. $\bar{x}=\frac{3+4+5+6+7}{5}=5$.

$$S^2=\frac{1}{5}[(3-5)^2+(4-5)^2+(5-5)^2+(6-5)^2+(7-5)^2]$$

$$=\frac{10}{5}=2.$$

所以标准差 $S=\sqrt{2}$.

4. $\bar{x}=\frac{(-1)+0+3+6+7}{5}=\frac{15}{5}=3$.

方差为 $S^2=\frac{1}{5}[(-1-3)^2+(0-3)^2+(3-3)^2+(6-3)^2$

$$+(7-3)^2]=\frac{50}{5}=10.$$

5. 由 $S^2=\frac{1}{n}[(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2\cdots+(x_n-\bar{x})^2]=0$.

则有 $(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots+(x_n-\bar{x})^2=0$.

根据非负数性质得

$x_1-\bar{x}=x_2-\bar{x}=\cdots=x_n-\bar{x}=0$.

即　$x_1=x_2=\cdots=x_n=\bar{x}$.

就是说，样本中的每个数据都等于平均数，从而各数据都相等.