周春荔主编　奥林匹克数学普及讲座丛书(之四)

初中数学竞赛中的思维方法

周春荔　编著

中国物资出版社

图书在版编目(CIP)数据

初中数学竞赛中的思维方法/周春荔编著. —北京:
中国物资出版社,2004.8
(奥林匹克数学普及讲座丛书:4)
ISBN 7-5047-2202-2

Ⅰ.初…　Ⅱ.周…　Ⅲ.几何课—初中—教学参考资料
Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 070196 号

责任编辑　黑俊贵
责任印制　方鹏远
责任校对　王　莉

中国物资出版社出版发行
网址:http://www.chph.cn
社址:北京市西城区月坛北街 25 号
电话:(010)68589540　邮编:100834
全国新华书店经销
北京才智印刷厂印刷

开本:850×1168mm　1/32　印张:6.75　字数:143 千字
2004 年 8 月第 1 版　2004 年 8 月第 1 次印刷
书号:ISBN 7-5047-2202-6/G・0462
印数:0001—8000 册
定价:10.00 元

内 容 提 要

本册内容是对初中数学知识的自然延拓与扩充，内容包括原则与思想、方法与逻辑、问题与模型三大部分。通过对初中数学竞赛的综合问题的分类讲解与练习，夯实基础知识、发展逻辑思维能力，领悟数学思想，培养创新意识。内容由浅入深，按知识系统，讲解逐步深化。适于自学和配合教学同步进行，各部分都配有精选的练习题和解答，供练习选用。既可做学生学习奥林匹克数学的教材，又可做培训教练员的参考书。

序　言

2002年暑期，在从西安返京的列车上，遇到了中国物资出版社的副编审黑俊贵女士。我们谈到了数学奥林匹克，她很感兴趣。诚挚地写本数学奥林匹克的书在该社出版，为数学爱好者提供一份“营养套餐”。

回到北京，写书的事一直没有排上日程。后来，经过一催再促，才抽空草拟了个编写提纲。直到2003年春，才着手本套书的写作。

专门以十几岁的中学生为对象的现代意义下的数学竞赛，人们公认为起源于匈牙利。匈牙利的数学竞赛自1894年起至今已有百余年历史，每次竞赛出3道题，限4小时完成，允许使用参考书。试题别具风格，常常有高等数学背景，却用初等数学知识就可以解答。

匈牙利的数学竞赛造就了一批数学大师或科学巨匠。被称为匈牙利现代数学之父的费叶尔（1880—59），著名力学家，现代航天事业的奠基人冯·卡门（1881—33），著名的组合数学家寇尼希（1884—44），群上测度与积分论的创始人哈尔（1885—1933），泛函分析的奠基者之一黎斯（1880—1956），著名分析学家舍贵（1895—），拉多（1895—1965）等，都是早期的数学竞赛优胜者。这些事例表明，数学竞赛是发现和造就人才的一个重要途径。

1934年苏联列宁格勒大学主办了中学生数学奥林匹克，首次把数学考试与“奥林匹克”联系起来；1935年又由莫斯科大学主

办了中学生数学奥林匹克，受到广大师生的热烈欢迎。以后不少苏联的加盟共和国也相继举办数学奥林匹克。1961 年开始举办全俄数学奥林匹克，1967 年举办全苏数学奥林匹克。人们发现，前苏联基础教育阶段的高水平的数学教育与数学奥林匹克存在着一定的联系。20 世纪中叶，世界出现了一个举办中学生数学竞赛的热潮。这个世界性的中学生数学奥林匹克热潮与新数学运动大体同时起步，但新数运动早已偃旗息鼓，而数学竞赛则正如火如荼。

世界各国的中学生数学竞赛活动的开展为国际数学奥林匹克（International Mathematical Olympiad）的产生创造了条件，而国际数学奥林匹克（IMO）的产生与发展又推动了各地区、各国数学竞赛的发展。第一届国际数学奥林匹克（IMO）于 1959 年 7 月在罗马尼亚古都布拉索（位于布加勒斯特西北约 200 公里）拉开帷幕，这是数学竞赛跨越国界的创举。至今除 1980 年因故未举办外，到 2003 年已经举办了 44 届。1990 年在北京举办第 31 届 IMO 时，已发展到 54 个国家或地区（308 人），此后又逐年陆续增加到 80 多个队，约 500 人的规模。如今 IMO 已经成为国际上一项最有影响的学科竞赛，同时也是公认的水平最高的中学生数学竞赛。

1980 年国际数学教育委员会决定成立 IMO 分委员会（1981 年正式成立），负责安排每年活动的组织者。从第 22 届 IMO 开始，IMO 更走向成熟。IMO 的运作已经制度化、规范化，选手的水平也大大提高。随着数学竞赛的发展，已逐渐形成一门特殊的数学学科——竞赛数学。数学奥林匹克的兴旺发展，影响了其他学科竞赛的发展，如物理、化学、生物、信息等国际奥林匹克相继兴起，国际学科竞赛已经成为一股促进学科教育发展的世界性潮流。

在 2002 年世界数学家大会期间及会后，不少人提出了一个十分有意思的话题：参加过历届国际数学奥林匹克的选手中有没

有人拿到过菲尔兹奖？巧得很，2002 年 7 月国际数学奥林匹克（香港）委员会主席岑嘉评教授为此专门撰文，我们仅摘录了 IMO 的优胜者后来获得菲尔兹奖的人的名字。

姓　名	国　籍	参加 IMO 时间	获奖时间
Gregory　Margulis	俄罗斯	1959 年银牌	1978 年菲尔兹奖
Valdimir　Drinfeld	乌克兰	1969 年金牌	1990 年菲尔兹奖
Jean - Ghristoophe　Yoccoz	法国	1974 年金牌	1994 年菲尔兹奖
Richard　Borcherds	英国	1977 年金牌 1978 年银牌	1998 年菲尔兹奖
Timothy　Gowers	英国	1981 年金牌	1998 年菲尔兹奖
Laurant　Lafforgue	法国	1985 年金牌	2002 年菲尔兹奖

我国的中学生数学竞赛活动是与 20 世界 50 年代向苏联学习分不开的。

1946 年华罗庚应邀访苏三个月，看到苏联大学中有很多学生学数学，例如，格鲁吉亚的一个大学的 2000 多学生中就有 600 多个学生学数学。华罗庚问："你们这么多数学学生，将来毕业后，有些什么出路呢？"友人答的很妙："头脑受过数学训练的人，你担心他们会没有出路吗？"大数学家维诺格拉朵夫也说："数学是科学之母，一个国家如果数学不发达，其他都谈不上。"华罗庚听了柯尔幕哥洛夫与阿历山德罗夫为参赛中学师生的两次讲演。这样两位著名数学家，利用星期天休假给十五六岁的学生作讲演，那种诲人不倦，传播数学给一般人民的精神使华罗庚深受感动。除教室中席无虚座外，窗口上也挤满了人，其间还有白发苍苍的老年中学教师，他们是专程来听这些著名学者的讲演而求进步的。这些在华罗庚心中"埋藏了在中国倡办数学竞赛活动及数学普及活动的种子。"

1956 年，在华罗庚、苏步青、江泽涵等我国老一辈数学家的倡导下，由中国数学理事会发起，经高等教育部和教育部同意，我国举行了首次中学生数学竞赛，这次只在北京、天津、上海、武汉试

办。待取得经验后,再逐步推广。据不完全统计,除 1959 年、1961 年中断外,1964 年前每年都有一些城市举办数学竞赛。这一时期,我国数学竞赛的势头良好,竞赛方式,试题难度,选手水平都与国际持平。从 1965 年起到 1977 年,我国的数学竞赛因文革而中断了 13 年。这一时期的数学竞赛优胜者在文革后不少显露头角,正如王元院士在《数学竞赛之我见》中指出的:"要用事实说明数学竞赛活动的成就。例如,仅仅'文革'前的几次低层次数学竞赛中,已有一些竞赛优胜者成才了。如上海的汪嘉冈、陈志华,北京的唐守文、石赫,他们现在已经是国内的著名中年数学家,有的已获博士导师资格。他们在文革中都被耽误了 10 年,否则完全会有更大成就。"

中国数学竞赛的国内成熟期是在 1978 年以后。1978 年粉碎了四人帮后迎来了科学的春天,4 月中旬,国务院批准全国举办数学竞赛,组织北京、上海、天津、陕西、安徽、四川、辽宁、广东 8 省市举办中学生数学竞赛,由方毅副总理任竞赛委员会主任,由中科院副院长中国数学会理事长华罗庚教授任竞赛委员会副主任,4 月 25 日召开了竞赛委员会第一次会议,确定了命题原则、竞赛方法、和推荐优秀学生免试进入大学的办法。全国有 20 万在校生参加。参加决赛的青少年,年龄最大的 19 岁,最小的 14 岁。多数是高中生,但也有少数的初中生。除上述 8 个省市之外,1978 年福建省,福州市,山西省等也组织了数学竞赛。

邓小平同志肯定了这次竞赛,方毅同志批示说:"这是发现人才,出人才的好方法之一,今后拟继续坚持下去。"由于 1979 年全国出现了竞赛过热形势,1980 年全国停办数学竞赛。教育部和各省的教育行政部门不再组办数学竞赛,我国的中学生数学竞赛转为民办。1981 年由中国数学会普及工作委员会,北京数学会发起全国高中数学联合竞赛,25 个省市参加,1982 年由上海组办,28 省市参加。以后各省市轮流组办,由中国数学会普及工作委员会进行调节,至今都采取这个模式。1984 年开始,举办全国初中数

学联赛,也是采取上述模式。从1991年开始,中国数学会普及工作委员会举办小学生数学奥林匹克。

敬爱的华罗庚教授于1985年6月12日在出访日本讲学时因心脏病突发而逝世,享年75岁。为了弘扬华罗庚教授的爱国主义精神,学习华老勤奋学习、献身科学的优秀品质,激发广大中小学生学习数学的兴趣,开发智力,普及数学科学,于1986年由中国少年报社、中国优选法统筹法与经济数学研究会、中国数学会、中央电视台、中国科协青少部共同举办了首届"华罗庚金杯"少年数学邀请赛。当时的胡耀邦总书记亲为"华罗庚金杯"题字。参赛学生是小学高年级和初一学生,每两年举办一届。自2003年第9届起,改为每年一届。

自1990年开始,"双法"学会数学教育委员会举办"希望杯"全国数学邀请赛。对象是初一、初二、高一、高二共四个年级。前中国数学奥委会主席王寿仁教授说:全国初中、高中数学联赛和全国希望杯数学邀请赛,好比我的左右手,缺一个都不好,我都支持。从2002年又有了小学希望杯数学邀请赛,也很受学生欢迎。

从1985年派观察员和两名学生参加IMO以来,我国参加IMO的准备工作由中国数学会的中国数学奥林匹克委员会领导。先由各省市的全国高中数学联赛优胜者参加全国数学冬令营(也叫《中国数学奥林匹克》),从中选出20余名学生进国家集训队,集训队由高校教师进行培训,经过三个月后,通过考试评估由教练组投票表决选出参加IMO的6名选手,再经过一个月的培训,于每年7月出国参加IMO比赛。从1988年至2003年的17次IMO,我国取得10次团体总分第一名,共获金牌71枚,占我国参赛选手的69.6%,我国的选手在IMO比赛中的优异成绩标志着我国数学教育的优异水平。

如今,奥林匹克数学教育的作用已被多数国民所公认。激发青少年学习数学的兴趣,有助于早期智力开发,有助于发现和培养人才。数学竞赛推动了数学知识的普及,促进数学教师知识水

平的提高，是数学改革的试验田。因此奥林匹克数学教育是较高层次的基础教育，开发智力的素质教育，生动活泼的课外教育，现代数学的普及教育。理应大家更好地培育它、研究它和发展它！

随着人类进入21世纪，我国的数学奥林匹克又有新的发展。2001年在古城西安举办了首届中国西部数学奥林匹克；此外，2002年在珠海举办了首届中国女子数学奥林匹克(CGMO)，我国的数学竞赛活动正在21世纪的改革浪潮中与时俱进地向前发展！

数学是一门基础课。义务教育新课标的推行为数学爱好者提供了时间与空间，可以充分地发展自己的数学爱好，更好地提高数学能力。为此，初中阶段必须较系统地打好数学的基础。不但要学好代数，还要学好平面几何与数论初步，领悟数学的思想方法。本套丛书就是为此目的做的一种尝试，分为《初中数学竞赛中的代数问题》、《初中数学竞赛中的平面几何》、《初中数学竞赛中的数论初步》、《初中数学竞赛中的思维方法》四册。希望与广大初中生能在学习实践中切磋学好数学的体验，共同探索一条能使多数人具备较高的数学素养的学习途径。

首都师范大学数学系　周春荔

目　录

第一章　解题思想与原则 ………………………………… (1)
§1.1　化归原则与数学解题 ……………………………… (1)
§1.2　抽屉原则应用例谈 ………………………………… (14)
§1.3　排序思想解题例谈 ………………………………… (21)
§1.4　整体思想解题例谈 ………………………………… (29)
§1.5　极端性原理解题例谈 ……………………………… (36)
第二章　解题方法与逻辑 ………………………………… (45)
§2.1　分类讨论漫谈 ……………………………………… (45)
§2.2　归纳、猜想,发现规律 ……………………………… (54)
§2.3　反证法证题漫谈 …………………………………… (66)
§2.4　漫谈举反例 ………………………………………… (74)
§2.5　构作图形帮你解题 ………………………………… (82)
§2.6　趣味的逻辑推理问题 ……………………………… (89)
§2.7　奇偶分析例谈 ……………………………………… (101)
§2.8　数学竞赛中的图论方法 …………………………… (111)
第三章　数学问题与模型 ………………………………… (126)
§3.1　平面点集二染色例谈 ……………………………… (126)
§3.2　简单的统筹规划例谈 ……………………………… (132)
§3.3　能与不能的判定问题 ……………………………… (141)
§3.4　利用弦图帮我们解题 ……………………………… (148)
§3.5　二人对策模型浅谈 ………………………………… (155)
§3.6　两态变化与$(-1)^n$ ……………………………… (161)
§3.7　一笔画问题例谈 …………………………………… (167)
§3.8　足球比赛中的数学问题 …………………………… (175)
附录　研究练习题提示与解答 …………………………… (180)

第 1 章　解题思想与原则

§1.1　化归原则与数学解题

问题是数学的心脏，学数学必须学会解题。若从静态角度看数学，数学是数学知识、定理、符号公式的汇集；枯燥乏昧。然而若从动态角度去审视，数学是一种实际的研究活动，是一种文化，是数学家思维的过程。那么数学家解决数学问题是怎样思维的呢？他们的思维有何特点呢？

总观数学家的思维，他们总要自觉不自觉地从联系的观点看问题，用转化的手段去处理问题，这就是所谓的化繁为简，以简驭繁，化未知为已知，以已知的知识为基础，探索解决未知的“化归原则”。

例如：解方程组$\begin{cases}3x+y=14 & ① \\ 2x-y=6 & ②\end{cases}$

我们只会解一元一次方程，很显然，对二元一次联立方程组如果能够消掉一个元，不就转化成为一元一次方程，我们就会解了吗！

于是，①＋②得 $5x=20$，解得 $x=4$，以 $x=4$ 代入①求得 $y=2$.

这个过程是将

$$\underset{\text{不会解的问题}}{\boxed{\text{二元一次方程组}}}\xrightarrow{\cdots\cdots}_{\text{等价转化为}}\underset{\text{已知会解的问题}}{\boxed{\text{一元一次方程}}}$$

其实，数学家们当发现加减、代入消元法时，他们的心目中，对这个二元一次联立方程组已经会解了，或者说，他们满怀信心地认为已经解决了！

著名的匈牙利数学家路沙·彼得以如下的比拟对数学家的思维方式作了生动的描绘:有人提出了这样一个问题:“假设在你面前有煤气灶、水龙头、水壶和火柴。你想烧开水,应当怎样去做?”对此,某人回答:“在壶中灌上水,点燃煤气,再把壶放到煤气灶上”,提问者肯定了这一回答;但是,他又追问道:“如果其他条件都没有变化,只有水壶中已经有了足够的水,那你又应当怎样去做?”这时被提问者往往很有信心地说:“点燃煤气,再把水壶放到煤气灶上”。但是提问者指出,这一回答并不能使他感到满意。因为,更好的回答应是这样的:“只有物理学家才会这样做,而数学家们则会倒掉壶中的水,并声称我已把后一问题化归成原先的问题了。”这段略有夸张的比拟生动地揭示了数学家思维的重要特点之一,如果把化归理解为“由未知到已知,由难到易,由复杂到简单的转化”,那么,我们可以说:数学家思维的重要特点之一,就是他们特别擅长于使用化归的方法来解决问题。从方法论的角度来说就是“化归原则”。

所谓化归原则,是指数学家们把待解决或未解决的问题,通过某种转化过程,归结到一类已经解决或者比较容易解决的问题中去,最终求得原问题之解答的一种手段和方法。

历史上许多著名的数学家都是这样思维的,比如笛卡儿就提出过如下的“万能方法”,即思维的一般模式:

把任何问题化归为数学问题;

把任何数学问题化归为代数问题;

把任何代数问题化归为方程式的求解。

由于求解方程式的问题被认为是已经解决了或是较易解决的,因此在笛卡儿看来,我们就可以用这种方法去解决各种类型的问题。当然笛卡儿的结论是不正确的,因为任何方法都有一定的局限性,从而所谓的“万能方法”是不存在的。然而,笛卡儿的这一模式毕竟是化归原则的一个应用。

著名的数学家、数学教育家 G·波利亚(1887—1985 年)曾经

在《怎样解题》一书中给出了著名的《解题表》,我们辑录如下

解　　题　　表

第一 你必须弄清问题。	**弄　清　题　意** 未知的是什么？已知的是什么？条件是什么？满足条件是否可能？要确定未知,条件是否充分？或者不充分？或者有多余的？或者是矛盾的？ 画张图,引入适当的符号。 把条件分为几个部分,你能否把他们写出来？
第二 找出已知与未知之间的联系。 如果找不出直接的联系,你可能不得不考虑辅助问题。 你应该最终得出一个求解的计划。	**制定计划** 你以前见过它吗？你是否见过相同的问题而形式稍有不同？ 你是否知道与此有关的问题？你是否知道一个可用得上的问题？ 注意未知！试想出一个具有相同或相似未知的熟悉问题？ 这里有一个与你现在的问题有关,且早已解决的问题。你能不能利用它？你能利用它的结果吗？你能利用它的方法吗？为了能利用它,你是否应该引入某些辅助元素？ 你能不能重述这个问题？你能不能用不同的方法重述它？ 回到定义。 如果你不能解决所提出的问题,可先解一个与此有关的问题。你能不能想出一个更容易下手的有关问题？一个更普遍的问题？一个更特殊的问题？一个类似的问题？你能否解决这个问题的一部分？仅仅保持条件的一部分而舍去其余部分,这样对于未知能够确定到什么程度？它会怎样变化？你能不能从已知导出某些有用的东西？你能不能想出适于确定未知的其它已知元素？如果需要的话,你能不能改变未知或已知元素或者二者都改变,以便新未知和新已知元素彼此更接近？ 你是否利用了所有的已知？你是否利用了全部条件？你是否考虑了包含在问题中的所有必要的概念？
第三 实行你的计划。	**实现计划** 实现你的求解计划,检验每一步骤。 你能否清楚地看出这一步骤是正确的？你能否证明这一步骤是正确的？

第四 验算所得到的解。	回顾 你能否检验这个论证？你能否用别的方法导出这个结果？你能不能一下子看出它来？ 你能不能把这结果或方法用于其它的问题？

“解题表”包括弄清题意，制定计划，实施计划，检验回顾四大步骤。其中制定计划就是教人们分析问题的方法。它要找出已知与未知的联系，通过反思提问的方式，萌发各种念头，为了实现念头，创设了具体方案，并发现了各种联系。

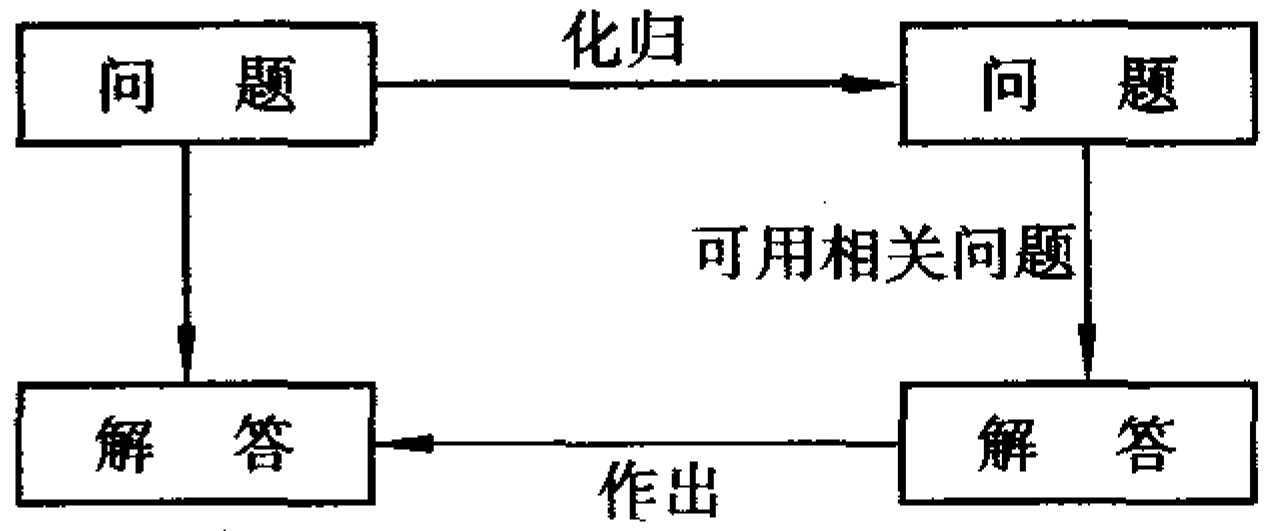
其中第二步制定计划中设问的问题，都是设法寻求将所解问题化归为简单的或已知问题的途径。可见解题表中解题思想的核心是化归原则。

G·波利亚后来在《数学的发现》一书中对如何实现由未知（难、复杂）向已知（易、简单）的化归作了具体的说明：在面临所要解决的问题时，我们应当去思考，“这是什么类型的问题？它与某个已知的问题有关么？它像某个已知的问题吗？”——这属于“化归思考式的提问”。

更具体地，我们可以从所要追求的具体目标（未知元素，待证命题）出发进行思考：“这里所谓的关键事实是什么？有一个具有同样类型的未知量的问题（特别是过去解过的问题）吗？有一个具有同样结论的定理（特别是过去证明过的定理）吗？”

另外，从更为一般的角度来说，我们又可考虑：“你知道一个相关的问题吗？你能设想出一个相关的问题吗？你能知道或你能设想出一个同一类型的问题、一个类似的问题、一个更一般的问题、一个更特殊的问题吗？”这样，就可由原来的问题引出“可用的相关问题”，这就为实现由未知（难、复杂）向已知（易、简单）的转化提供了现实的可能性。

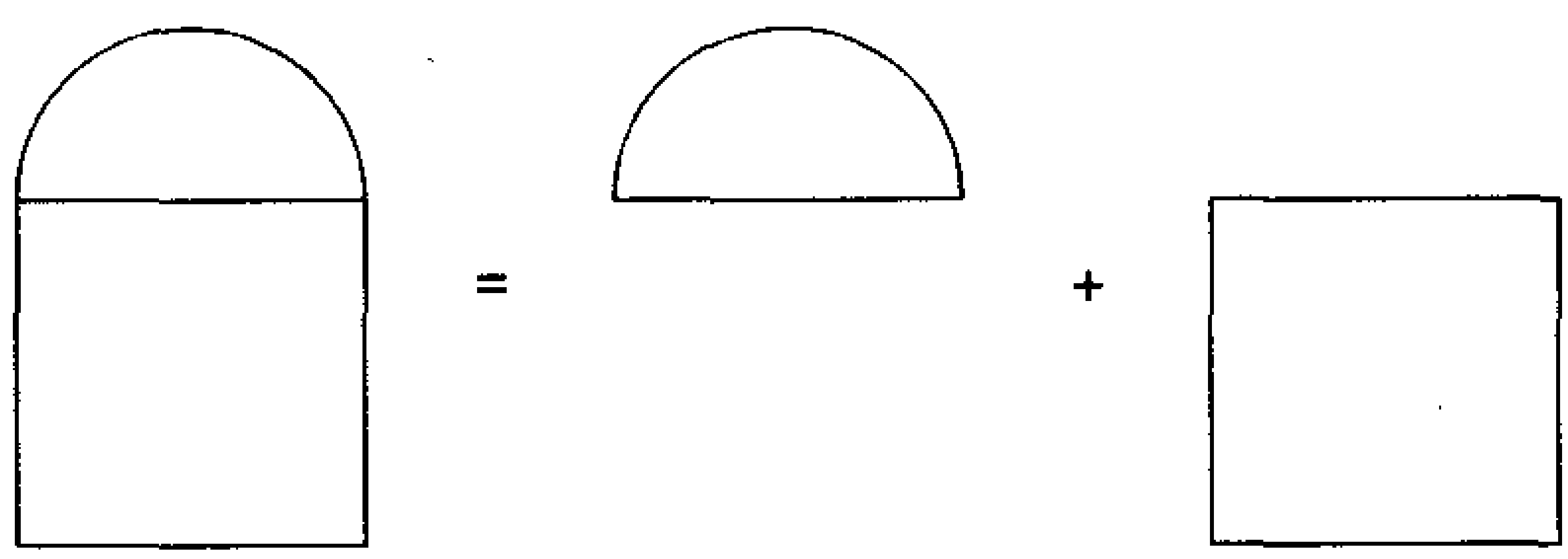
利用化归原则解决问题的一般模式可用框图表示如下：



利用化归原则的必要条件是：与原来的问题相比，“化归后所得的问题”必须是已经解决了的，或者是较为容易较为简单的。

（Ⅰ）整体向局部的化归—分割方法

例 1.　求复合图形的面积，转化为简单的图形用已知公式去求积，所用的转化途径是“分割方法”，实现整体（未知）向局部（已知）的化归。



分割方法的核心在于：首先求得局部的解决，再进而求得整体的解决。在求“曲边梯形”的面积时“分割－作和－取极限”中的第一步“分割－作和”，就是将整体不会求面积的“曲边梯形”，分割以后转化为局部替代的会求面积的小矩形的面积之和，来近似求值。

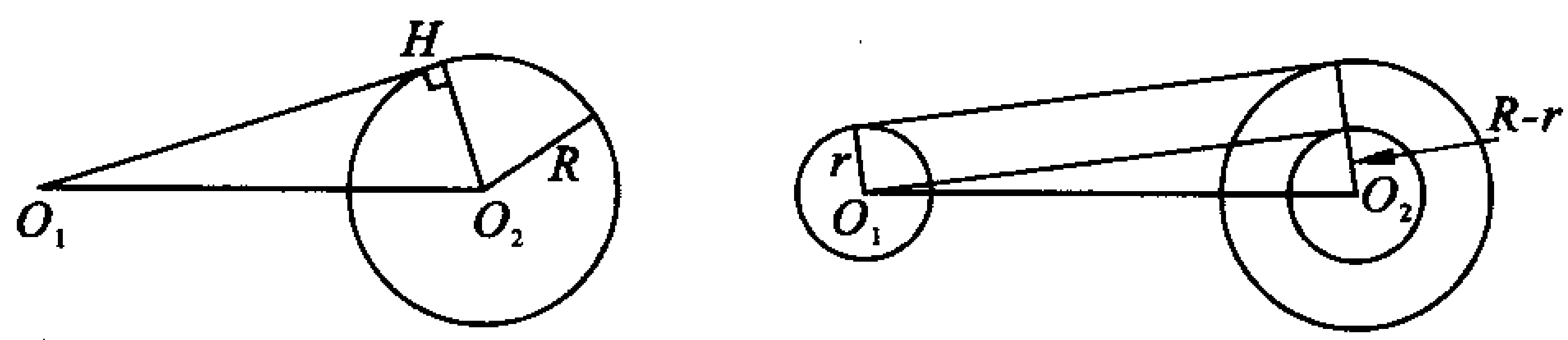
例 2.　几何作图中的“轨迹交截法”，可看成由整体分解，化归为局部，由局部两个已知轨迹交会确定交点，得出整体解决的方法。

如：已知半周长 S，高 h_a，$\angle A$，求作 $\triangle ABC$，就是这样的例子。

（Ⅱ）一般向特殊的化归

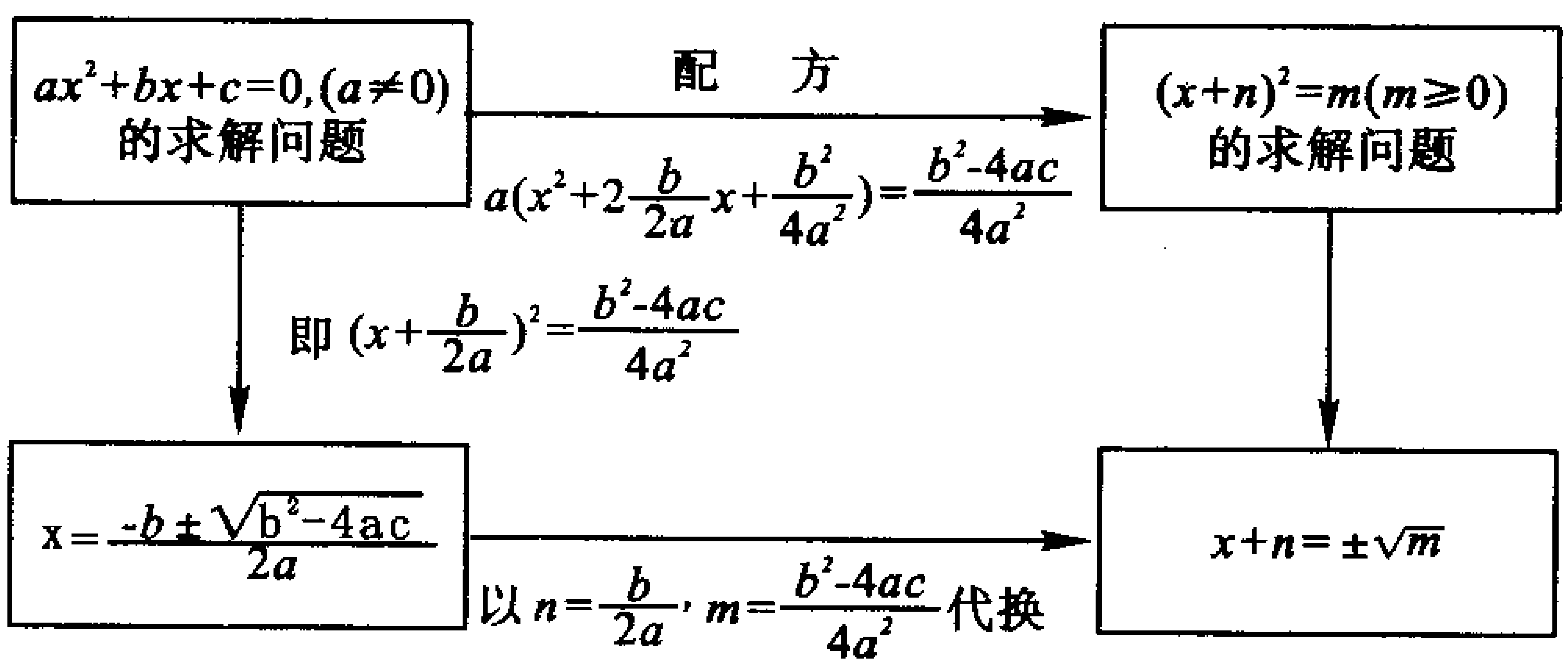
例 3.　我们学习了“从圆（O_2，R）外一点 O_1 作已知圆（O_2，R）的公切线”以后，对“作圆（O_1，r）和圆（O_2，R）（其中 $R>r$）的公

切线”就是把圆(O_1,r)缩成一个点圆，从而转化为“从圆$(O_2,R-r)$外一点O_1作圆$(O_2,R-r)$的公切线”的问题，实现一般向特殊的化归。



（图 1）

例 4. 一元二次方程 $ax^2+bx+c=0,(a\neq0)$ 求解的教学，就是一般向特殊的化归，复杂向简单的化归。即



（Ⅲ）数学恒等变形的化归

例 5. 证明：$$\frac{a^4+b^4+(a+b)^4}{(a^2+ab+b^2)^2}=2.$$

分析 要证 $$\frac{a^4+b^4+(a+b)^4}{(a^2+ab+b^2)^2}=2.$$

等价于证明：$a^4+b^4+(a+b)^4=2(a^2+ab+b^2)^2$.

等价于证明：$a^4+b^4+(a+b)^4-2(a^2+ab+b^2)^2=0$ 因此得如下证法：

证明 因为 $a^4+b^4+(a+b)^4-2(a^2+ab+b^2)^2$

$=(a^2+b^2)^2-2a^2b^2+(a^2+2ab+b^2)^2-2(a^2+ab+b^2)^2$

$=[(a^2+b^2)^2-(a^2+ab+b^2)^2]+[(a^2+2ab+b^2)^2-(a^2+ab+b^2)^2]-2a^2b^2$

$=(2a^2+2b^2+ab)(-ab)+(2a^2+2ab+2b^2)ab-2a^2b^2$

$$=ab(-2a^2-2b^2-ab+2a^2+3ab+2b^2-2ab)=0$$

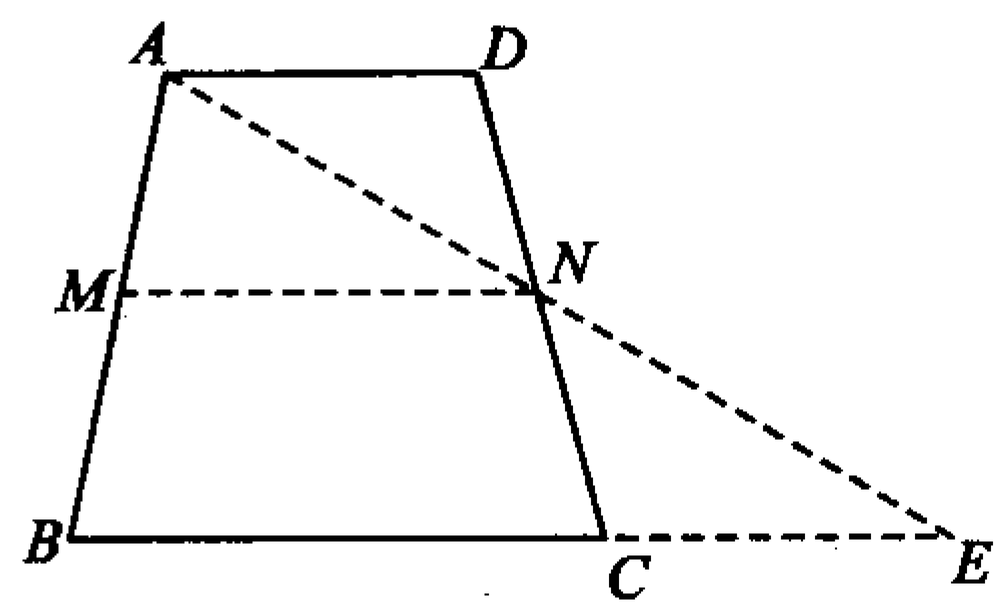
所以 $a^4+b^4+(a+b)^4=2(a^2+ab+b^2)^2$.

因为 $a^2+ab+b^2\neq 0$,

所以 $\dfrac{a^4+b^4+(a+b)^4}{(a^2+ab+b^2)^2}=2$.

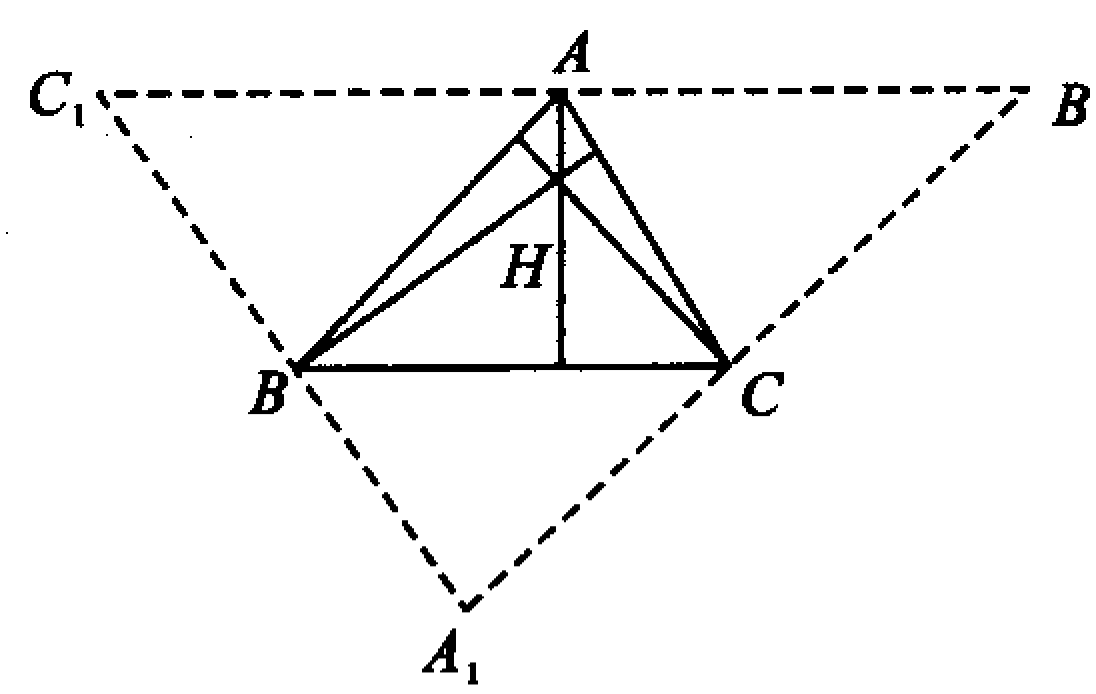
我们再举几个应用化归原则的例题:

例 6. 在初等几何中,众所周知"三角形的中位线平行于第三边,并等于第三边的一半"。这就是三角形中位线定理。然而对于梯形中位线定理:"梯形的中位线平行于两底,并等于两底和的一半",其证明方法,正是如图连接 AN,交 BC 的延长线于 E,化归为$\triangle ABE$ 中利用三角形中位线定理证明的。其中"连接 AN,交 BC 的延长线于 E"造成 MN 为$\triangle ABE$ 的中位线是实现化归的具体途径。



(图 2)

例 7. 在讲不共线的三点决定一个圆之后,可得:"三角形三边的垂直平分线共点",这个点叫做该三角形的外心。当"证明三角形的三条高线交于一点"时,使用了化归方法:过 A、B、C 分别作该顶点对边的平行线,交成如图所示的$\triangle A_1B_1C_1$,



(图 3)

这时$\triangle ABC$ 的三条高线,变为的$\triangle A_1B_1C_1$ 三边的垂直平分线,而这三条垂直平分线共点 H,即$\triangle ABC$ 的三条高线共点 H. 其中作$\triangle A_1B_1C_1$ 是实现化归的关键。

从上述诸例可以看到,从认识论角度审视,化归就是通过普遍联系、运动变化的观点看问题,使原问题转换为另一个或若干

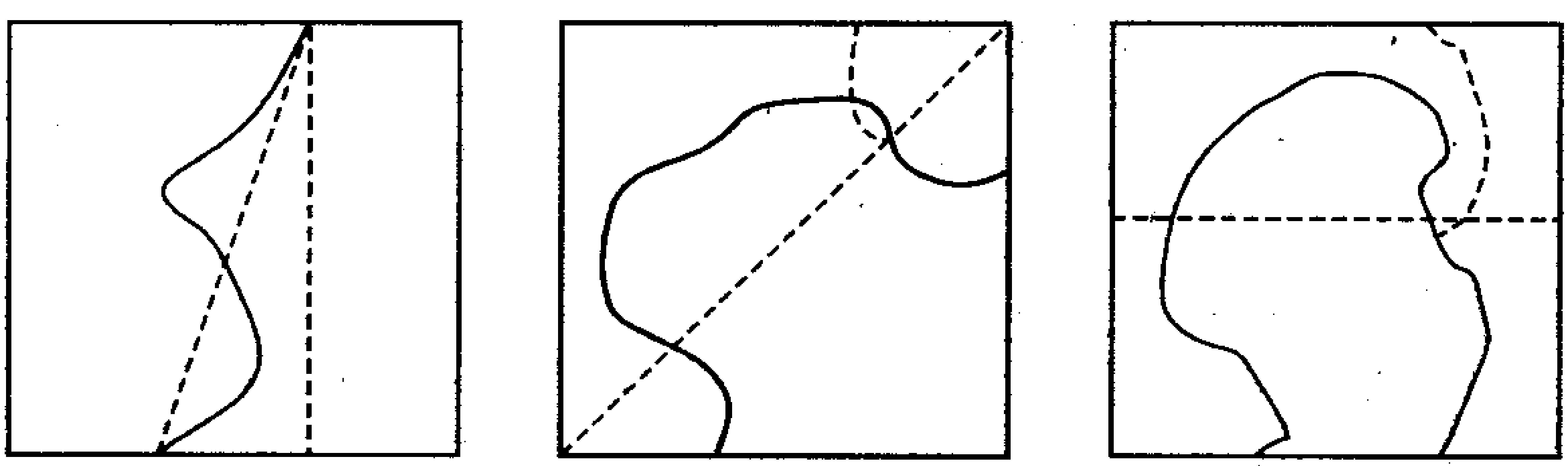
个已知的、简单的、熟悉的问题加以认识。

从方法论的角度来看，化归表现出一种运用方法的“指向”性，其实施过程包含化归的对象（条件，结论），化归的方向（熟知的形式、简单的形式），化归的途径——实施手段。其中发现、构想实施手段是用化归思想研解数学题的难点与关键。

例 8. 单位正方形周界上任意两点之间连一曲线，如果它把这个正方形分成面积相等的两部分，试证，这个曲线段的长度不小于 1.

分析 （1）“周界任两点”在正方形的一组对边上时，如图 4（1）结论显然成立。

（2）“周界任两点”在正方形的一组邻边上时，可连一条对角线，如图 4（2），经过反射，化归为（1）的情形。



(1) (2) (3)

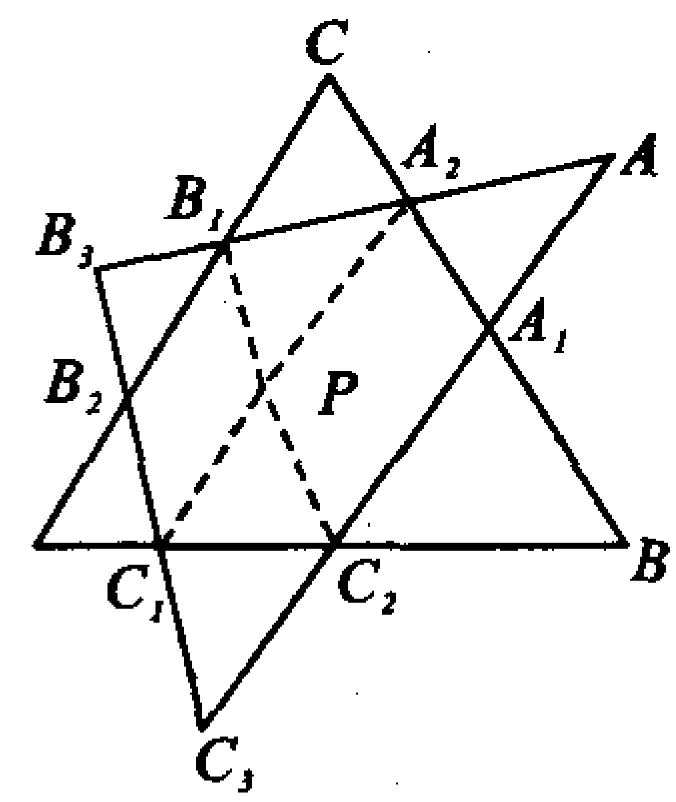
（图 4）

（3）“周界任两点”在正方形的同一边上时，可连一组对边中点连线，如图 4（3），经过反射，化归为（1）的情形。

在上述（1）、（2）、（3）中，（1）是最基本的情况。通过轴对称（反射）的手段，实现了（2）、（3）化归为（1），从而得到问题的解答。

例 9. 等边三角形 ABC 的三条边上，有三条相等的线段 A_1A_2，B_1B_2，C_1C_2. 证明：直线 B_2C_1，C_2A_1，A_2B_1 所成的三角形上，三条线段 B_2C_1，C_2A_1，A_2B_1 与包含它们的边成比例。

分析 如图 5，设直线 B_2C_1，C_2A_1，A_2B_1 交成 $\triangle A_3B_3C_3$，问题



(图 5)

要证明：$\frac{A_2B_1}{A_3B_3}=\frac{B_2C_1}{B_3C_3}=\frac{C_2A_1}{C_3A_3}$，很容易想到，若这六条线段能是一对相似三角形的三组对应边问题就解决了。而 A_3B_3，B_3C_3，C_3A_3 已经是 $\triangle A_3B_3C_3$ 的三条边，所以只要将线段 A_2B_1，B_2C_1，C_2A_1 集中构成一个三角形，再证所构成的三角形与 $\triangle A_3B_3C_3$ 相似就可以了。这样一来，就将这个问题化归为证明两个三角形相似的基本问题了，从而找到了解题的思路。

为此，将 A_1C_2 平移到 A_2P（即过 A_2 作 A_1C_2 的平行线与过 C_2 所作 A_1A_2 的平行线相交于 P），则 $A_1A_2PC_2$ 是平行四边形。

$PC_2=A_1A_2=C_2C_1$，$\angle PC_2C_1=\angle B=60°\Rightarrow\triangle PC_1C_2$ 是正三角形。

由 $\angle PC_1C_2=60°=\angle A\Rightarrow PC_1\parallel B_1B_2$，又 $PC_1=B_1B_2$，所以四边形 $PB_1B_2C_1$ 为平行四边形，所以 $B_1P \underline{\underline{\parallel}} B_2C_1$. 这时，$\triangle PB_1A_2$ 的三边分别等于 C_2A_1，A_2B_1，B_2C_1，且由于 $PB_1//B_2C_1\Rightarrow\angle A_2B_1P=\angle A_3B_3C_3$，$A_2P//A_1C_2\Rightarrow\angle B_1A_2P=\angle B_3A_3C_3$.

所以 $\triangle A_3B_3C_3\backsim\triangle A_2B_1P$.

所以 $\frac{A_2B_1}{A_3B_3}=\frac{B_1P}{B_3C_3}=\frac{PA_2}{C_3A_3}$.

但 $B_1P=B_2C_1$，$PA_2=C_2A_1$，

所以 $\frac{A_2B_1}{A_3B_3}=\frac{B_2C_1}{B_3C_3}=\frac{C_2A_1}{C_3A_3}$.

例 10. 已知 $abc\neq0$，证明：四个数 $\frac{(a+b+c)^3}{abc}$，$\frac{(b-c-a)^3}{abc}$，$\frac{(c-a-b)^3}{abc}$，$\frac{(a-b-c)^3}{abc}$ 中至少有一个不小于 6.

分析 要证四个数 $\frac{(a+b+c)^3}{abc}$，$\frac{(b-c-a)^3}{abc}$，$\frac{(c-a-b)^3}{abc}$，

$\frac{(a-b-c)^3}{abc}$中至少有一个不小于6. 联想到平均数原理,可化归为判定

$$\frac{(a+b+c)^3}{abc}+\frac{(b-a-c)^3}{abc}+\frac{(c-a-b)^3}{abc}+\frac{(a-b-c)^3}{abc}=24$$

就可以了。

这样一来,就找到了解决本题的思路。

证明 因为

$$\frac{(a+b+c)^3}{abc}+\frac{(b-c-a)^3}{abc}+\frac{(c-a-b)^3}{abc}+\frac{(a-b-c)^3}{abc}$$

$$=\frac{[(a+b+c)^3+(b-c-a)^3]+[(c-a-b)^3+(a-b-c)^3]}{abc}$$

$$=\frac{2b(3a^2+b^2+3c^2+6ac)-2b(3a^2+b^2+3c^2-6ac)}{abc}$$

$$=\frac{24abc}{abc}=24 \qquad (*)$$

如果 $\frac{(a+b+c)^3}{abc}<6$, $\frac{(b-c-a)^3}{abc}<6$, $\frac{(c-a-b)^3}{abc}<6$, $\frac{(a-b-c)^3}{abc}<6$ 则

$$\frac{(a+b+c)^3}{abc}+\frac{(b-c-a)^3}{abc}+\frac{(c-a-b)^3}{abc}+\frac{(a-b-c)^3}{abc}<24,$$

与(*)式矛盾,

所以,四个加数 $\frac{(a+b+c)^3}{abc}$, $\frac{(b-c-a)^3}{abc}$, $\frac{(c-a-b)^3}{abc}$, $\frac{(a-b-c)^3}{abc}$中至少有一个不小于6.

例 11. 在凸四边形 $ABCD$ 中, $\angle A+\angle C=90°$.

求证: $(AB\cdot CD)^2+(AD\cdot BC)^2=(AC\cdot BD)^2$.

分析 求证的式子 $(AB\cdot CD)^2+(AD\cdot BC)^2=(AC\cdot BD)^2$ 酷似勾股定理的表达式,差异只在于勾股定理表达式每一项都是

线段的平方，而这里是线段乘积的平方。要化归为勾股定理来证明，就要设法消除这个差异。为此，各项均被 AC^2 去除，得

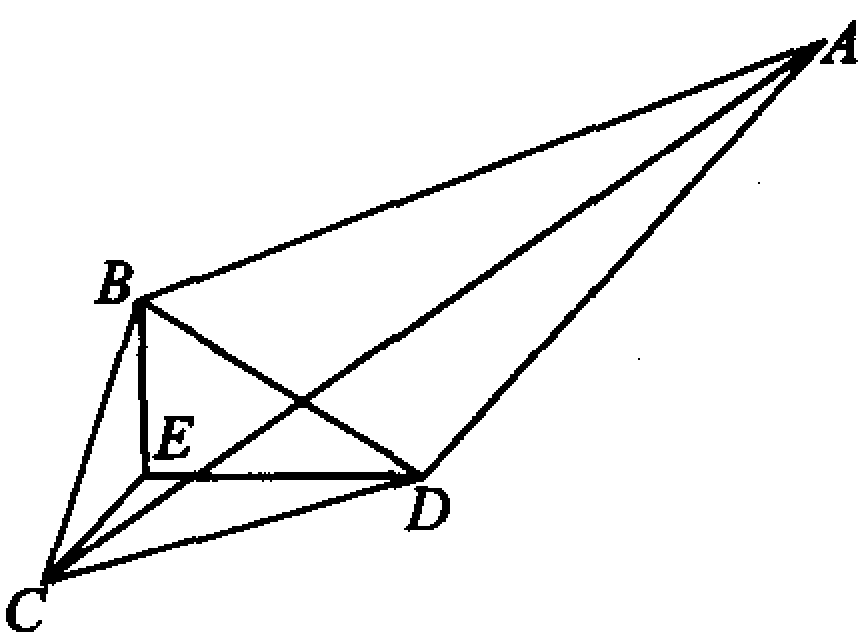
$$\left(\frac{AB\cdot CD}{AC}\right)^2+\left(\frac{AD\cdot BC}{AC}\right)^2=BD^2$$

这样一来，一个直角三角形已现端倪，BD 应是斜边，$\frac{AB\cdot CD}{AC}$ 和 $\frac{AD\cdot BC}{AC}$ 应是直角边。

根据求第四比例项的方法，启发我们作出一对相似三角形，使 AB 与 CD 是一组对应边，又知 AC，$\frac{AB\cdot CD}{AC}$ 就是 AC 的对应边；同法可求 $\frac{AD\cdot BC}{AC}$ 表示的线段。这样，将本题的证明，化归为勾股定理的应用。可得如下证法：

简证　在凸四边形 $ABCD$ 内取一点 E，使得 $\angle EDC=\angle BAC$. $\angle ECD=\angle BCA$，则 $\triangle ECD\backsim\triangle BCA\Rightarrow\frac{AB\cdot CD}{AC}=DE$

连接 BE，再证 $\triangle BCE\backsim\triangle ACD\Rightarrow\frac{AD\cdot BC}{AC}=BE.$



（图 6）

由 $\angle A+\angle C=90°$. 不难推得 $\angle BED=90°$.

在 $Rt\triangle BED$ 中，根据勾股定理得　$BE^2+ED^2=BD^2$，

所以

$$\left(\frac{AB\cdot CD}{AC}\right)^2+\left(\frac{AD\cdot BC}{AC}\right)^2=BD^2.$$

即 $(AB\cdot CD)^2+(AD\cdot BC)^2=(AC\cdot BD)^2$.

例 12.　若 $a<b<c<d$. 证明：对任意的实数 $t\neq-1$，关于 x 的方程

$$(x-a)(x-c)+t(x-b)(x-d)=0$$

都有两个不等的实数根。

分析 直接写出证明实属不易，因为不知如何下手。我们从探索思路开始。

由于判断一元二次方程实根的情况可用判别式法，题设的方程恰是关于 x 的二次方程，因此可设法将原问题化归为利用判别式判定方程是否有两个不等实根的问题。

原方程整理为

$$(1+t)x^2-[(a+c)+(b+d)t]x+(ac+bdt)=0\cdots\cdots①$$

$\because\ t\neq -1\quad \therefore\ t+1\neq 0$

方程①对任意 $t\neq -1$ 都是关于 x 的一元二次方程。要方程①有两个不等的实数根，只须①的判别式 $\Delta_1>0$ 对任意 $t\neq -1$ 都成立。而①的判别式

$$\begin{aligned}\Delta_1&=[(a+c)+(b+d)t]^2-4(1+t)(ac+bdt)\\&=(b-d)^2t^2+2[(a+c)(b+d)-2(ac+bd)]t+(a-c)^2\end{aligned}$$

$$\cdots\cdots②$$

因 $b<d$，$(b-d)^2>0$，②是关于 t 的二次函数，图象开口向上，所以，要证 $\Delta_1>0$ 对任意 $t\neq -1$ 都成立，只须关于 t 的二次函数②的判别式 $\Delta_2<0$。而

$$\begin{aligned}\Delta_2&=4[(a+c)(b+d)-2(ac+bd)]^2-4(b-d)^2(a-c)^2\\&=16(a-d)(b-c)(a-b)(d-c)\end{aligned}$$

$\because a<b<c<d$

$\therefore \Delta_2<0$ 成立。

这样我们通过分析沟通了思路，找到了入手点。于是就可以写出综合法证明。

证明 $\because a<b<c<d$

$\therefore 16(a-d)(b-c)(a-b)(d-c)<0$

但 $\Delta_2=4[(a+c)(b+d)-2(ac+bd)]^2-4(b-d)^2(a-c)^2$

$=16(a-d)(b-c)(a-b)(d-c)$

$\therefore \Delta_2<0$

而$\Delta_2=4[(a+c)(b+d)-2(ac+bd)]^2$恰是关于$t$的二次三项式

$$\Delta_1=(b-d)^2t^2+2[(a+c)(b+d)-2(ac+bd)]t+(a+c)^2$$

的判别式。由$(b-d)^2>0$，$\Delta_2<0$，表明二次函数Δ_1的图象均在t轴上方，即$\Delta_1>0$对任意$t\in R$都成立。进而

$$\begin{aligned}\Delta_1&=(b-d)^2t^2+2[(a+c)(b+d)-2(ac+bd)]t+(a-c)^2\\&=[(a+c)+(b+d)t]^2-4(1+t)(ca+bdt)\end{aligned}$$

它恰为关于x的一元二次方程$(t\neq-1)$

$(1+t)x^2-[(a+c)(b+d)t]x+(ac+bdt)=0$的判别式。

$\because\ \Delta_1>0$

$\therefore\ (1+t)x^2-[(a+c)(b+d)t]x+(ac+bdt)=0$对任意$t\neq-1$都有两个不等的实数根。

化归给解题以明确的目标指向，解题过程实际是实现目标的操作程序。

研究练习题 1－1

1. 证明方程：$x^4+3x^2+x+2=0$无实根。

2. 设$f(x)=\dfrac{4^x}{4^x+2}$，求和式

$$f\left(\frac{1}{1001}\right)+f\left(\frac{2}{1001}\right)+\cdots\cdots+f\left(\frac{999}{1001}\right)+f\left(\frac{1000}{1001}\right)$$的值。

3. 若a,b,c为实数，$A=a^2-2b+\dfrac{\pi}{2}$，$B=b^2-2c+\dfrac{\pi}{3}$，

$C=c^2-2a+\dfrac{\pi}{6}$.

证明：A,B,C中至少有一个的值大于0.

§1.2　抽屉原则应用例谈

抽屉原则学名叫做迪里赫勒原理。它的内容的最简单的表述是

命题1. 把 $n+1$ 个苹果放到 n 个抽屉里,则至少有一个抽屉中有不少于两个苹果。

命题2. 把 $m\times n+1$ 个苹果分装到 n 个抽屉里,则至少有一个抽屉中有不少于 $m+1$ 个苹果。

为了加强研究性,我们把命题 1 与命题 2 变换为另一种提法,就可以开拓我们的视野,使抽屉原则变为探索数量关系的一个有力工具。

问题1. 在 n 个抽屉中放入 k 个苹果,要至少在一个抽屉中有不少于两个苹果,求 k 的最小值。显然,k 的最小值是 $n+1$.

问题2. 在 n 个抽屉中放入 k 个苹果,要至少在一个抽屉中有不少于 $m+1$ 个苹果,求 k 的最小值。显然,k 的最小值是 $m\times n+1$.

例1.　黑色、白色、黄色的筷子各有 8 根,混杂地放在一起。问:在黑暗中至少要摸出多少根筷子才能保证其中必有不同颜色的两双筷子?

解　首先我们看到,就是取 10 根筷子,比如:拿的是 8 根黑筷子,而白、黄筷子各一只,也不能保证达到“取出颜色不同的两双筷子”的要求。因此,要想达到“取出颜色不同的两双筷子”的要求,至少应取 11 只筷子。

下面我们证明,任意摸出的 11 根筷子中,一定能保证达到要求,即必有不同颜色的两双筷子。

因为摸出的 11 根筷子中数量最多的同色(不妨设为黑色)筷子至少有 4 根至多有 8 根,所以一定可以得到一双黑色筷子。另外至少有 $11-8=3$ 根是其它两种颜色(白或黄色)的筷子,根据

抽屉原理,至少有两根同色(比如黄色)的筷子,于是又得到一双同色(黄色)的筷子。所以可以找到两双颜色不同的筷子。

综上所述,可知至少要摸出 11 根筷子,才能保证有不同颜色的两双筷子的事件必然发生。

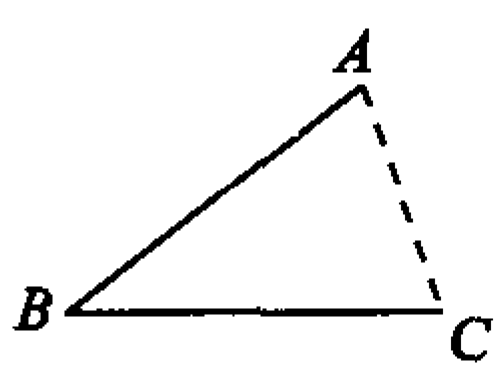
例 2.　人们之间存在相识与不相识两种关系。甲认识乙,乙也认识甲称为甲乙相识;否则,称为甲乙不相识。随意选出 k 个人,使他们之中要么有三个人彼此两两相识,要么有三个人两两不相识。问 k 的最小值是多少?

解　每个人我们用一个点表示,A,B 二人相识,我们记成

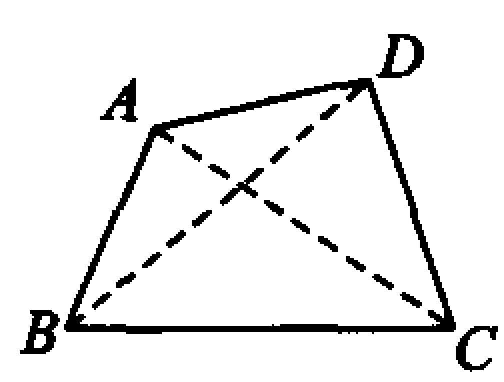
A——B;A,B 二人不相识,我们记成 $A\cdots\cdots B$.

显然,取 A,B,C 三个人,不能保证这三个人一定彼此相识或彼此不相识,如图 1 所示。

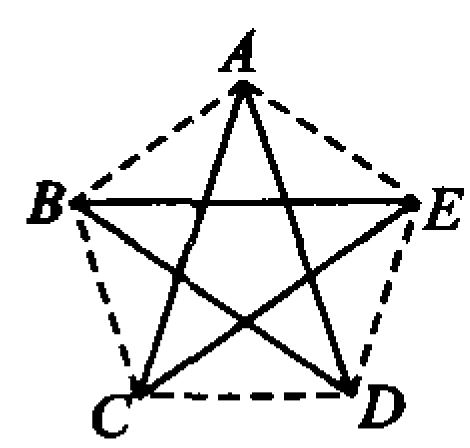
取 A,B,C,D 四个人,也不能保证有三个人一定彼此相识或找到三个人彼此不相识,如图 2 所示。



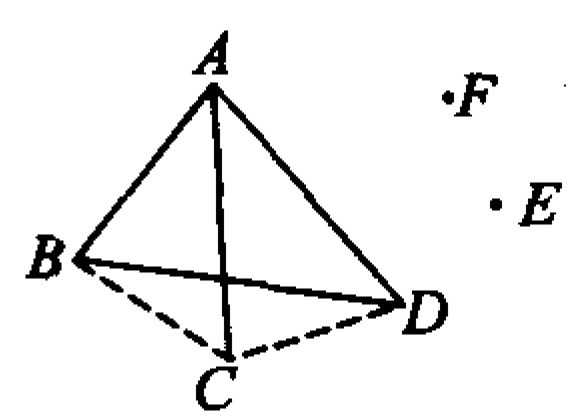
(图 1)



(图 2)



(图 3)



(图 4)

取 A,B,C,D,E 五个人,也可画出没有三人彼此相识同时也没有三人彼此不相识的情况,如图 3 所示。

因此,$k>5$,$k\geqslant 6$. 我们证明:$k=6$ 时,要么有三个人彼此两两相识,要么有三个人彼此不相识。

设这六个人为 A,B,C,D,E,F,其中 A 对 B,C,D,E,F,每人要么相识,要么不相识,根据抽屉原则,A 至少对其中三个人属同一种关系。

(1)不妨设 A 对 B,C,D 三人都是相识关系,若 B,C;C,D;B,D 中有一对是相识关系,比如 B,D 相识,则 A,B,D 三人就是彼此相识的三个人。

若 $B,C;C,D;B,D$ 两两都不相识，则 B,C,D 三人就是两两不相识的三个人。(如图4所示)

(2)若 A 对 B,C,D 三人都是不相识关系，当 $B,C;C,D;B,D$ 中有一对也是不相识关系，比如 B,C 也是不相识时，则 A,B,C 三人就是彼此不相识的三个人。

若 $B,C;C,D;B,D$ 两两都相识，则 B,C,D 三人就是彼此两两相识的三个人。

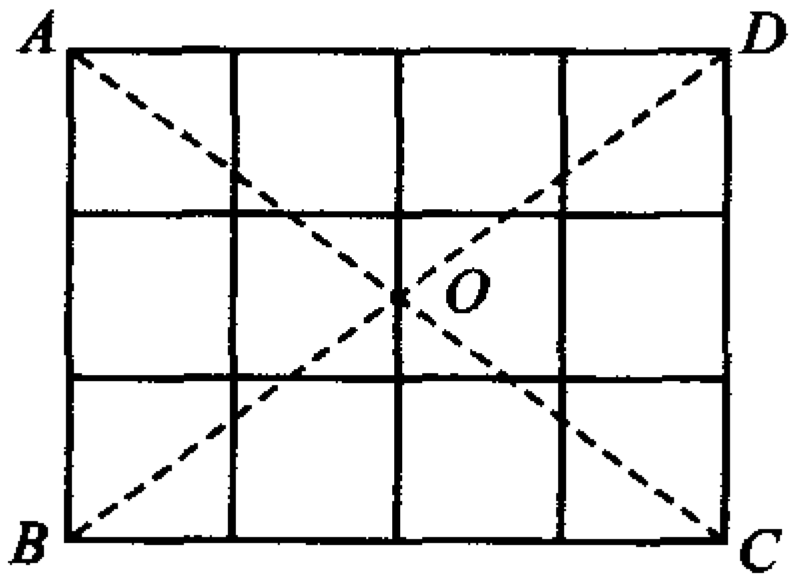
因此，只要随意地找出6个人，就保证要么有其中三个人彼此两两相识，要么有三个人两两不相识的状态发生。少于6个人就不能保证这一点。

例3. 在 3×4 的矩形方格中，至少要放入多少个点，才能保证至少有两个点的距离不超过 $\sqrt{5}$？

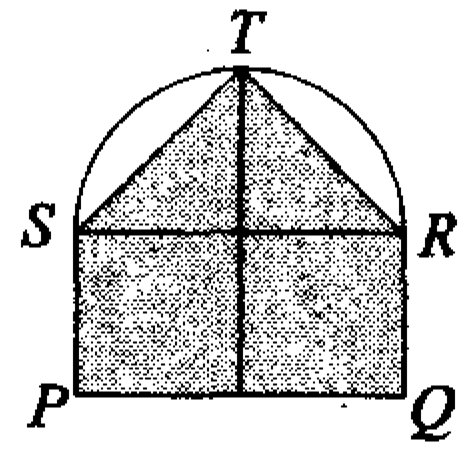
分析 由于 1×2 的小矩形的对角线长为 $\sqrt{5}$. 容易想到将 3×4 的矩形分成为6个 1×2 的小矩形，这样只要放入7个点，就必然有两个点在同一个小矩形内，这两点的距离不超过 $\sqrt{5}$.

然而，7个点是不是最少呢？

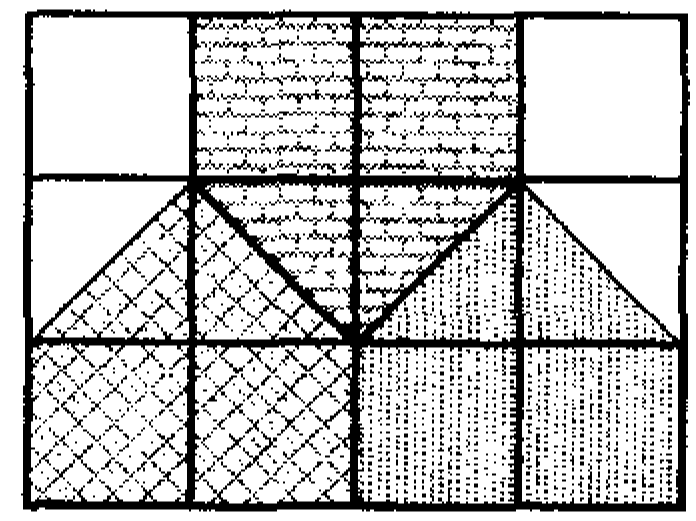
如图5，当放入的就是 A,B,C,D 及对角线的交点 O 这五个点时，易知任两点间的最近距离为2.5，而 $\sqrt{5}=2.236\cdots\cdots$，显然，放入5个点不一定保证结论成立。



(图5)



(图6)



(图7)

因此，问题是放入6个点如何呢？要么举出6个点的某种放法，使任二点间的距离都大于 $\sqrt{5}$，要么就证明放入6个点后，必然

存在两个点的距离不超过$\sqrt{5}$. 我们发现，1×2 的小矩形并不是任两点间距离不超过$\sqrt{5}$的最大区域。我们可按图 6 的方式构造出新的区域：对 1×2 的小矩形 $PQRS$，分别以 P,Q 为圆心，$\sqrt{5}$为半径画弧，两弧交于 T 点，连接 ST,RT，则五边形 $PQRTS$ 中任两点间距离均不超过$\sqrt{5}$. 当然它的一部分中任两点间距离也均不超过$\sqrt{5}$. 这样一来，我们找到了构作"尺寸"为$\sqrt{5}$的各种抽屉的方法。将 3×4 的矩形分为如图 7 所示的 5 个抽屉，放入 6 个点，必有一个抽屉中至少含有两个点，从而这两点间的距离不超过$\sqrt{5}$.

综上分析可见，放入点数的最小值为 6.

通过上述三例可见，当我们将抽屉原则的命题 1、命题 2 换一种提法形成问题 1 和问题 2 之后，使抽屉原则有了求解极值问题的新的用场　**在大量的元素的集合中，任取一个子集，当这个子集的元素个数 k 至少是多少时，必能保证某种关系一定成立？**

解这类问题，一般要通过实验构作反例，说明 $k=m$ 时，命题不一定成立，从而猜测 $k=m+1$. 然后再利用抽屉原则证明，当 $k=m+1$ 时命题一定成立。从而确定 k 的最小值是 $m+1$. 这种考虑问题的策略方法在实际工作中极为有用。

例 4.　某精密仪器厂生产的部件 A 的重量控制在 m 克到 $m+0.1$ 克之间（m 是已知常数）。现在需要制成重量相差不超过 0.005 克的两个部件 A 在同一个飞船上使用。问该工厂至少要生产多少个部件 A，才能保证得到一对符合要求的部件 A 在装配飞船上使用？

解　m 克到 $m+0.1$ 克之间相差 0.1 克，而 $0.1\div0.005=20$. 我们把部件 A 的重量分为 20 类（20 个小区间）：

$(m\sim m+0.005)$；$(m+0.005\sim m+0.01)$；$(m+0.01\sim m+0.015)$；

$(m+0.015\sim m+0.02)$；$(m+0.02\sim m+0.025)$；$(m+0.025\sim m+0.03)$；

$(m+0.03\sim m+0.035)$；$(m+0.035\sim m+0.04)$；$(m+0.04\sim m+0.045)$；

$(m+0.045\sim m+0.05)$；$(m+0.05\sim m+0.055)$；$(m+0.055\sim m+0.06)$；

$(m+0.06\sim m+0.065)$；$(m+0.065\sim m+0.07)$；$(m+0.07\sim m+0.075)$；

$(m+0.075\sim m+0.08)$；$(m+0.08\sim m+0.085)$；$(m+0.085\sim m+0.09)$；

$(m+0.09\sim m+0.095)$;$(m+0.095\sim m+0.1)$.

若生产 20 个部件 A 的重量依次为 $m,m+0.00501,m+0.01002,m+0.01503,m+0.02004,m+0.02505,m+0.03006,m+0.03507,m+0.04008,m+0.04509,m+0.05010,m+0.05511,m+0.06012,m+0.06513,m+0.07014,m+0.07515,m+0.08016,m+0.08517,m+0.09018,m+0.09519$ 时,其中任两个产品重量之差都大于 0.005,因此,至少要生产 21 个部件 A. 事实上,21 个部件 A 的重量分布在上述的 20 个区间中,至少有两个部件 A 在同一个抽屉中,这两个部件 A 的重量之差就不超过 0.005.

因此,至少要生产 21 个部件 A,才能保证选到两个重量之差不超过 0.005 克,可安装在同一飞船上。

如果为了确保成功,需要有一组备用部件 A 以备临时应急,这个工厂可以生产 23 个部件 A 运往飞船组装基地,即可满足要求。这样确保万无一失地又可最少量地安排生产,对计划工作是很重要的。

在数学训练中,要编拟一些激发学生兴趣的题目来训练使用抽屉原则的这种应用形式。

例 5. 在对正 100 边形的 100 个顶点中的 k 个顶点染上红色,使得至少有 4 个红点恰是一个正方形的四个顶点。求 k 的最小值。

解 设这个正 100 边形的 100 个顶点为 $A_1,A_2,A_3,\cdots\cdots,A_{99},A_{100}$. 当只对 $A_1,A_2,A_3,\cdots\cdots,A_{74},A_{75}$ 这 75 个顶点染红色时,不会出现四个顶点都是红色的正方形。所以 $k>75\Rightarrow k\geqslant 76$.

当 $k=76$ 时,将 100 个顶点分为 25 组(抽屉):

$M_i=\{A_i,A_{i+25},A_{i+50},A_{i+75}\}(i=1,2,3\cdots\cdots,24,25)$,每组 M_i 的四个顶点恰是一个正方形的顶点。所给的 76 个红色顶点中至少有 4 个属于某个 M_i,这四个红点就恰是一个正方形的 4 个顶点。

综上所述,k 的最小值等于 76.

例 6.　从三位数 100,101,102,……,499,500 中任意取出 n 个不同的数,使得总能找到其中三个数,它们的数字和相同。试确定 n 的最小值,并说明理由.

解　在 100,101,102,……,499,500 这 401 个数中,数字和为 1 的只有 100 这一个数,数字和最大为 22 的只有 499 这一个数。其余的 399 个数的数字都在 2 到 21 之间。

由抽屉原则,在这 399 个数中,任取 $20\times2+1=41$ 个数,必存在三个数,它们的数字和相同。

考虑到 100 与 499,在 100 到 500 这 401 个整数中,任取 43 个数,必存在三个数,它们的数字和相同。n 的最小值可能是 43.

下面说明,当取如下的 42 个数:

100;101,110;102,120;103,130;104,140;105,150;106,160;107,170;108,180;109,190;119,191;129,192;139,193;149,194;159,195;169,196;179,197,189,198;469,496;479,497;489,498;499

没有三个数的数字和相同,所以 n 的最小值是 43.

例 7.　有 100 名小运动员所穿运动服的号码是从 1 ~ 100 这一百个自然数。问从这 100 名运动员中至少要选出多少人,才能使在被选出的人中必有两人,他们运动服的号码数之差的绝对值是 9?

解　若选出 54 人,他们的号码是

1,　2,　3,　4,　5,　6,　7,　8,　9;
19,　20,　21,　22,　23,　24,　25,　26,　27;
37,　38,　39,　40,　41,　42,　43,　44,　45;
55,　56,　57,　58,　59,　60,　61,　62,　63;
73,　74,　75,　76,　77,　78,　79,　80,　81;
91,　92,　93,　94,　95,　96,　97,　98,　99.

这些数的时候,任两个人的号码数之差的绝对值均不等于 9.

可见,所选的人数必大于或等于 55 才有可能。

我们证明,至少要选出 55 人时,一定存在两个运动员号码数

之差的绝对值恰是9.

被选出的55人有55个不同号码数,由于55 = 6 × 9 + 1,所以其中必有7个号码数被9除的余数是相同的(这一步使用了按被9除的余数分类构造抽屉的方法)。但由1 ~ 100这一百个自然数中,被9除余数相同的数最多为12个数。这12个数中选7个数,一定有两个是"大小相邻"的,这"大小相邻"的两个数的差的绝对值等于9.

所以,至少要选出55名小运动员,才能使其中必有两人运动服的号码数之差的绝对值是9.

例8. 在1,2,3,……,90,91这91个自然数中任取k个数,使得其中必有两个自然数p,q满足$\frac{2}{3} \leqslant \frac{q}{p} \leqslant \frac{3}{2}$. 试确定自然数$k$的最小值,并说明理由。

(北京市1996年初二年级数学竞赛复试第5题)

解 将1 ~ 91这91个自然数分为九组,使每组中任两个自然数的比值均不小于$\frac{2}{3}$且不大于$\frac{3}{2}$,分组法如下:

$A_1 = \{1\}$, $A_2 = \{2,3\}$, $A_3 = \{4,5,6\}$, $A_4 = \{7,8,9,10\}$,

$A_5 = \{11,12,13,14,15,16\}$,

$A_6 = \{17,18,19,20,21,22,23,24,25\}$,

$A_7 = \{26,27,28,29,30,31,32,33,34,35,36,37,38,39\}$,

$A_8 = \{40,41,42,43,44,45,46,\cdots\cdots,55,56,57,58,59,60\}$,

$A_9 = \{61,62,63,64,65,66,\cdots\cdots,85,86,87,88,89,90,91\}$,

当任取这这91个自然数中的9个数,比如在A_1,A_2,A_3,A_4,A_5,A_6,A_7,A_8,A_9中各取一个数,例如取1,3,6,10,16,25,39,60,91时,这九个数中任二数之比均小于$\frac{2}{3}$或大于$\frac{3}{2}$. 可见

当$k = 10$时,在1 ~ 91这91个自然数中任取10个数,根据抽屉原则,必有两个数属于同一个A_i,比如这两个数就是p与q,且$p < q$,于是$\frac{2}{3} \leqslant \frac{q}{p} \leqslant \frac{3}{2}$成立. 所以$k$的最小值是10.

研究练习题 1－2

1. 在 1～100 这 100 个自然数中任取 k 个,使得其中必有两个数互质,试确定 k 的最小值.

2. 在半径为 1 的圆内任意放入 k 个点,使得其中必有两个点的距离不大于 1,试确定 k 的最小值.

3. 四个人聚会,每人各带了 2 件礼品. 分赠给其余三个人中的两个人. 试证明:至少有两对人,每对人是互赠礼物的.

§1.3　排序思想解题例谈

在日常生活中,一班新同学按个子高矮排成一队,这实际是按身高排序。等公共汽车,人们在站前排队,很有秩序,这是按到车站的先后次序来排队,将无序的状态整理为有序,使我们能更好地处理问题。

在数学中,任给两个有理数,我们可以比较它们的大小。同样,任给两个实数,我们也可以比较它们的大小。这称为实数的有序性。因此,给定 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 这 n 个实数,我们一定可以按量值由小到大排成一列,只要给出 n 个实数,它们在量值大小上的序也就确定了。只是题目中没有明确指出。这时,我们可以"不妨设这个 n 实数就是 $a_1\leqslant a_2\leqslant a_3\cdots\cdots a_{n-1}\leqslant a_n$",将序关系揭示出来,会对解题造成很多便利条件,会使分类讨论变得简洁,条理清晰。例如,三条线段 a,b,c 能够构成三角形三边的充分必要条件是:

$$\begin{cases}a<b+c\\ b<c+a\\ c<a+b\end{cases}$$

如果我们将线段 a,b,c 按长度大小排序为 $c\leqslant b\leqslant a$,则线段 a,b,c 构成一个三角形三边的充分必要条件就可简化为 $a<b+c$.

下面举例示范排序思想在解题中的应用。

例1. 设 a,b,c 是两两不等的正数,证明:$\frac{ab+1949}{2004}$,$\frac{bc+1949}{2004}\frac{ca+1949}{2004}$也一定两两不等。

证明 因为 a,b,c 是两两不等的正数,不妨设 $a>b>c>0$(排序!)则有

$ab>ac>bc>0$. 进而 $ab+1949>ac+1949>bc+1949$

所以

因此$\frac{ab+1949}{2004}$,$\frac{bc+1949}{2004}\frac{ca+1949}{2004}$也一定两两不等。

例2. 平面上给定7个不同的点。试证:一定可以画一个圆,使圆内恰有4个点,圆外有3个点。

证明 设7个点为 $P_1,P_2,P_3,P_4,P_5,P_6,P_7$,将它们两两连接共计21条线段:$P_1P_2,P_1P_3,\cdots\cdots,P_1P_7,P_2P_3,\cdots\cdots,P_6P_7$,分别作这21条线段的垂直平分线 $l_{ij}(i,j=1,2,3,4,5,6,7,i\neq j)$. 在平面上取不在这21条直线 l_{ij}上的一点 O,则由线段垂直平分线的性质可知,O 到 $P_1,P_2,P_3,P_4,P_5,P_6,P_7$ 的距离两两不等。不失一般性,我们设 $OP_1<OP_2<OP_3<OP_4<OP_5<OP_6<OP_7$(排序!).

取 $r=\frac{1}{2}(OP_4+OP_5)$则 $OP_4<r<OP_5$. 以 O 为圆心,r 为半径画$\odot(O,r)$,则 P_1,P_2,P_3,P_4 这4个点在该圆内部,P_5,P_6,P_7 这3个点在该圆外部。

例3. 已知三个不同的正整数,它们两两互质,并且其中任二数之和都能被第三个数整除。试确定此三个数。

解 已知三个不同的正整数用数学语言表示就是:a,b,c 为正整数且 $a<b<c$(排序!).

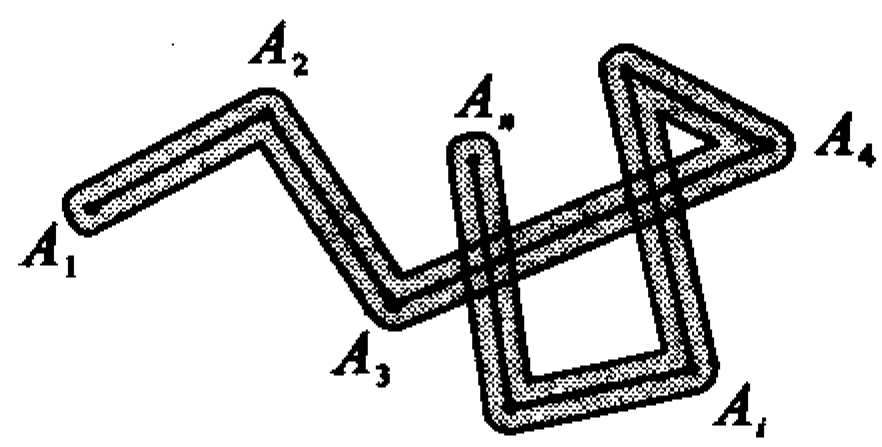
则 $a+b<2c$,即$\frac{a+b}{c}<2\Rightarrow\frac{a+b}{c}=1$ 也就是 $a+b=c$.

因为 $b|a+c$,所以 $b|[a+(a+b)]\Rightarrow b|(2a+b)\Rightarrow b|2a$

但$(a,b)=1$,所以$b|2$.

此时,$b=1$ 或 $b=2$. 但 $b=1$ 时,有 $a<b=1$,则 $a=0$ 不是正整数。所以 $b=2$. 此时有 $a=1,b=2,c=a+b=3$. 为所求的三个正整数。

例 4.　树林中任意两棵树之间的距离不超过它们的高度之差的绝对值。所有的树木的高度皆小于 100 米。证明:这个树林可以用 200 米的篱笆围起来(不考虑篱笆与树之间的距离)。



证明　设这个树林有 n 棵树,其高度不妨就设为 $a_1>a_2>a_3\cdots\cdots>a_n$(排序!). 生长地点依次为 $A_1,A_2,A_3,\cdots\cdots,A_n$. 由题设条件:

$$A_1A_2\leqslant|a_1-a_2|=a_1-a_2$$
$$A_2A_3\leqslant|a_2-a_3|=a_2-a_3$$
$$\cdots\cdots\quad\cdots\cdots\quad\cdots\cdots$$
$$A_{n-1}A_n\leqslant|a_{n-1}-a_n|=a_{n-1}-a_n.$$

于是折线 $A_1A_2A_3\cdots\cdots A_n$ 的长度不超过

$(a_1-a_2)+(a_2-a_3)+(a_3-a_4)+\cdots\cdots+(a_{n-1}-a_n)=a_1-a_n<100$(米).

因此,用篱笆围起这条折线,篱笆长度不超过 200 米。

例 5.　七个采蘑菇的儿童共采了 100 个蘑菇。其中任两个儿童采的蘑菇个数都不相等。求证:一定有三个儿童采的蘑菇个数之和不少于 50 个。

证明　七个儿童采的蘑菇个数,由多到少依次设为 $a_1>a_2>a_3>a_4>a_5>a_6>a_7$(排序!). 则

$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7=100$. 我们只须证明 $a_1+a_2+a_3\geqslant50$ 即可。

如果 $a_3\geqslant16$,则 $a_2\geqslant17,a_1\geqslant18$. 此时 $a_1+a_2+a_3\geqslant18+17+16=51>50$.

如果 $a_3<16$,则有 $a_3\leqslant15$. 此时 $a_4\leqslant14,a_5\leqslant13,a_6\leqslant12$,

$a_7 \leqslant 11$.

于是 $a_4+a_5+a_6+a_7 \leqslant 14+13+12+11=50$

所以 $a_1+a_2+a_3=100-(a_4+a_5+a_6+a_7) \geqslant 100-50=50$.

综上所述,一定有三个儿童采的蘑菇的个数不少于 50 个。

例 6. 给定 n 条线段,已知用其中任意的 $n-1$ 条线段均可作成一个 $n-1$ 边形。求证:可用其中的某三条线段为边作成一个三角形。

证明 由 $a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots, a_{n-1}, a_n$ 表示题设的 n 条线段。不妨设 $a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant \cdots\cdots \leqslant a_{n-1} \leqslant a_n$(排序!)

假设以所给的 n 条线段中任三条为边均不能构成三角形,则有

$a_3 \geqslant a_1+a_2, a_4 \geqslant a_2+a_3, a_5 \geqslant a_3+a_4, \cdots\cdots, a_n \geqslant a_{n-2}+a_{n-1}$,

相加得 $a_n \geqslant a_{n-2}+a_{n-3}+a_{n-4}+\cdots\cdots+a_3+2a_2+a_1$

更有 $a_n \geqslant a_{n-2}+a_{n-3}+a_{n-4}+\cdots\cdots+a_3+a_2+a_1$,

这表明以 $a_n, a_{n-2}, a_{n-3}, a_{n-4}, \cdots\cdots, a_3, a_2, a_1$ 这 $n-1$ 条线段为边不能构成一个 $n-1$ 边形,与已知矛盾!

因此,可用其中的某三条线段为边作成一个三角形。

例 7. 如果正整数 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 满足 $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=x_1x_2x_3x_4x_5$. 问 x_5 的最大值是多少?

解 由 x_i 的地位轮换对称,x_5 的最大值也就是 x_1, x_2, x_3, x_4 的最大值。为确定起见,不妨设 $x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3 \leqslant x_4 \leqslant x_5$(排序!)则

$$1=\frac{1}{x_2x_3x_4x_5}+\frac{1}{x_1x_3x_4x_5}+\frac{1}{x_1x_2x_4x_5}+\frac{1}{x_1x_2x_3x_5}+\frac{1}{x_1x_2x_3x_4}$$

$$\leqslant \frac{1}{x_4x_5}+\frac{1}{x_4x_5}+\frac{1}{x_4x_5}+\frac{1}{x_5}+\frac{1}{x_4}=\frac{3+x_4+x_5}{x_4x_5}$$

于是得 $x_4x_5-x_4-x_5 \leqslant 3$,即 $(x_4-1)(x_5-1) \leqslant 4$

若 $x_4=1$,则 $x_1=x_2=x_3=x_4=1$. 题设等式为 $4+x_5=x_5$ 矛盾!

若 $x_4>1$,则 $x_5-1 \leqslant 4$,即 $x_5 \leqslant 5$.

当 $x_5=5$ 时容易找到满足条件的数组$(1,1,1,2,5)$,所以 x_5

的最大值是 5.

例 8.　证明:任意不超过 1997 但不等于 1 的 15 个两两互质的正整数中,至少有一个是质数。

证明　设任取的不等于 1 的 15 个两两互质的不超过 1997 正整数为

$n_1,n_2,n_3,\cdots\cdots,n_{15}$,不妨设为

$1<n_1<n_2<n_3<\cdots\cdots<n_{15}<1997$,其中$(n_i,n_j)=1$.

假设 $n_1,n_2,n_3,\cdots\cdots,n_{15}$中没有质数,则这 15 个数均为合数,当然每个 n_i都能分解质因数。记每个 n_i的最小质因数设为 p_i,因为 n_i与 n_j互质,所以 p_i与 p_j不同。也就是 $n_1,n_2,n_3,\cdots\cdots,n_{15}$对应的最小质因数 $p_1,p_2,p_3,\cdots\cdots,p_{15}$是两两不同的。设 $p_1,p_2,p_3,\cdots\cdots,p_{15}$中最大的一个数等于 p,则

$2\times3\times5\times7\times11\times13\times17\times19\times23\times29\times31\times37\times41\times43\times47<p_1p_2p_3\cdots p_{15}$.

所以 $p\geqslant47$.

因此 $n\geqslant47^2=2039>1997$. 矛盾!

所以,任意不超过 1997 但不等于 1 的 15 个两两互质的正整数中,至少有一个是质数。

例 9.　在正整数范围内解方程$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$

解　由 x,y,z 地位轮换对称,为确定起见,不妨设 $x\leqslant y\leqslant z$(排序!)易知 $x>1$,所以 $1>\frac{1}{x}\geqslant\frac{1}{y}\geqslant\frac{1}{z}$根据平均数原理,$\frac{1}{x},\frac{1}{y},\frac{1}{z}$中至少有一个不小于$\frac{1}{3}$. 当然,其中最大者$\frac{1}{x}\geqslant\frac{1}{3}\Rightarrow x\leqslant3$. 因此 $x=2$ 或 $x=3$.

(1)当 $x=2$ 时,$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{2}$,根据平均数原理,$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$中至少有一个不小于$\frac{1}{4}$,当然其中较大者$\frac{1}{y}\geqslant\frac{1}{4}$,从而 $y\geqslant4$. 又易知 $y>$

2,所以 $y=3$ 或 $y=4$.

①当 $y=3$ 时,$\frac{1}{z}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}\Rightarrow z=6$. 得解 $x=2,y=3,z=6$.

②当 $y=4$ 时,$\frac{1}{z}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}\Rightarrow z=4$. 得解 $x=2,y=4,z=4$.

(2)当 $x=3$ 时,$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{2}{3}$,根据平均数原理,$\frac{1}{y}$,$\frac{1}{z}$中至少有一个不小于$\frac{1}{3}$,当然其中较大者$\frac{1}{y}\geqslant\frac{1}{3}$,从而 $y\leqslant 3$. 但 $y\geqslant x=3$,推知 $y=3$,进而 $z=3$. 又得解 $x=y=z=3$.

所以当 $x\leqslant y\leqslant z$ 的情况下得到(3,3,3),(2,3,6),(2,4,4).

考虑到 x,y,z 地位轮换对称,可得下表所列的 10 组解

x	3	2	2	2	3	3	4	6	6	4
y	3	3	6	4	2	6	2	2	3	4
z	3	6	3	4	6	2	4	3	2	2

例 10. 设有 $2n\times 2n$ 的正方形棋盘,在其中任意的 $3n$ 个方格中各放一枚棋子。

求证:可以选出 n 行和 n 列,使得 $3n$ 枚棋子都在这 n 行和 n 列中。

证明 设各行所放的棋子数分别为 $p_1,p_2,p_3,\cdots\cdots,p_{2n}$,不妨设

$$p_1\geqslant p_2\geqslant p_3\geqslant\cdots\cdots\geqslant p_{2n}(\text{排序!})$$

由题设 $p_1+p_2+p_3+\cdots\cdots+p_{2n}=3n\cdots\cdots①$

选取棋子数为 $p_1,p_2,p_3,\cdots\cdots,p_n$ 这 n 行,我们证明,必有

$$p_1+p_2+p_3+\cdots\cdots+p_n\geqslant 2n \text{ 成立。}$$

如若不然,将有 $p_1+p_2+p_3+\cdots\cdots+p_n\leqslant 2n-1,\cdots\cdots②$

则 $p_1,p_2,p_3,\cdots\cdots,p_n$ 中至少有一个不大于 1. 又由①、②得,

$$p_{n+1}+p_{n+2}+p_{n+3}+\cdots\cdots+p_{2n}\geqslant n+1$$

从而 $p_{n+1},p_{n+2},p_{n+3},\cdots\cdots,p_{2n}$中至少有一个大于 1,这与所设排序次序相矛盾! 所以 $p_1+p_2+p_3+\cdots\cdots+p_n\geqslant 2n$ 成立。

所以选出棋子数为 $p_1,p_2,p_3,\cdots\cdots,p_n$ 的 n 行，已至少含 $2n$ 枚棋子，再选出 n 列包含其余不多于 n 枚的棋子，这样的 n 行和 n 列就包含了全部的 $3n$ 枚棋子。

例 11.　给出 5 条线段，它们中任三条都能构成三角形。则由这 5 条线段构成的三角形中至少有一个是锐角三角形。

证明　不妨设这五条线段 a_1,a_2,a_3,a_4,a_5 满足 $a_1\leqslant a_2\leqslant a_3\leqslant a_4\leqslant a_5$（排序！）.

假设这五条线段中任三条组成的三角形都不是锐角三角形，根据余弦定理，我们有：

$a_3^2\geqslant a_1^2+a_2^2,a_4^2\geqslant a_2^2+a_3^2,a_5^2\geqslant a_3^2+a_4^2$,

相加得　$a_5^2\geqslant a_1^2+2a_2^2+a_3^2\geqslant 2(a_1^2+a_2^2)\geqslant(a_1+a_2)^2$.

所以 $a_5\geqslant a_1+a_2$. 这与 a_1,a_2,a_5 三条线段构成三角形的条件 $a_5<a_1+a_2$ 矛盾！所以，由所给的这 5 条线段构成的三角形中至少有一个是锐角三角形。

例 12.　国际象棋比赛中胜一局积一分，平一局积 0.5 分，负一局积 0 分。今有 8 名选手进行单循环比赛（每两人均赛一局）。如果他们的得分均不相同，当按得分由大到小排好名次后，发现第四名选手得 4.5 分，第二名的得分等于最后四名选手得分之和。问前三名选手各得多少分？简述理由。

解　设第 i 名选手得分为 a_i，则 $a_1>a_2>a_3>a_4>a_5>a_6>a_7>a_8$（排序！）

由于 8 名选手每人比赛 7 局，最多可胜 7 场，所以 $a_1\leqslant 7$.

大家共赛 $\frac{7\times 8}{2}=28$ 场，总积分为 28 分。

所以 $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8=28$　…………①

因为每局的积分为 0,0.5,1 这三种值，所以每人的积分只能取 0,0.5,1,1.5,2,2.5,3,3.5,4,4.5,5,5.5,6,6.5,7 这 15 个值。

又知 $a_4=4.5,a_2=a_5+a_6+a_7+a_8$……②

若 $a_3\geqslant 5.5$，则 $a_2\geqslant 6,a_1\geqslant 6.5$，此时 $a_1+a_2+a_3\geqslant 6.5+6+$

5.5 =18.

由①$a_4+a_5+a_6+a_7+a_8\leqslant 10$,但 $a_4=4.5$,由②$a_2=a_5+a_6+a_7+a_8\leqslant 10-4.5=5.5$,这与 $a_2\geqslant 6$ 矛盾! 所以 $a_3<5.5$,但 $a_3>a_4=4.5$,所以 $a_3\doteq 5$.

这时由①得 $a_1+a_2+a_5+a_6+a_7+a_8=28-5-4.5=18.5$,也就是 $a_1+2a_2=18.5$

若 $a_2=5.5$,那么 $a_1=18.5-11=7.5>7$,与 $a_1\leqslant 7$ 矛盾!

若 $a_2\geqslant 6.5$,那么 $a_1=18.5-2a_2\leqslant 18.5-13=5.5<a_2$ 矛盾! 所以只能 $a_2=6$. 此时 $a_1=18.5-2\times 6=6.5$. 所以前三名选手的积分分别为:6.5 分,6 分,5 分。

事实上当第一名选手平第三名选手胜其余六人,第二名选手负于第一名而胜其它六名选手,第三名选手平第一名、负于第二名、平第四名、胜其它各名选手时,这时第四名选手负于第一名、第二名,平第三名时即可达到。

例 13. 对于平面上任给的 n 个点,求证:总存在 $n+1$ 个同心圆,使得其组成的 n 个圆环中的每一个恰含一个点,且各同心圆的半径都是最小圆半径的整数倍。

证明 在平面上取一个异于已给的 n 个点的一点 O,使它不在连接这 n 个点的任意两点线段的垂直平分线上。则 O 点到这 n 个点的距离 d_i 两两不等,按从小到大排序不妨设为:$d_1<d_2<d_3<\cdots\cdots<d_n$(排序!)

在 $d_1,d_2-d_1,d_3-d_2,\cdots\cdots,d_{n-1}-d_{n-2},d_n-d_{n-1}$ 中必有最小者。

取 r,使得 $0<r<min\{d_1,d_2-d_1,d_3-d_2,\cdots\cdots,d_n-d_{n-1}\}$

因为$\dfrac{d_{i+1}-d_i}{r}>1$,即 $\dfrac{d_{i+1}}{r}-\dfrac{d_i}{r}>1(i=1,2,\cdots\cdots,n)$所以区间$\left(\dfrac{d_i}{r},\dfrac{d_{i+1}}{r}\right)$的长度大于 1. 因此存在正整数 m_i,使得 $m_i\in\left(\dfrac{d_i}{r},\dfrac{d_{i+1}}{r}\right)(i=1,2,\cdots\cdots,n)$,即

$$\frac{d_i}{r} < m_i < \frac{d_{i+1}}{r} \Rightarrow d_i < rm_i < d_{i+1} \qquad (i = 1, 2, \cdots\cdots, n)$$

也必存在正整数 m_n，使得 $rm_n > d_n$.

故以 O 为圆心，以 $r, rm_1, rm_2, \cdots\cdots, rm_n$ 为半径画圆有

$r < d_1 < rm_1 < d_2 < rm_2 < d_3 < rm_3 < \cdots\cdots < d_n < rm_n$ 共画 $n+1$ 个圆，每两个圆间都恰夹着一个已知的点。

以上诸例，不论是证明题还是计算题、智巧题，均由于对实数排序而为解题创设了有利的条件。有人说，数学的发展，其研究的对象已经是模式和秩序。因此，排序的思想应从初中阶段逐步进行渗透。

研究练习题 1 – 3

1. 有 20 个互不相等的正整数，它们都不大于 70. 求证：这些正整数两两（以大减小）的差值中，至少有四个是相等的。

2. 任取 2003 个互不相同的正数。求证：总能将其中的 2002 个正数分成两组，每一组都有 1001 个数，再将剩下的那个正数分成两个较小的正数，分别添加到这两个组中（每组一个），使得添加新数后的这两组中的 1002 个正数的总和相等。

3. 找出所有由四个实数组成的数组，使得组中每一个数都是该组中另外两数的乘积。

§1.4　整体思想解题例谈

整体与局部是对立统一的。一般情况下，为了弄清整体，常把整体分为有限个部分，如果对每个部分都弄清楚了，就便于综合概括得出整体的性质，使问题得以解决。然而，有些问题，有些时候，局部情况相当复杂，如果盲目进入局部探索，往往会陷入五里雾中。此时，如果能从整体上把握方向，常会找到问题的简明

解法。所谓整体思想就是从问题的整体性质出发，发现问题及整体的结构特性，从而导出局部结构和元素的特性。就好像进入林海中需要望北斗、看年轮（或带上指南针）掌握方向一样，整体思想是帮我们解题的重要思想之一。

例1. 将1,2,3,4,5,6,7,8,9这九个数码各用一次，可排列出许多不同的九位的自然数。问：在所有可能排列出的九位的自然数中，有多少个是质数？

分析 用1,2,3,4,5,6,7,8,9排成的九位自然数，只有有限多个，每一个逐个判定是否为质数，原则上没有困难，但工作量巨大，费力费时。数学家*M*·阿蒂亚告诉我们："实际上，数学是一门艺术，是一门通过发展概念和技巧以使人们更为轻快地前进，从而避免靠蛮力计算的艺术。"如何艺术地避开蛮力计算呢？我们转向考察用1,2,3,4,5,6,7,8,9这九个数码排成的九位自然数的整体性质。易知这九个数码之和等于45，而$9|45$，所以排成的九位自然数必是9的倍数，因此是个合数。所以将1,2,3,4,5,6,7,8,9这九个数码各用一次，所有可能排列出的九位的自然数都是合数，其中质数的个数为0.

（解略）

例2. 1024名乒乓球选手，用淘汰制争夺单打冠军。问：应进行多少场比赛？为什么？

解法1 因每两人比赛一场，第一轮要比赛$\frac{1024}{2}$场，第二轮要比赛$\frac{1024}{2^2}$场，第3、4、5、6、7、8、9轮分别要比赛$\frac{1024}{2^3}$，$\frac{1024}{2^4}$，$\frac{1024}{2^5}$，$\frac{1024}{2^6}$，$\frac{1024}{2^7}$，$\frac{1024}{2^8}$，$\frac{1024}{2^9}$场，第10轮比赛$\frac{1024}{2^{10}}=1$场，最终决出冠军。

可见，共应比赛

$$\frac{1024}{2}+\frac{1024}{2^2}+\frac{1024}{2^3}+\frac{1024}{2^4}+\frac{1024}{2^5}+\frac{1024}{2^6}+\frac{1024}{2^7}+\frac{1024}{2^8}+\frac{1024}{2^9}+$$

$\frac{1024}{2^{10}}=512+256+128+64+32+16+8+4+2+1=1023$(场).

解法 2　从整体思想考虑,即从淘汰制看,每场比赛总要淘汰一名选手,现在 1024 名选手中要决出冠军,需淘汰 1023 名选手,因此需要进行 1023 场比赛。

上面两种解法比较,显然,解法 2 简洁明快,美不胜收。从中可以品味到应用整体思想解题的特点。

例 3.　甲、乙二人从相距 20 千米的两地同时出发相向而行。甲的速度为 6 千米/时,乙的速度为 4 千米/时。一只小狗与甲同时出发向乙奔去,遇到乙后立即调头向甲跑去,遇到甲后又立即调过头来向乙跑去,……,直到甲、乙二人相遇为止。若小狗的速度是 13 千米/时,在这一奔跑过程中,小狗的总行程是多少千米?

分析　如果从小狗各段跑的时间和距离去计算,每个部分都很复杂,最后还要求一个无穷递缩等比数列的和。这对中学生是难于处理的。究其原因,就在于一开始我们的思路就被小狗牵着鼻子走,盲目地闯入了"小狗的总行程等于各部分行程的和"的思路中。如果我们跳出来站在旁观者的位置纵览全局,就会看到,小狗与甲、乙同时起步,往返于二人之间,直到二人相遇为止。这时小狗跑的总时间就是甲、乙二人从出发到相遇所用的时间 $\frac{20}{6+4}=2$(小时),从而可迅速得到小狗奔跑的总路程为 $13\times2=26$(千米).

用整体思想帮我们解题,真是妙趣横生!

(解略).

例 4.　已知一个 4×4 的数表

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 & -4 \\ 5 & 6 & -7 & -8 \\ 9 & -10 & -11 & 12 \\ 13 & -14 & 15 & -16 \end{bmatrix}$$

如果把它的任一行(横行)或一列(竖行)中的所有数同时变号,称作一次变换。试问能否经过有限次变换,使表中的数全变为正数?

分析 如果你想按行、列去实验,看能否碰到表中的数全变为正数的情况,这种实验的次数不可穷尽,因此实际行不通。这时你若站在局外纵览,就会发现每一次变换只改变表中一行(或列)中4个数的符号,但并不改变这4个数的乘积的符号。由此入手,问题易解。

解 因为每行、每列都是4个数。当每一次变换,只改变表中一行(或一列)中4个数的符号,并不改变这一行(列)中4个数乘积的符号,从而也不会改变表中16个数乘积的符号。但表中共有9个负数,所以表中16个数乘积的符号为负,于是无论作多少次操作变换,表中16个数的乘积总是负的。不会变为表中各数都为正数从而使乘积为正的状态。

例5. 41名运动员所穿运动服的号码是1,2,3,4,……,40,41这41个自然数。问:能否使这41名运动员站成一圈,使得任意相邻两个运动员的号码数之和都是质数?为什么?

分析 这个问题抽象成数学问题,是将1,2,3,4,5,6,……,40,41排成一圈,问能否使得任意相邻两个数之和都是质数。若能办到,请找出一种排法;若不能办到,请说明理由。显然,如果一个一个地排,希望凑出"任意相邻两个数之和都是质数",实际上是不可取的。这使我们想到应从整体上考虑问题,看一看如果存在题设的排法,所给的41个数整体上应具有什么性质?再分析题设条件是否满足这个性质。

解 假设这41名运动员排成一个圆圈后,可使任相邻两个运动员号码之和均是质数。因为相邻两个号码之和最小是$1+2=3$,不可能等于偶质数2。所以这些质数都应是奇数。因此,相邻两个运动员号码必须一奇一偶。于是这一圈排列的运动员号码必须奇偶相间。所以这一圈排列运动员的号码中奇号的个数

与偶号的个数必须相等。也就是运动员总数应是偶数个，与人数 41(奇数)矛盾！

所以将这 41 名运动员排成一圈，使得任意相邻两个运动员号码数之和都是质数的要求是不能办到的。

例 6.　在$\triangle ABC$内部有 2003 个点，使这 2003 个点和 A,B,C 三点有线段连接，可以将$\triangle ABC$分割成多少个不重叠的三角形？

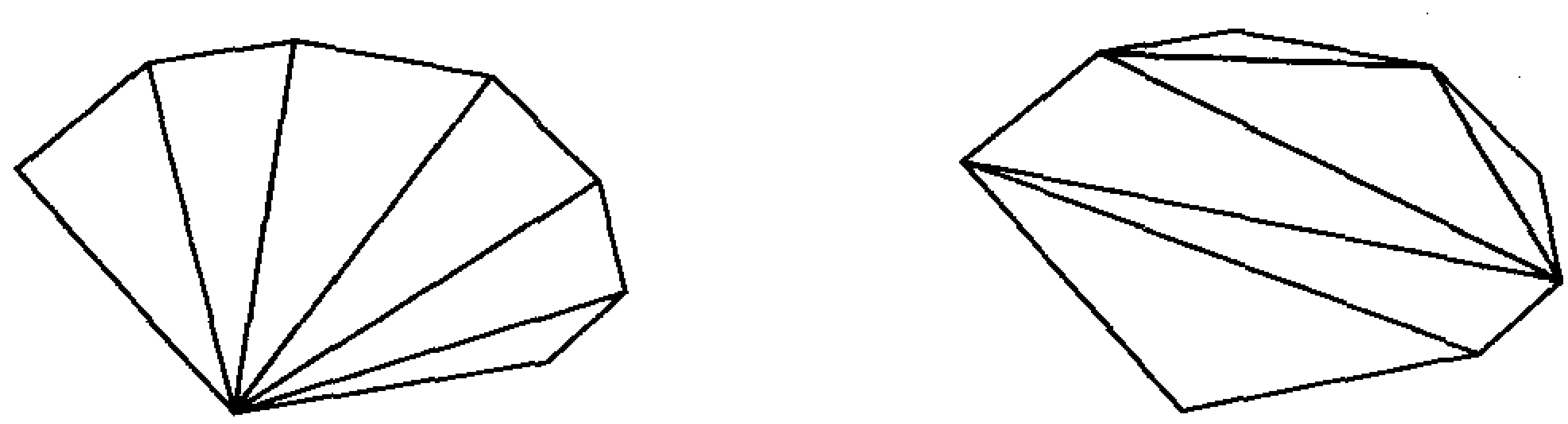
解　设这 2003 个点和 A,B,C 三点有线段连接，可以将$\triangle ABC$分割成 x 个不重叠的小三角形，则这些小三角形的内角和为 $x\times180°$. 另一方面$\triangle ABC$内，每个点周围成一个周角，再加上$\triangle ABC$的内角和，恰是这些小三角形的内角和，于是得

$$x\times180=360\times2003+180$$

解得 $x=4007$.

答　这 2003 个点和 A,B,C 三点有线段连接，可以将$\triangle ABC$分割成 $2\times2003+1=4007$ 个不重叠的三角形。

例 7.　可以利用凸 n 边形内不相交的对角线将这个凸 n 边形以不同的方法分成为三角形。如下图就是两种不同的分法。



(第 7 题图)

设分得的三角形的个数为 k，用来划分的对角线条数为 l，请你证明，k 与 l 都与分法无关。并确定 k 与 l 的值(用 n 表示).

分析　本题用画图实验办法可以猜想剖分得三角形数 $k=n-2$，用来剖分的对角线条数 $l=n-3$. 现在要证明这些值对任意分法都是一样的。即与分法无关。光靠实验很难奏效，我们从整体入手考虑研究。

证明　设 l 条在形内两两不交的对角线将凸 n 边形剖分为 k

个小三角形。则这 k 个三角形内角的总和恰等于凸 n 边形的内角和，

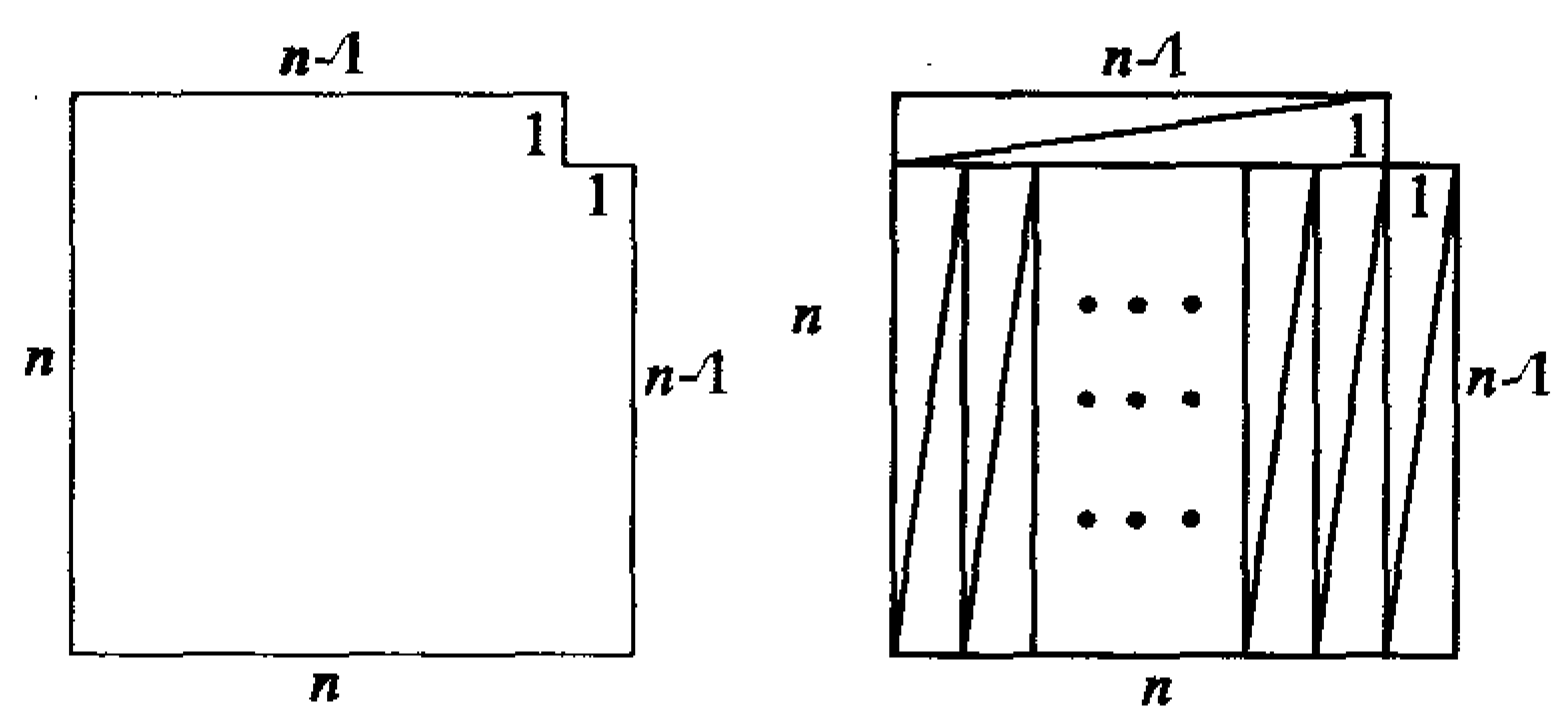
即 $lk \cdot 180° = (n-2) \cdot 180°$，所以 $k = n-2$.

这 $n-2$ 个三角形共有 $3(n-2)$ 条边。这些边由 l 条对角线与凸 n 边形的边所构成，其中 l 条对角线每一条都用了 2 次，凸 n 边形的每条边各用了 1 次。所以

$3(n-2) = 2l + n$，即 $l = n-3$.

由此可见，用凸 n 边形内不相交的对角线将这个凸 n 边形剖分为三角形，不管如何分划，都分得 $n-2$ 个三角形，用来划分的对角线是 $n-3$ 条。

例 8. 如图，设 n 是大于 1 的自然数，从 $n \times n$ 的正方形的一个角上剪去一个 1×1 的小方块，形成一个"缺角正方形"。若将这个"缺角正方形"分成 k 个面积都相等的三角形，试求 k 的最小值。



（第 8 题图）

解 如果一个个实验去分，很难讲清道理。如果从整体观察，图中有折线段 ABC，在同折线 ABC 有公共点的那些等积的小三角形中，必有一个三角形的一边是 AB（或 BC）的一部分，这条边的长度不大于 1. 而这条边上的小三角形的高线不大于 $n-1$，所以该三角形的面积不超过 $\frac{n-1}{2}$. 另一方面，这个小三角形的面积是"缺角正方形"面积 k 等份中的一份，等于 $\frac{n^2-1}{k}$，而 $\frac{n^2-1}{k} \leqslant \frac{n-1}{2}$，即 $2n^2-2 \leqslant kn-k$，或 $2(n+1)(n-1) \leqslant k(n-1)$，解得. $k \geqslant 2n+2$.

可见,k 的最小值可能是 $2n+2$. 由右上图所示,$k=2n+2$ 是可以达到的。将 AB 为宽长为 $n-1$ 的小矩形,BC 为宽长为 $n-1$ 的小矩形都用它的一条对角线分为两个面积为$\frac{n-1}{2}$的三角形。再将边长为 $n-1$ 的正方形分为长为 $n-1$ 宽为 1 的 $n-1$ 个矩形,每个矩形再以对角线分为 2 个面积为$\frac{n-1}{2}$的三角形。这样一来,这个“缺角正方形”可以分成 $2n+2$ 个面积都等于$\frac{n-1}{2}$的小三角形。所以 k 的最小值等于 $2n+2$.

例 9.　证明,不存在具有奇数个面,每个面都有奇数条边的多面体。

分析　如果一个个多面体去实验,很难得到结论。最好的办法是考察多面体的各面的边数之和及其奇偶性。具体证法如下:

证明　设多面体有 n 个面,每个面有 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n$,条边,

记 $S=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$.

如果 n 及 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n$ 都是奇数,则 S 是奇数个奇数之和,因而是个奇数。但是多面体的每条棱都是多面体两个相邻面上多边形的公共边,因此,它是多面体中总棱数的两倍,是个偶数。上述两件事产生矛盾,所以不可能存在题设条件的的多面体。

通过上述各例,我们看到,从整体上考察事物的数量性质,使我们摆脱了对局部细节中的难以弄清的数量关系的纠缠。反而使眼界更加开阔,洞察力更为深刻,能起到出奇制胜一举解决问题的作用。其表现形式是对整体上不变性质、不变数量等特性的把握。整体思想对数学解题思路很有帮助。在数学上有着广泛的用途,我们应当努力掌握它!

研究练习题 1－4

1. 解方程$|x-5|+|x-6|+20=0$.

2. 将 11 个齿轮放在同一个平面上，使第一个齿轮紧衔住第二个齿轮，第二个紧衔住第三个，……，最后第 11 个又紧衔住第一个。安装固定之后，组成一个齿轮传动系统。问这个齿轮传动系统的齿轮能够转动吗？

3. 若干个同样的盒子排成一排，小明把 50 多个同样的棋子分放在盒中，其中只有一个盒子没有装棋子。然后，他外出了。小光从每个有棋子的盒子里各拿出一枚棋子放在空盒里，再把盒子重新排了一下。小明回来仔细查看了一番，没有发现有人动过这些盒子和棋子。问共有多少个盒子？

§1.5　极端性原理解题例谈

极端性原理是个简单而且极为重要的思考问题的方法原则。为了理解这个原理，我们从一个简单例子谈起。

例 1.　在容器中放有 70 个球。其中有 20 个红球、20 个绿球、20 个黄球、其余的是黑球和白球。各色球只有颜色不同。我们现在在黑暗中取球，使得它们之中某一种颜色的球不少于 10 个，问必须至少取多少个球？

解　满足题目要求，也就是“某一种颜色的球不少于 10 个”的球只能产生于红、绿、黄三种颜色的球之中。我们考虑最坏的情况：即所取的球中有黑色、白色的球 10 个，9 个红色球、9 个绿色球和 9 个黄色球，共计 37 个球。只要我们再取一个球，此球必为红、绿、黄三色之一的球，故必有一种颜色的球不少于 10 个。由此可知，我们至少取 38 个球才能保证取的球中“某一种颜色的球不少于 10 个。”

例 1 解法中的独到之处在于“考虑最坏的情况”。也就是考虑“极端的”、“临界的”状态。这种通过考察极端性的元素的状态来实现解题的思想，我们通称为“极端性原理”，这一原理在数学中的表现形式的主要依据是：

1. 设 N 是正整数集，M 是 N 的一个非空子集，则 M 中必有最小数。

2. 设 R 是实数集，M 是 R 的**有限非空子集**，则 M 中必有最小数，也必有最大数。

例 2. 在一次乒乓球循环赛中，$n(n\geqslant 3)$ 名选手中没有全胜的。证明：一定可以找到三名选手 A,B,C，有 A 胜 B，B 胜 C，C 胜 A.

证明 考虑胜的最多的选手（**考虑极端！**），设为 A. 由于没有全胜选手，所以 A 未全胜。即至少存在选手 C，有 C 胜 A.

另外，在被 A 打败的选手中一定存在某个 B 是胜 C 的，如若不然，会出现被 A 打败的选手也都是被 C 打败的选手，但 C 又胜 A，则被 C 所打败的选手数将大于被 A 打败的选手数，这与 A 是胜的最多的选手的假设矛盾。

所以，一定可以找到三名选手 A,B,C，有 A 胜 B，B 胜 C，C 胜 A.

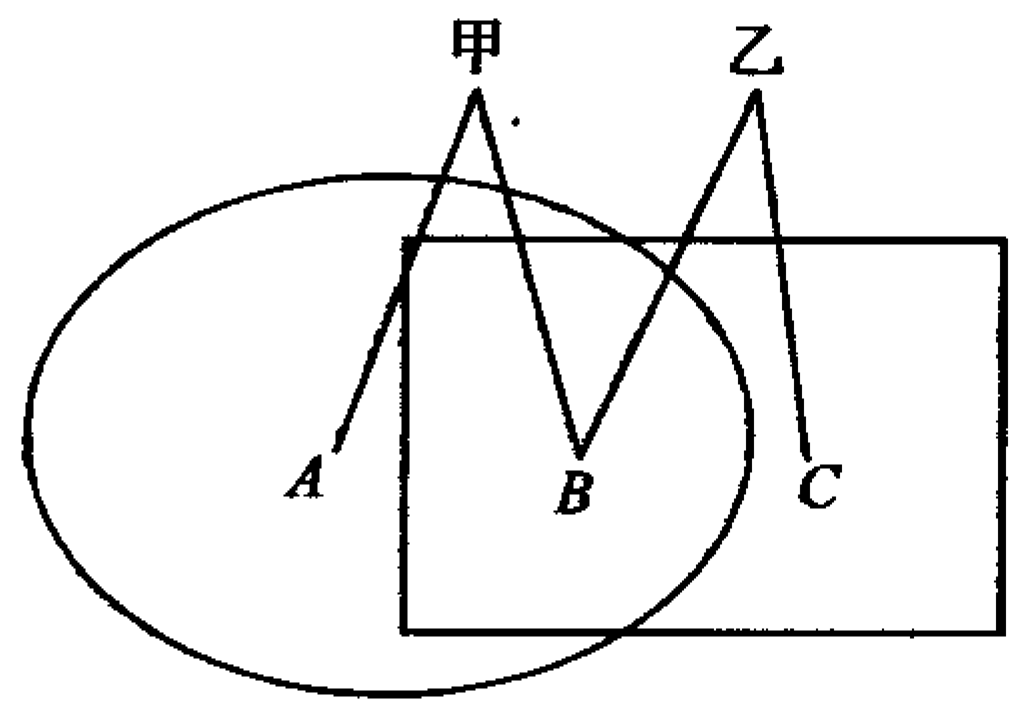
例 2 的解法关键是抓住了“胜的最多的选手”，利用这一点，解决了我们“无从着手”的难处，使解题简洁明快！

在“证明有一个 x 它具有性质”类型的涉及状态存在性的问题时，从“考察极端”入手的极端性原理是非常重要的思考途径。

例 3. 某校学生中，没有一个学生读过学校图书馆的所有图书。又知道图书馆内任何两本书至少被一个同学读过。证明：一定能找到两个学生甲、乙和三本书 A、B、C，使得甲读过 A、B 没读过 C，而乙读过 B、C 没读过 A.

解 注意两个条件：①没有一个学生读过学校图书馆的所有

图书；②任何两本书都至少被一个同学读过。

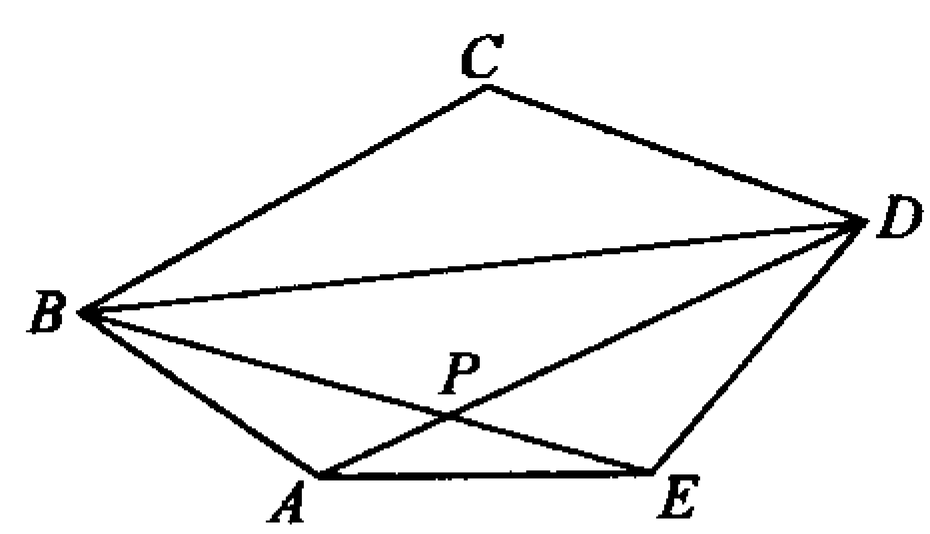


（第 3 题图）

第一步，取读书**最多的**一位学生设为甲（**考虑极端!**）。由条件①，甲没读过图书馆中的所有的图书。因此，至少有一本书 C 甲没读过。在被甲读过的书中任取一本为 B，根据②，B,C 至少被一位学生读过。不妨设读过 B,C 的学生是乙。易知乙≠甲（因甲未读过 C）。

第二步，可以断言，甲读过的所有书中一定有乙未读过的书（否则，甲读过的书乙都读过，而乙比甲还多读一本书 C，这与甲是读书最多的一个学生的假设相矛盾）。为确定起见，设 A 是甲读过的书中乙未读过的。这样一来，我们就找到了甲、乙两个学生和 A,B,C 三本书，满足甲读过 A、B 没有读过 C，乙读过 B、C 没有读过 A。

例 4. 证明：任意凸五边形中都能找到三条对角线，由这三条对角线为边可以构成一个三角形。



（第 4 题图）

证明 在凸五边形 $ABCDE$ 的五条对角线中存在最长的对角线设为 BD（**考虑极端!**），又设对角线 BE,DA 相交于点 P.

显然 $BP<BE,DP<AD$. 有 $BD<BP+DP<AD+BE$，因此 BD,BE,AD 三条对角线为边可以构成一个三角形。

例 5. 设 S 为平面上的一个有限点集（点数 $\geqslant 5$）。其中若干个点涂上红色，其余的点涂上蓝色。设任何三个或三个以上同色的点不共线。求证：存在一个三角形，使得

（1）它的三个顶点涂有相同的颜色；

(2)这三角形至少有一条边上不包含另一种颜色的点。

证明 对于 S 中任意 5 个点,涂有红色或蓝色,由抽屉原则,必有三点同色。而这三点不共线,所以存在三顶点同色的三角形。(1)得证。

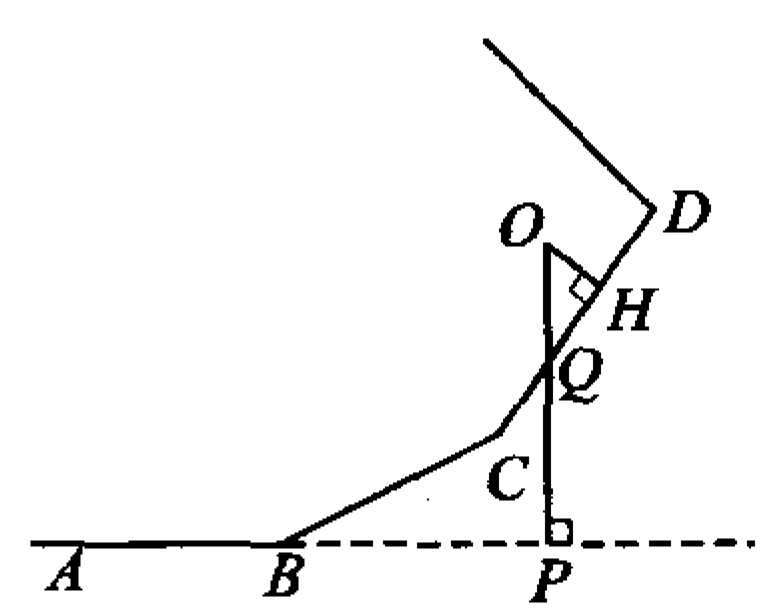
三顶点同色的三角形个数是有限个。其中必有面积最小的一个(**考虑极端!**),设为 $\triangle ABC$. 则 $\triangle ABC$ 中至少有一条边上不包含另一种颜色的点。如若不然,$\triangle ABC$ 的每条边上都有一个另一种颜色的点,则这三个另一种颜色的点又组成一个面积比 $\triangle ABC$ 更小的三角形,这与 $\triangle ABC$"面积最小性"的选择相矛盾。结论(2)得证。

例 6. 由凸多边形内一点向多边形各边引垂线,则至少有一个垂足是落在凸多边形的边上而不是落在边的延长线上。

分析 这个命题告诉我们这些垂足不可能全落在边的延长线上。即至少有一个垂足是落在凸多边形的边上。对垂足落在边上的情形,我们还是从极端状态中去寻找。

证明 设 O 是凸 n 多边形内的已知点,自 O 点向 n 边形的各边引垂线,由 O 点到各边的距离中一定存在一个最小距离(**考察极端!**). 不妨设点 O 到边 AB 所在的直线的距离是这个最小距离。我们证明点 O 到边 AB 的垂足 P 一定落在边 AB 上。

假定垂足 P 不在边 AB 上而是在边 AB 的延长线上(如图),则 OP 必交多边形的另一边 CD 于点 Q(此由多边形的凸性保证)。显然 $OQ < OP$,而点 O 到边 CD 的距离 $OH < OQ < OP$. 这与 OP 是 O 点到多边形各边的最小距离的假设矛盾。因此 P 在边 AB 的延长线上的假设不能成立,所以得证垂足 P 一定落在边 AB 上。



(第 5 题图)

例 7. 证明:在正整数范围内,方程 $8x^4+4y^4+2z^4=t^4$ 无解。

证明 假设原方程有正整数解,我们取所有的解中使得 x 最

小的一组解(**考察极端!**)不妨设 $x=m,y=n,z=p,t=r$. 那么,由观察可知 r 是偶数,故可设 $r=2r_1$,代入原方程得:$8m^4+4n^4+2p^4=16r_1^4$.

两边同除以 2 得: $4m^4+2n^4+p^4=8r_1^4$……①

显然 p 为偶数,设 $p=2p_1$,代入方程①得到

$$4m^4+2n^4+16p_1^4=8r_1^4$$

两边再除以 2 得 $2m^4+n^4+8p_1^4=4r_1^4$……②

同理 n 为偶数,设 $n=2n_1$,代入方程②且方程两边同除以 2 得到:

$$m^4+8n_1^4+4p_1^4=2r_1^4 \cdots\cdots ③$$

易知 m 是偶数,再令 $m=2m_1$ 代入③后可得

$$8m_1^4+4n_1^4+2p_1^4=r_1^4.$$

由此我们得到原方程的又一组正整数解:$x=m_1,y=n_1,z=p_1,t=r_1$,且 $m_1<m$. 这与 m,n,p,r 为使 x 能取得最小值的那一组解的假设矛盾。

综上可得,方程 $8x^4+4y^4+2z^4=t^4$在正整数范围内无解。

例 8. 凸五边形 $ABCDE$ 的边与对角线都不平行。延长一边 AB 与一对角线相交于某点,就在 AB 边上画一个指向交点的箭头。用这种办法在五条边上都画上箭头。求证:在五边形的五个顶点 A、B、C、D、E 中,必有一个顶点是两个箭头所指向的点。

证明 在以五边形的五个顶点为顶点的五个三角形 ABC,BCD,CDE,DEA,EAB 中,必有一个面积最小的三角形(**考察极端!**),不妨设三角形 ABC 就是面积最小的那个三角形。

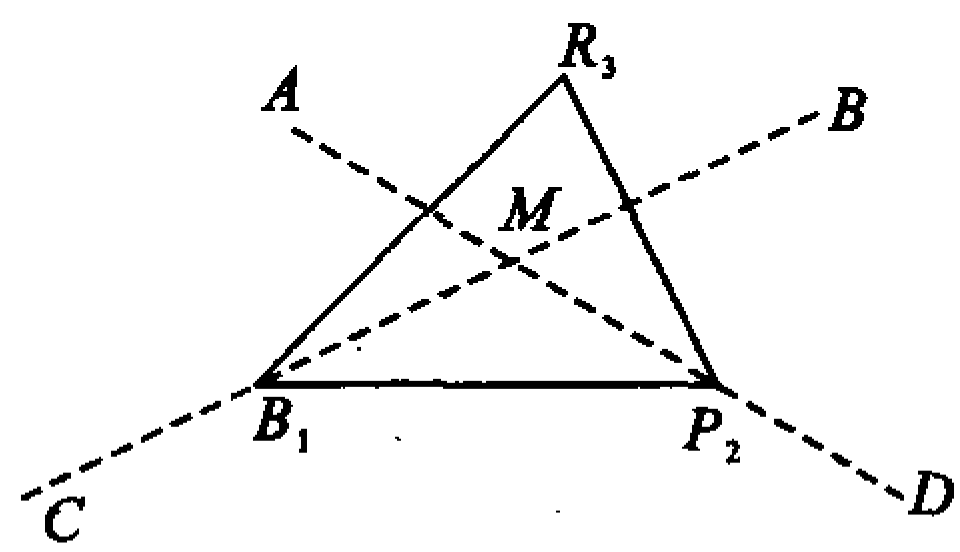
因为 AD 与 BC 不平行,$\triangle ABC$ 与 $\triangle BCD$ 的面积不等。设 $AK\perp BC$ 于 K,$DL\perp BC$ 于 L.

由 $S_{ABC}<S_{BCD}$得 $AK<DL$,所以 DA,CB 交于 CB 边的延长线上,由此 CB 边上的箭头指向顶点 B.

同理由 AB 与 EC 不平行,可证 EC,AB 交于 AB 边的延长线上,由此 AB 边上的箭头也指向顶点 B. 即顶点 B 就是两个箭头所指向的点。

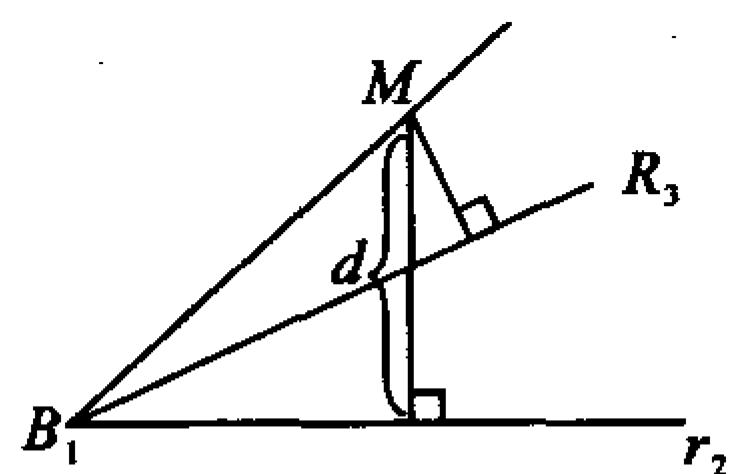
例9. 将红色三角形纸片 $R_1R_2R_3$，蓝色三角形纸片 $B_1B_2B_3$，黄色三角形纸片 $Y_1Y_2Y_3$叠放在一起。一根针在 M 处恰扎穿这三张纸片。

求证：可以从红、蓝、黄三个三角形中各取一个顶点，组成不同颜色顶点的三角形 $R_iB_jY_k$（其中 i,j,k 取值为 $1,2,3$），使得 M 点在三角形 $R_iB_jY_k$的内部或边界上。



（第9题图）

证明 将异色点两两连成线段。由于端点为异色的线段只有有限条，取点 M 到这些端点为异色的线段的非0距离，其中必有一个最小非0距离设为 d（考察极端！）不妨设 M 点到线段 B_1Y_2的距离为最小非0距离 d. 连接 B_1M，Y_2M（如图）。显然，红点 R_1,R_2,R_3，不能全分布在直线 B_1Y_2下方，否则 $\triangle R_1R_2R_3$ 将盖不住点 M. 因此 R_1,R_2,R_3中至少有一点在直线 B_1Y_2 的上方，不妨设红点 R_3 在 B_1Y_2 的上方。若 R_3 在 $\angle MB_1Y_2$ 内部，则点 M 到 B_1R_3 的距离小于 d（如右图），此与 d 为最小非0距离的假设矛盾。故 R_3 不能在 $\angle MB_1Y_2$ 内部。同理可证 R_3 不能在 $\angle MY_2B_1$ 内部，因此，R_3 只能在 $\triangle AMB$ 的内部或边界上。



（第9题图）

连接 R_3B_1，R_3Y_2，点 M 在 $\triangle B_1Y_2R_3$ 的内部或边界上。

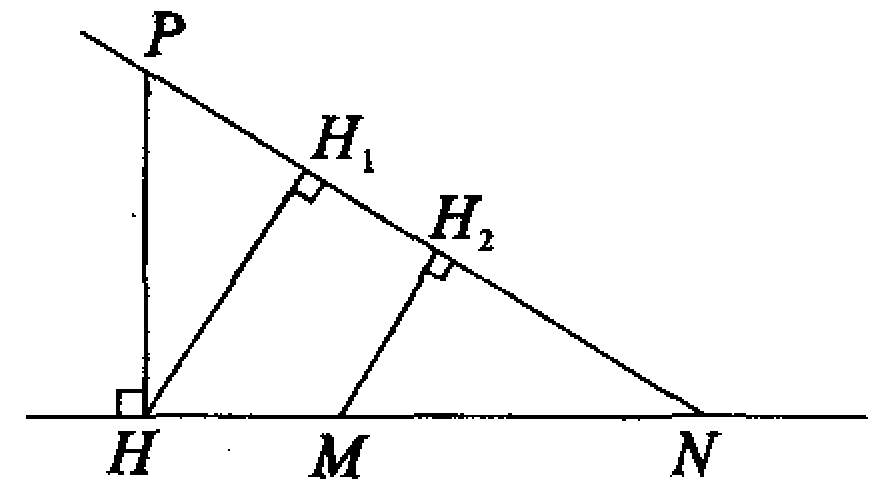
说明 本题还可以从点 M 对不同颜色的两个顶点的所有视角中，存在最大视角的思路去思考。

极端性原理之所以被人们所重视，与下面的问题是分不开的。

例10. 给定平面上不全在一条直线上的 n 个点，则必有一条直线恰好通过这 n 个点中的两个点。

这个问题是英国著名数学家西勒维斯特（*Sylvester*1814—

1897)提出的一个颇具趣味的几何题。该问题看似简单,但西勒维斯特生前却没能解决它。尔后不少数学家也曾试图给以证明,但也没有成功。这种状况持续了50年之久。后来,出人意料地被一个“无名氏”解决了。因为当时《美国科学新闻》等杂志披露证法时都没有提及提供解答人的姓名。原来证明是这样的简单,简直绝妙无比!



(第10题图)

证明 设平面上有不全共线的 n 个点,两两连接这些点,可以引得 $m(m>1)$ 条彼此不同的直线。因为 n 和 m 都是正整数,所以从这 n 个点的每一点到这 m 条直线的非0距离的总数也是有限个。在这有限个非0距离中,必有一个最小值(**考察极端!**),不妨设点 P 到直线 l 的距离是这个最小距离。我们证明直线 l 就是恰好通过 n 个点中的某两个点的直线。

如图所示,设 PH 是 P 到直线 l 的距离(即最小距离)。如果在直线 l 上有三个或更多的 n 点组中的点,则至少有两个点落在垂足 H 的同侧,不妨设这两个点是 M 和 N,它们在直线 l 上点 H 的同侧且 $HM<HN$. 作直线 PN,则直线 PN 也是通过 n 点组中两个点的一条直线,因此它是我们上述的 m 条直线中的一条。过 H,M 两点分别作直线 PN 的垂线,垂足为 H_1 和 H_2,则有 $MH_2<HH_1<PH$,这与 PH 是 n 个点到各相应直线的最小非0距离的假设相矛盾。所以直线 l 上不能通过 n 点组中三个或更多的点。但 l 是通过 n 点组中某两点的直线,所以直线 l 上恰有 n 点组中的两个点。

例11. 证明:$\sqrt{2}$是无理数。

证明 假设$\sqrt{2}$不是无理数,则应是有理数。即存在正整数 x,y,使得$\sqrt{2}=\dfrac{x}{y}$.

也就是正整数 x,y 满足方程 $x^2=2y^2$……①

方程①若有正整数解，则这些解中依 x 的值考虑，必存在 x 的值取值最小的一组（考察极端！），不妨设这一组解是 $x=m,y=n$. 代入①得 $m^2=2n^2$. 显然 m 应是偶数，令 $m=2m_1$，因此 $4m_2{}^1=2n^2$，即 $n^2=2m_1^2$. 这表明 $x=n,y=m_1$ 也是方程 $x^2=2y^2$ 的一组正整数解。然而 $m>n$，这与 $x=m,y=n$ 是 x 取值最小的一组解的假设相矛盾。因此，方程 $x^2=2y^2$ 无正整数解，即$\sqrt{2}$是无理数。

例 12.　正整数 a 与 b 使得 $ab+1$ 整除 a^2+b^2，求证$\dfrac{a^2+b^2}{ab+1}$是某个整数的平方。

这是第 29 届 *IMO* 第 6 题，下面是一个保加利亚学生给出的获特别奖的解法。

证明　令$\dfrac{a^2+b^2}{ab+1}=k$，用反证法，设 k 不是完全平方数。我们讨论不定方程

$$a^2-kab+b^2=k \quad (1)$$

显然，这个不定方程的解 (a,b)，不会有 $ab<0$. 因为若 $ab<0$，a 与 b 是整数，则 $-ab>0\Rightarrow -ab\geqslant 1\Rightarrow -kab\geqslant k\Rightarrow a^2-kab+b^2>k$，与(1)矛盾。

设 (a,b) 是(1)的解中适合 $a>0,b>0$ 且使 $a+b$ **最小的那组解**，不妨设 $a\geqslant b$. 固定 k 与 b，把(1)看成关于 a 的一元二次方程，它有一个根为 a，另一个根为 a'，由根与系数的关系可得：

$$\begin{cases} a+a'=kb & (2) \\ aa'=b^2-k & (3) \end{cases}$$

由(2)知 a'为整数，由(3)知 $a'\neq 0$。否则将有 $k=b^2$ 为完全平方数，与题设不合。由 $a>0$，故 $a'>0$. 这时有

$$a'=\frac{b^2-k}{a}\leqslant\frac{b^2-1}{a}\leqslant\frac{a^2-k}{a}\leqslant a,$$

这时 (a',b) 为(1)的解，$a'>0,b>0$ 但有 $a'+b<a+b$，这与 (a,b) 是**使** $a+b$ **最小的那组解**的选法矛盾。所以 k 必是完全平方数。

即

$\frac{a^2+b^2}{ab+1}$是某个整数的平方。

研究练习题 1－5

1. 平面上任给 n 个点，一定可以通过其中两个点画一个圆，使得其余 $n-2$ 个点都在圆外。

2. 证明：在任意四面体中都存在一个顶点，由这个顶点引出的三条棱恰可构成一个三角形的三条边。

3. 证明：不存在四个正整数 x,y,z,u，它们满足方程

$$x^2+y^2=3(z^2+u^2).$$

4. 平面上给定 997 个点，将连接每两点的线段的中点染成红色。证明：至少有 1991 个红点。问能否找到恰有 1991 个红点的点集？

第 2 章　解题方法与逻辑

§2.1　分类讨论漫谈

将一个复杂的问题分解为有限个数的部分问题去考虑，对每个部分问题逐一加以解决之后，则整个问题即可得解，这种解决问题的方法常常称为分情况说理或称分类讨论。

在形式逻辑中，分类是揭示概念外延的一种逻辑方法。分类，一要有分类标准，二要既不遗漏又不重复。比如对全体正整数，按能否被 2 整除为标准可以分为奇数与偶数两大类；按约数的个数可以划分为单位 1(1 个正约数)、质数(2 个正约数)、合数(正约数的个数$\geqslant 3$)三类。对三角形的问题可以分为直角三角形、锐角三角形和钝角三角形三类进行讨论；对实数的问题有时按正数、负数与 0 三类进行研究；有时按有理数与无理数两大类数进行分析。这些都是在中学数学中常见的分类讨论的例子。有人说，不会正确分类就不可能学好数学，这是非常有道理的。分类思想常在初中数学竞赛中应用。我们重点学习分类讨论或分情况说理在求解数学题中的应用。

例 1.　商店的糖果有 3 千克及 5 千克两种包装，货源充足保证供应。求证；凡购买 8 千克和 8 千克以上的整数千克的糖果，售货员都不需要拆包就可支付。

分析　这个问题转化为纯数学问题就是对自然数 $N\geqslant 8$，一定存在非负整数 m,n，使得 $N=3m+5n$ 成立。

证明　对 $N\geqslant 8$，按被 3 除的余数分类讨论：

(1)　$N=3k(k\geqslant 3)$，这时给顾客 k 包 3 千克的糖果即可。

(2) $N=3k+1(k\geqslant 3)$,因为 $3k+1=3(k-3)+2\times 5$,所以给顾客 $k-3$ 包3千克包装的糖果及2包5千克包装的糖果即可。

(3) $N=3k-1(k\geqslant 3)$,因为 $3k-1=3(k-2)+1\times 5$,所以交付顾客 $k-2$ 包3千克包装的糖果及一包5千克包装的糖果即可。

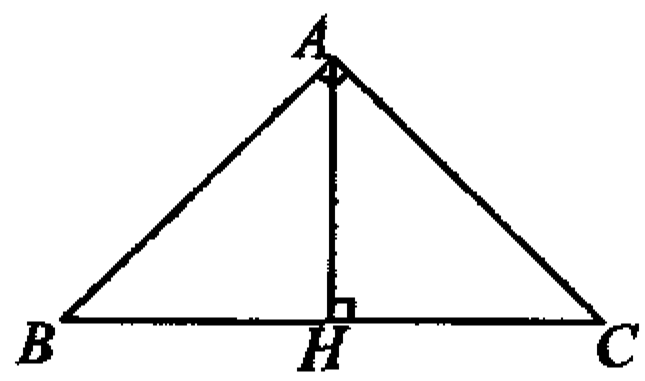
综上讨论表明,对任意购买不小于8千克的整数千克的糖果,都可以用3千克及5千克的包装不用拆包即可完成支付。

例2. 已知$\triangle ABC$为等腰三角形,由顶点A所引BC边的高线恰等于BC边长的一半。试求$\angle BAC$的值.(要求画出图形)

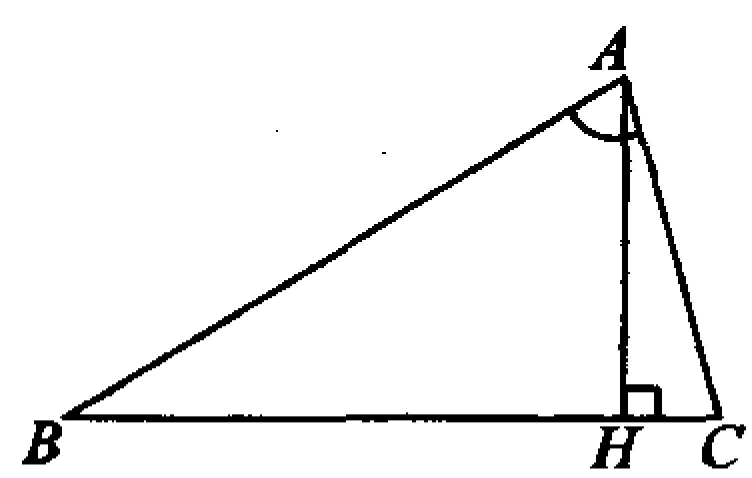
分析 $\triangle ABC$为等腰三角形,但哪个是底边哪个是腰并没指明,因此要按BC为腰或底边两大类进行讨论。

解 (1) 若BC为等腰$\triangle ABC$的底边,则高AH平分BC. $\triangle AHB$与$\triangle AHC$都是等腰三角形,所以$\angle BAC=90°$.(图1)

(2) 若BC为等腰$\triangle ABC$的一个腰,又可按顶角$\angle ABC$分三种情况讨论:



(图1)



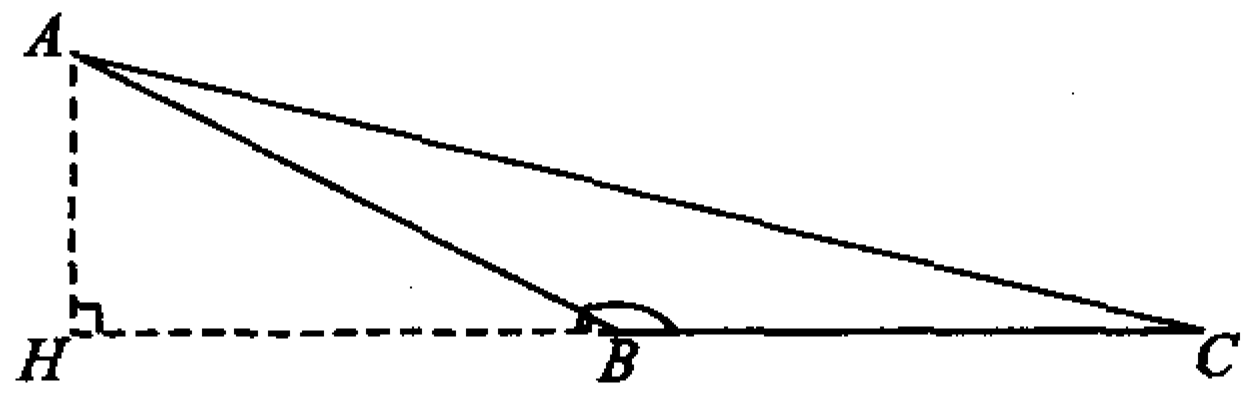
(图2)

①若顶角$\angle ABC$为锐角(图2),由$AH=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}AB$,得$\angle B=30°$,所以$\angle BAC=\frac{1}{2}(180°-150°)=15°$.

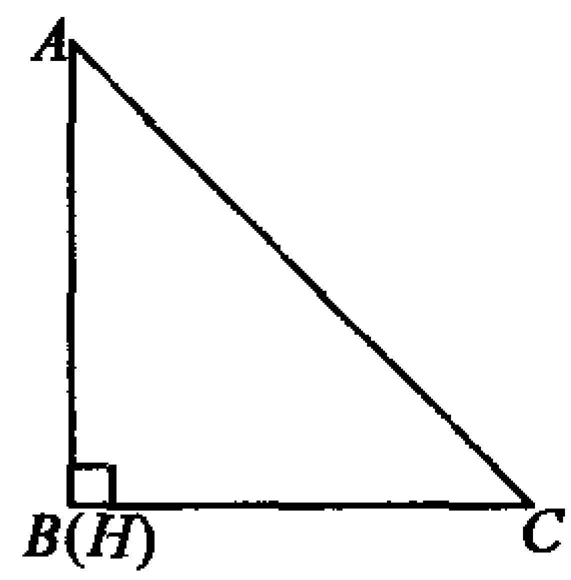
②若顶角$\angle ABC$为钝角(图3),由$AH=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}AB$,则$\angle ABH=30°$,所以$\angle ABC=150°$,$\angle BAC=\frac{1}{2}(180°-150°)=15$.

③若顶角$\angle ABC$为直角(图4),此时$AB=BC=AH$与$AH=\frac{1}{2}BC$矛盾。所以此种条件的三角形不存在。

综合上述讨论知,$\angle BAC$的度数可以是$90°$,$75°$或$15°$三个



(图3)



(图4)

值。

说明 例2中对 BC 为底边或 BC 为腰的分类是第一级分类，在 BC 为腰的情况下，又依顶角 $\angle ABC$ 为锐角、钝角、直角分类讨论，这叫第二级分类。有些问题为了讨论清楚，需要多级分类。要注意，每一级分类要遵循同一个分类标准，在每级分类对象范围内要遵循不重不漏的原则。

例3. 一个两位数除以它的反序数所得的商数恰等于余数，试求这个两位数。

解 设这个数为 $a=10x+y$，则其反序数为 $10y+x$，于是依题意有

$$10x+y=(10y+x)q+q,$$

其中 q 为正整数。或者

$$(10-q)x-(10q-1)y=q. \qquad (*)$$

下面就 q 可取值的情况分别进行讨论。

①当 $q=1$ 时，$(*)$式为 $9(x-y)=1$，这不可能成立。

②当 $q=2$ 时，$(*)$式为 $8x-19y=2$，

由此得出 y 是偶数. $x=\dfrac{2+19y}{8}$

(a)当 $y=2$ 时，得出 $x=5$；

(b)当 $y=4$ 时，得出 $x=\dfrac{41}{4}$，不是整数；

(c)当 $y=6$ 时，$x=\dfrac{29}{2}$不是整数；

(d)当 $y=8$ 时,$x=\frac{77}{4}$,不是整数。

所以,当 $q=2$ 时,我们只有解 $a=52$.

③当 $q=3$ 时,(*)式变为 $7x-29y=3$,当 $y\leqslant2$ 时,得出 x 是分数

而当 $y\geqslant3$ 时,解得 $x>10$,也就是在这种情况下无解。

④当 $q=4$ 时,(*)式变为 $6x-39y=4$,因右端的 4 不能被 3 整除,所以无解。

⑤当 $q\geqslant5$ 时,则有 $5x\geqslant(10-q)x=(10q-1)y+q\geqslant49+q\geqslant54$. 由此得 $x\geqslant11$,不可能有解。

综观上述分情况的论证讨论,可得所求的两位数等于 52.

例 4. $\triangle ABC$ 中,D 是 BC 边上一点,$\triangle ABD$ 与 $\triangle ACD$ 的三个内角分别对应相等,试确定 $\triangle ABC$ 的形状。

解 由于 $\triangle ABD$ 与 $\triangle ACD$ 的角分别对应相等,有不止一种的对应相等的方式,所以要分情况讨论。

但由三角形外角定理,

$\angle ACD>\angle ABC$, $\angle ADC>\angle BAD$,

所以只能 $\angle ADC=\angle ADB$,

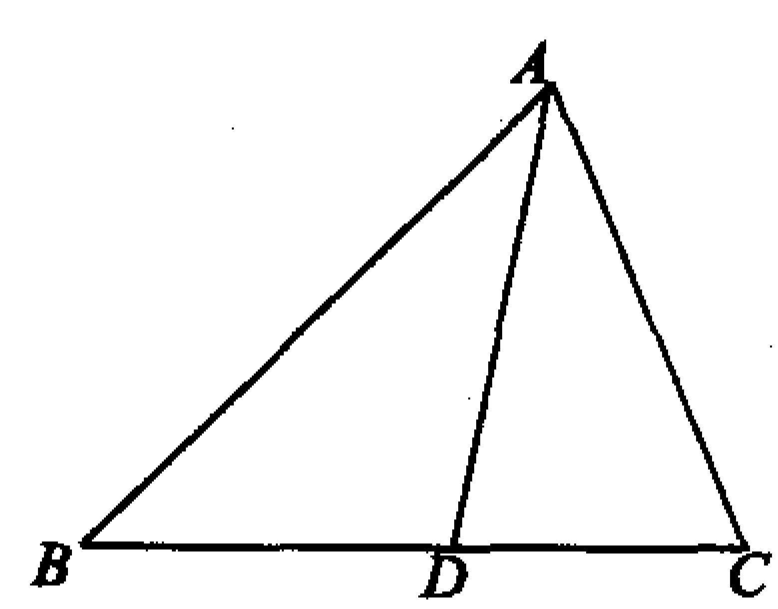
但 $\angle ADC+\angle ADB=180°$

所以 $\angle ADC=\angle ADB=90°$.

剩下两对角对应相等只有两种可能:

①若 $\angle B=\angle C$,则 $\angle BAD=\angle CAD$,此时 $AB=AC$,$\triangle ABC$ 是等腰三角形。

$AD\perp BC$.



(图 5)

②若 $\angle B\neq\angle C$,因此 $\angle B=\angle CAD$,$\angle C=\angle BAD$. 相加得

$\angle B+\angle C=\angle CAD+\angle BAD=\angle BAC$,但

$\angle B+\angle C+\angle BAC=180°$,所以 $\angle BAC=90°$. 此时 $\triangle ABC$ 是直角三角形。

综上所述，$\triangle ABC$ 要么是等腰三角形，要么是直角三角形。

例 5.　若 x 与 y 都是正整数，试证 x^2+y+1 和 y^2+4x+3 的值不能同时都是完全平方数。

分析　要证“x^2+y+1 和 y^2+4x+3 的值不能同时都是完全平方数”。即要证，对任意 x,y 这两个代数式中至少有一个不是完全平方数即可。由于 x,y 都是各自独立变化的，所以我们要分 $x\geqslant y$ 与 $x<y$ 两种情况进行讨论。

证明　(1)当 $x\geqslant y$ 时，$x^2+y+1\leqslant x^2+x+1$，

于是　$x^2<x^2+y+1\leqslant x^2+x+1<x^2+2x+1=(x+1)^2$

这时 x^2+y+1 夹在相邻两个平方数之间，因此，它不可能是完全平方数。

(2)当 $x<y$ 时，

$$y^2<y^2+4x+3<y^2+4y+3<y^2+4y+4=(y+2)^2.$$

这时再分两种情况讨论之。

(a)若 $y^2+4x+3\neq y^2+2y+1=(y+1)^2$，即 $y\neq 2x+1$ 时，y^2+4x+3 不是完全平方数。

(b)若 $y=2x+1$ 时，即 $y^2+4x+3=(y+1)^2$，这时再看 x^2+y+1，有

$$(x+1)^2=x^2+2x+1<x^2+y+1<x^2+2x+1+3=x^2+2x+4=(x+2)^2$$

此时，x^2+y+1 不是完全平方数。

综上可得，对任意正整数 x 与 y，x^2+y+1 和 y^2+4x+3 的值不能同时都是完全平方数。

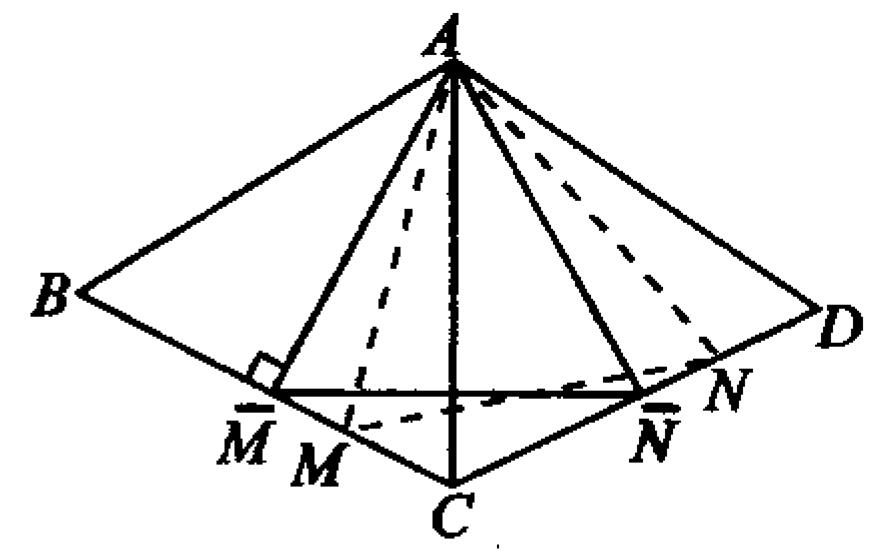
例 6.　四边形 $ABCD$ 中，$AB=BC=CD=DA$，$\angle BAD=120°$，M 为 BC 上一点，N 为 CD 上一点。

求证：若 $\triangle AMN$ 中有一个内角等于 $60°$，则 $\triangle AMN$ 是正三角形。

分析　若 $\triangle AMN$ 有一个内角等于 $60°$，可以是 $\angle AMN=60°$，也可以是 $\angle MAN=60°$或 $\angle ANM=60°$，因此我们要分情况讨论，才

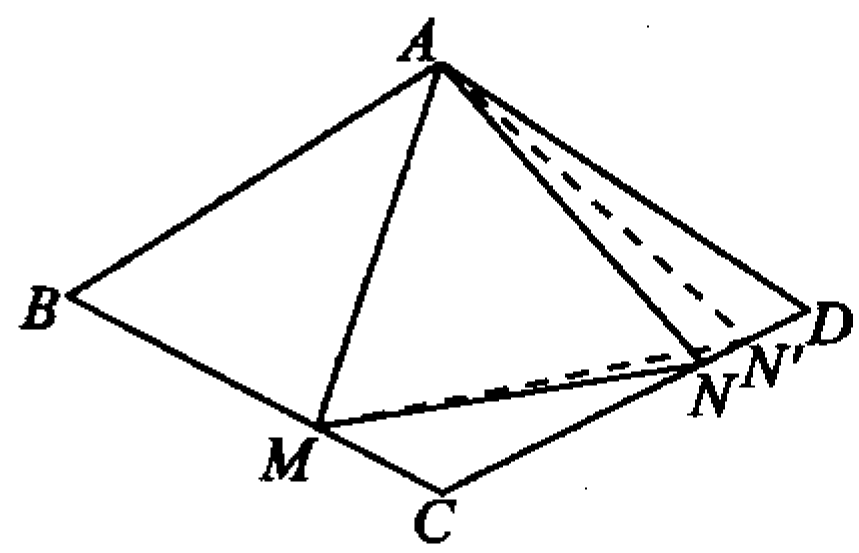
能全面。

证明 (1)若 $\angle MAN=60°$,我们先从 A 作 $A\overline{M}\perp BC$,$\overline{M}$ 为垂足。作 $A\overline{N}\perp CD$,$\overline{N}$ 为垂足。



(图6)

如图 6. 很容易证明 $A\overline{M}=A\overline{N}$ 且 $\angle\overline{M}A\overline{N}=60°$。$\triangle A\overline{M}\overline{N}$ 为正三角形,于是我们发现,在 $\angle MAN=60°$的情况下的 $\triangle AMN$,只不过是由 $\triangle A\overline{M}\overline{N}$ 绕 A 点旋转一个角度,又放大了一个比例而已。于是在 $\angle MAN=60°$的情况下,只要沟通一般位置与特殊位置的联系就可以了。



(图7)

事实上,当 $\angle MAN=60°$时,易知 $\angle\overline{M}AM=\angle\overline{N}AN$,又 $A\overline{M}=A\overline{N}$ 所以

$Rt\triangle A\overline{M}M\cong Rt\triangle A\overline{N}N\Rightarrow AM=AN$,又 $\angle MAN=60°$所以 $\triangle AMN$ 是正三角形。

(2)若 $\angle AMN=60°$,这时设法转化为(1)的情况。我们作 $\angle MAN'=60°$,交 CD 于 N' 连接 MN',如图 7 所示。由(1)的证明可知,$\triangle AMN$是正三角形,即 $\angle AMN'=. 60°$但已知 $\angle AMN=60°$,所以 MN 必与 MN重合,因此 N点必与 N 点重合,从而 $\triangle AMN'$与 $\triangle AMN$ 重合。所以 $\triangle AMN$ 是正三角形。

(3)若 $\angle ANM=60°$,仿(2)可证 $\triangle AMN$ 是正三角形。

综合(1)、(2)、(3)可得,只要 $\triangle AMN$ 中有一个内角等于 60°,则 $\triangle AMN$ 必是正三角形。

例 7. 设 a,b,c 是非零实数,求 $\frac{a}{|a|}+\frac{b}{|b|}+\frac{c}{|c|}+\frac{ab}{|ab|}+\frac{bc}{|bc|}+\frac{ca}{|ca|}+\frac{abc}{|abc|}$的值。

分析 我们可对 a,b,c 三数分以下四种情况进行讨论:(1)三

数均为正;(2)三数均为负;(3)三数一正二负;(4)三数一负两正。

解　由于原式中 a,b,c 地位轮换对称,不妨设

(1)当 $a>0,b>0,c>0$ 时,

$$原式=\frac{a}{a}+\frac{b}{b}+\frac{c}{c}+\frac{ab}{ab}+\frac{bc}{bc}+\frac{ca}{ca}+\frac{abc}{abc}$$

$$=1+1+1+1+1+1+1=7.$$

(2)当 $a<0,b<0,c<0$ 时,

$$原式=\frac{a}{-a}+\frac{b}{-b}+\frac{c}{-c}+\frac{ab}{ab}+\frac{bc}{bc}+\frac{ca}{ca}+\frac{abc}{-abc}$$

$$=-1-1-1+1+1+1-1=-1.$$

(3)当 $a>0,b<0,c<0$ 时,

$$原式=\frac{a}{a}+\frac{b}{-b}+\frac{c}{-c}+\frac{ab}{-ab}+\frac{bc}{bc}+\frac{ca}{-ca}+\frac{abc}{abc}$$

$$=1-1-1-1+1-1+1=-1.$$

(4)当 $a>0,b>0,c<0$ 时,

$$原式=\frac{a}{a}+\frac{b}{b}+\frac{c}{-c}+\frac{ab}{ab}+\frac{bc}{-bc}+\frac{ca}{-ca}+\frac{abc}{-abc}$$

$$=1+1-1+1-1-1-1=-1.$$

所以 $\frac{a}{|a|}+\frac{b}{|b|}+\frac{c}{|c|}+\frac{ab}{|ab|}+\frac{bc}{|bc|}+\frac{ca}{|ca|}+\frac{abc}{|abc|}$ 的值是 -1 或 7.

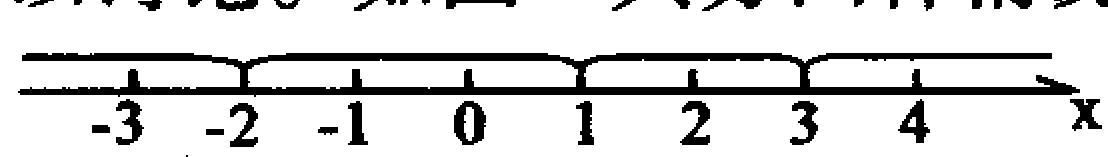
例 8.　化简表达式 $\sqrt{x^2+4x+4}+\sqrt{x^2-2x+1}+\sqrt{x^2-6x+9}$.

解　设 $y=\sqrt{x^2+4x+4}+\sqrt{x^2-2x+1}+\sqrt{x^2-6x+9}$

$$=\sqrt{(x+2)^2}+\sqrt{(x-1)^2}+\sqrt{(x-3)^2}$$

$$=|x+2|+|x-1|+|x-3|$$

由于 x 在不同区间去掉绝对值后前面所加符号可能不一样,所以要分区间加以讨论。如图 8 共分四种情况。



(1)如果 $x\leqslant -2$,则 $x+2\leqslant 0,x-1<0,x-3<0$.

则 $|x+2|=-(x+2)=-x-2$,

$|x-1|=-(x-1)=-x+1$, $|x-3|=-(x-3)$

$=-x+3$.

所以 $y=-x-2-x+1-x+3=-3x+2$.

(2)如果 $-2<x\leqslant1$, 则 $x+2>0$, $x-1\geqslant0$, $x-3<0$.

则 $|x+2|=x+2$, $|x-1|=-(x-1)=-x+1$,

$|x-3|=-(x-3)=-x+3$.

所以 $y=x+2-x+1-x+3=-x+6$.

(3)如果 $1<x\leqslant3$, 则 $x+2>0$, $x-1>0$, $x-3\leqslant0$.

则 $|x+2|=x+2$, $|x-1|=x-1$,

$|x-3|=-(x-3)=-x+3$.

所以 $y=x+2+x-1-x+3=x+4$.

(4)如果 $x>3$, 则 $x+2>0$, $x-1>0$, $x-3>0$.

则 $|x+2|=x+2$, $|x-1|=x-1$, $|x-3|=x-3$.

所以 $y=x+2+x-1+x-3=3x-4$.

综合(1)、(2)、(3)、(4)可得 $y=\begin{cases}-3x+2(\text{当 } x\leqslant2 \text{ 时})\\ -x+6(\text{当 } 2<x\leqslant1 \text{ 时})\\ x+4(\text{当 } x\leqslant3 \text{ 时})\\ 3x-2(\text{当 } x>3 \text{ 时})\end{cases}$

例 9. 当 $a>0$ 且 $b>a+c$ 时,试证:方程 $ax^2+bx+c=0$ 必有两个不等的实根。

分析 要证方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两个不等的实根,只须证 $\Delta=b^2-4ac>0$. 因 $b^2\geqslant0$, $a>0$, 所以应该按 $c>0$, $c=0$, $c<0$ 三种情况进行讨论。

证明 ①当 $c<0$ 时,因 $a>0$, 则 $-4ac>0$, 即 $\Delta=b^2-4ac>0$;

②当 $c=0$ 时,因 $a>0$, $b>a+c>0$, $\Delta=b^2-4ac>0$;

③当 $c>0$ 时,因 $a>0$, 则 $b>a+c>0$, $b^2>(a+c)^2$, 即 $\Delta=b^2-4ac>(a+c)^2-4ac=(a-c)^2\geqslant0$ 也就是 $\Delta>0$.

综合①、②、③得,总有 $\Delta>0$. 因此方程 $ax^2+bx+c=0$ 必有

两个不等的实根。

例 10.　设 a,b,c 是三个互不相等的正整数。

求证：在 $a^3b-ab^3, b^3c-bc^3, c^3a-ca^3$ 三个数中，至少有一个数能被 30 整除。

分析　由于 $30=2\times3\times5$ 且 $(2,3,5)=1$. 所以分步证明之.

证明　**第一步**，先证这三个数均能被 2 整除，因为

$$a^3b-ab^3=ab(a^2-b^2), b^3c-bc^3=bc(b^2-c^2),$$

$$c^3a-ca^3=ca(c^2-a^2)$$

所以在 a,b,c 中至少有一个是偶数或都是奇数的情况下，这三个数 $a^3b-ab^3, b^3c-bc^3, c^3a-ca^3$ 都是偶数，即这三个数都能被 2 整除。

第二步，再证这三个数均能被 3 整除。

对 $a^3b-ab^3=ab(a^2-b^2)=ab(a+b)(a-b)$

若 a,b 中有一个是 3 的倍数，则 $3\mid a^3b-ab^3$.

若 a,b 均不是 3 的倍数，

①当 a,b 被 3 除余数相同时，有 $3\mid a-b$，从而 $3\mid a^3b-ab^3$.

②当 a,b 被 3 除余数不同时，有 $3\mid a+b$，从而 $3\mid a^3b-ab^3$.

所以对任意正整数 a,b，均有 $3\mid a^3b-ab^3$.

同理可证：$3\mid b^3c-bc^3$，$3\mid c^3a-ca^3$.

第三步，再证 $a^3b-ab^3, b^3c-bc^3, c^3a-ca^3$ 三个数中，至少有一个能被 5 整除。

①当 a,b,c 中至少有一个被 5 整除时，则 $a^3b-ab^3, b^3c-bc^3, c^3a-ca^3$ 三个数中，至少有一个能被 5 整除。

②当 a,b,c 都不能被 5 整除时，则 a^2,b^2,c^2 的个位数字只能是 1,4,6,9. 从而 $a^2-b^2, b^2-c^2, c^2-a^2$ 的个位数字是从 1,3,6,9 中任取三个(可以重复取)两两相减之差。而这些差中必有 0 或 ±5，所以 $a^2-b^2, b^2-c^2, c^2-a^2$ 中至少有一个能被 5 整除，从而 $a^3b-ab^3, b^3c-bc^3, c^3a-ca^3$ 三个数中，至少有一个能被 5 整除。

不妨设 $5|a^3b-ab^3$.

又从第一步知 $2|a^3b-ab^3$，从第二步知 $3|a^3b-ab^3$，又 $(2,3,5)=1$，所以有 $30|a^3b-ab^3$.

掌握正确分类讨论的规则，学会分情况说理论证，会使你的思维更加有条理，你会逐步体会“数学使人缜密”的道理。

研究练习题 2－1

1. 已知三角形中两角之和为 $n°$，最大角比最小角大 $24°$，试确定 n 的取值范围。

2. 平面上有四个点 A,B,C,D，其中任何三点都不共线。则可从中选出某 3 点构成一个三角形，使得该三角形中至少有一个内角不超过 $45°$. 试证之.

3. 如果平面上 6 个点中的任何 3 点都不共线，则可从中选出某 3 点构成一个三角形，使得该三角形中至少有一个内角不超过 $30°$. 试证之.

§2.2　归纳、猜想，发现规律

通过观察，发现图形或数量的规律，是一类非常重要的能力训练。也是数学竞赛中经常考察的问题。它可以检查学生的深刻的直觉概括能力和机敏灵活的判断能力。

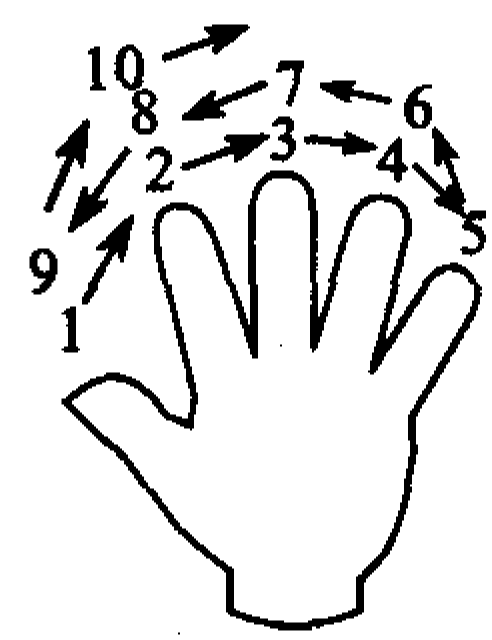
人们要认识事物，首先是通过观察，得到一些感性知识。那么如何从感性知识向理性认识飞跃呢？归纳与猜想是一个不可缺少的步骤。由归纳得出的猜想是一个判断。如果所得判断得到证明或检验，就变成了科学规律性的认识。因此归纳与猜想是科学发现过程中的重要步骤和思想方法。例如，牛顿、爱因斯坦的科学成果，在相当大的程度上都是从特殊事实出发，经过归纳，得出大胆的猜想，提出更一般、更广泛的全新的科学方法或结论。

推动了科学的发展。在数学解题中,往往也要从特殊、个别、简单、局部的事实出发,探究、概括一般的规律。因此,在观察基础上,掌握归纳方法、会概括数学猜想的思维方法,对学好数学是非常重要的。正如波利亚所说:从各方面来看,数学是学习归纳推理最合适的材料。

例 1.　伸出你的左手,从大拇指开始如图 1 所示的那样数数字,1,2,3,……,

问:数到 2003 时,你数在哪个指头上?

分析与解　大拇指是 1,食指是 2,中指是 3,无名指是 4,小指是 5,然后往后数,无名指是 6,中指是 7,食指是 8,拇指是 9,再往回数,按这个规则一直数下去到 2003 的方法是不可取的。因此要从中发现规律,比如拇指开始是 1,此后每数过 8 个数就又回到大拇指。数在大拇指的数一定是被 8 除余 1 的数。这是个直觉的猜测,然而很容易被证明。因为从大拇指的一个数到下一次在大拇指的数恰要数过 8 个数。这就验证了猜想所得规律的正确性。从而为我们提供了解题的依据。因为 $2001 = 8 \times 250 + 1$,所以按上述找到的规律,可知数到 2001 落在大拇指上,接下去数,2002 在食指,因此 2003 应数在中指的位置。



(图 1)

例 2.　观察下面的算术运算

$$1^2 = 1$$
$$2^2 = 1 + 3$$
$$3^2 = 1 + 3 + 5$$
$$4^2 = 1 + 3 + 5 + 7$$
$$5^2 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9$$

……　……

你能从中归纳得出什么猜想?并证明你的猜想是个真命题。

分析　所给 5 个等式左端依次是自然数 n 的平方,右端是相

应的连续地从 1 开始的 n 个奇数的和。由此可以归纳出数学猜想：正整数 n 的平方等于从 1 开始的 n 个连续奇数的和。即

$$n^2=1+3+5+\cdots\cdots+(2n-1)$$

下面我们证明这个结论。

证明 因为

$$\begin{aligned}2n^2&=2n\times n\\&=\underbrace{2n+2n+2n+\cdots\cdots+2n}_{n}\\&=[1+(2n-1)]+[3+(2n-3)]+\cdots\cdots+[(2n-1+1)]\\&=\{1+3+5+\cdots+(2n-1)\}+\{1+3+5+\cdots+(2n-1)\}\\&=2\times\{1+3+5+\cdots\cdots+(2n-1)\}\end{aligned}$$

所以，$n^2=1+3+5+\cdots\cdots+(2n-1)$.

这样，证明了我们归纳所得的猜想是个真命题。

例 3. 观察下面的算术计算

$$\begin{array}{ll}2\times2=4, & 2+2=4\\ \frac{3}{2}\times3=4\frac{1}{2}, & \frac{3}{2}+3=4\frac{1}{2}\\ \frac{4}{3}\times4=5\frac{1}{3}, & \frac{4}{3}+4=5\frac{1}{3}\\ \frac{5}{4}\times5=6\frac{1}{4} & \frac{5}{4}+4=6\frac{1}{4}\end{array}$$

请你从中归纳得出一个猜想？并对你的猜想进行证明。

分析 左列四式都是两数积，右列四式都是两数和。如果仅从表面看可归纳得出一个猜想：“两个有理数的积等于这两个有理数的和”。即“a,b 是有理数，则 $a\times b=a+b$”。这个猜想命题显然不真，极易举出反例，如 $1\times3\neq1+3$.

如果我们仔细分析式子的结构，会得出如下的猜想：

“若 n 是正整数，则$\frac{n+1}{n}\times(n+1)=\frac{n+1}{n}+(n+1)$”.

证明

$$\because \frac{n+1}{n}\times(n+1)=\frac{n+1}{n}\times n+\frac{n+1}{n}\times 1=(n+1)+(1+\frac{1}{n})$$

$$=(n+2)+\frac{1}{n},$$

$$\frac{n+1}{n}+(n+1)=1+\frac{1}{n}+(n+1)=(n+2)+\frac{1}{n},$$

$$\therefore \frac{n+1}{n}\times(n+1)=\frac{n+1}{n}+(n+1).$$

本例说明，通过观察一定要对所观察的对象从数学形式、结构特征上深入分析，寻求共性，才能得出比较深刻的猜想，才能有利于找到合乎规律的认识。比如对 2^{2^n} 的末位数字进行观察，$2^{2^0}=2,2^{2^1}=4,2^{2^2}=16,2^{2^3}=256,2^{2^4}=65536$，如果你得出“对任意的非负整数 n，2^{2^n} 的末位数字是偶数”的猜想，这个猜想显然成立。你还可以得出“对任意不小于 2 的正整数 n，2^{2^n} 的末位数字是 6”的猜想，就比较深刻了。有兴趣的读者可以自己证明这个猜想是个真命题。

例 4.　当自然数 $n=2,3,4,\cdots\cdots,299,300$ 时，发现凡是 n 能够整除 2^n-2 时，n 就是个质数。

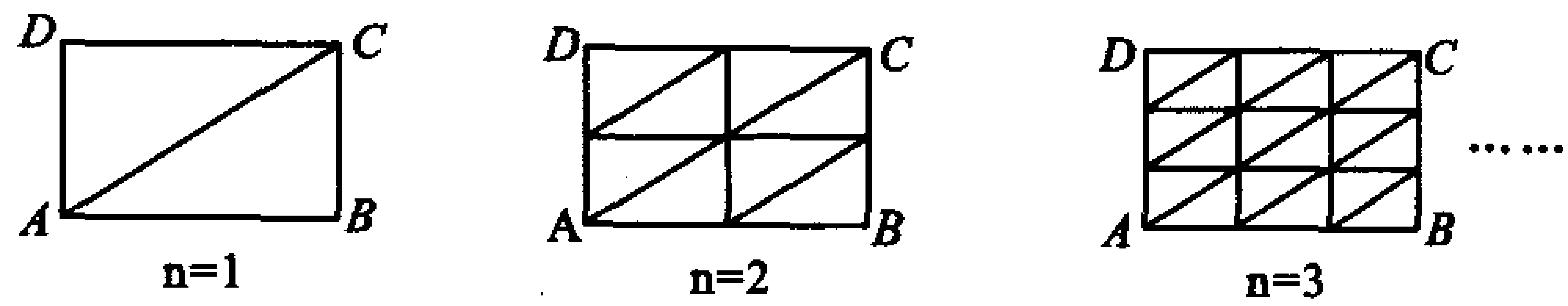
例如　$2\mid 2^2-2$，2 是质数；
$3\mid 2^3-2$，3 是质数；
$4\nmid 2^4-2$，4 是合数；
$5\mid 2^5-2$，5 是质数；
$6\nmid 2^6-2$，6 是合数；
$7\mid 2^7-2$，7 是质数；
……

在这个基础上，试图引出一般的结论，于是得出“**对于大于 1 的自然数 n，如果 n 能整除数 2^n-2，那么 n 一定是个质数**”的猜想。

至于例 4 的猜想，直到近代才找出反例：341 是一个合数，却有 $341\mid 2^{341}-2$. 从而否定了这个猜想。

这个事实告诉我们，由个别事实的数量特征，归纳得出一般特征时，使用的是不完全归纳法，所得的猜想可能正确，也可能不正确。因此数学猜想或者经过证明被确认为真理，或者举出反例推翻猜想。

例5. 现有如下一系列图形(图2)



(图2)

当 $n=1$ 时，长方形 $ABCD$ 分为2个直角三角形，总计数出5条边；

当 $n=2$ 时，长方形 $ABCD$ 分为8个直角三角形，总计数出16条边；

当 $n=3$ 时，长方形 $ABCD$ 分为18个直角三角形，总计数出33条边；

按如上规律请你回答：当 $n=100$ 时，长方形 $ABCD$ 应分为多少个直角三角形，总计数出多少条边？

解 观察分析数据：

当 $n=1$ 时，直角三角形有 2×1^2 个，边数 $=2\times1\times(1+1)+1^2=5$ 条；

当 $n=2$ 时，直角三角形有 2×2^2 个，边数 $=2\times2\times(2+1)+2^2=16$ 条；

当 $n=3$ 时，直角三角形有 2×3^2 个，边数 $=2\times3\times(3+1)+3^2=33$ 条；

由此归纳概括出，对一般的正整数 n，共分为 $2n^2$ 个直角三角形，总计数出 $2n(n+1)+n^2$ 条边。

这个规律是不难证明的。

将长方形 $ABCD$ 的长与宽各 n 等分，恰分成 n^2 个小长方形，每个小长方形被分为两个小直角三角形，总计共 $2n^2$ 个小直角三

角形。又 n^2 个小长方形小长边为 $n(n+1)$ 条，小宽边为 $n(n+1)$ 条，被分成的小长方形的对角线共计 n^2 条，因此得出共 $2n^2$ 个小直角三角形，总计数出 $2n(n+1)+n^2$ 条边。这就证明了猜想结论的正确性。

所以当 $n=100$ 时，共分为 $2\times100^2=20000$ 个小直角三角形，总计数出 $2\times100\times(100+1)+100^2=30200$ 条边。

例 6.　证明：序列

$$49,4489,444889,44448889,\cdots\cdots$$

中的每一项都是一个完全平方数。

分析与解　利用开平方运算检验前几项知：

$49=7^2$，$4489=67^2$，$444889=667^2$，$44448889=6667^2$，看出：一般地所给的数是 $\underbrace{44\cdots\cdots4}_{n个4}\underbrace{88\cdots\cdots8}_{n-1个8}9$，它恰可表为 $\underbrace{66\cdots\cdots6}_{n-1个6}7^2$，而 $\underbrace{66\cdots\cdots6}_{n-1个6}7^2=(\underbrace{66\cdots\cdots6}_{n个6}+1)^2$，于是得出猜想：

$$\underbrace{44\cdots\cdots4}_{n个4}\underbrace{888\cdots\cdots8}_{n个8}+1=(\underbrace{66\cdots\cdots6}_{n个6}+1)^2.$$

我们证明如下：

设：$\underbrace{44\cdots\cdots4}_{n个4}\underbrace{888\cdots\cdots8}_{n个8}+1=(\underbrace{xx\cdots\cdots x}_{n个x}+1)^2$

（其中 x 取自 1，2，3，4，5，6，7，8，9）

即　$4\times\underbrace{11\cdots\cdots1}_{n个1}\times10^n+8\times\underbrace{11\cdots\cdots1}_{n个1}+1=(x\times\underbrace{11\cdots\cdots1}_{n个1}+1)^2.$

令 $\underbrace{11\cdots\cdots1}_{n个1}=m$，则 $10^n=9\times\underbrace{11\cdots\cdots1}_{n个1}=9m+1$，

于是得　$4m(9m+1)+8m+1=(mx+1)^2$. 展开整理成关于 x 的方程，得

$$mx^2+2x-(36m+12)=0$$

解此方程 $x=6$.（负根 $-\dfrac{6m+2}{m}$ 舍去），所以

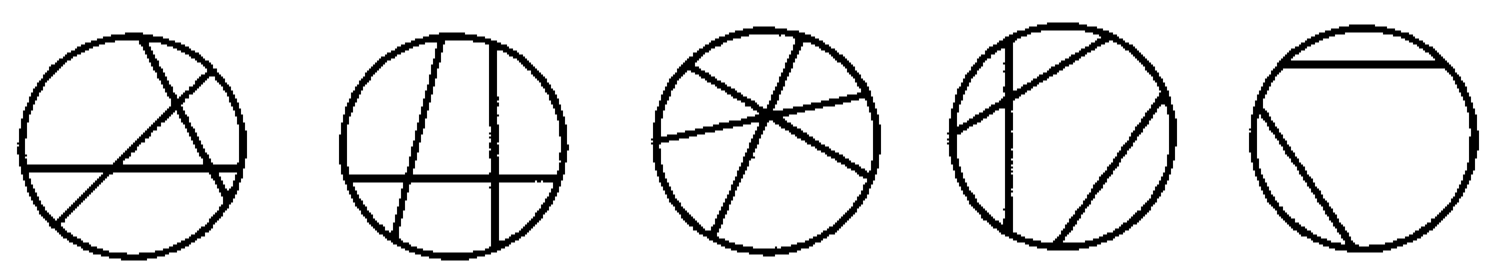
$$\underbrace{44\cdots\cdots4}_{n个4}\underbrace{88\cdots\cdots8}_{n-1个8}9=(\underbrace{66\cdots\cdots6}_{n个6}+1)^2.$$

即题中所给序列的每一项都是完全平方数。

例 7.　将一个圆形纸片用直线划分成大小不限的若干小纸

片。如果要分成不少于 50 个小纸片，至少要画多少条直线？

解 我们来一条一条地画直线。画第一条直线将圆纸片分成 2 块，再画第 2 条直线，如果与第 1 条直线在圆内相交，则将圆纸片分成 4 块（增加了 2 块），否则只能划分为 3 块。画第三条直线，如果与前两条直线都在圆内相交，且交点互不相同时（即没有三条直线共点），则将圆纸片划分成 7 块（又增加了 3 块）。否则划分的块数少于 7 块。如图 3 所示。



（图 3）

由此可见，若希望将圆纸片分成尽可能多的块数，应使新画的直线与原有的直线都在圆内相交，且交点互不相同。这时增加的块数等于直线的条数，这样划分的块数最多。列表如下：

直线条数	纸片最多划分成的块数
1	1 + 1
2	1 + 1 + 2
3	1 + 1 + 2 + 3
4	1 + 1 + 2 + 3 + 4
5	1 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5
6	1 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6
……	……

不难看出，表中每行右边的数字等于 1 加上从 1 到行数的所有整数的和。我们的问题化归为：自第几行起右边的数不小于 50？

由于 $1+1+2+3+4+5+6+7+8+9=46$，而 $1+1+2+3+4+5+6+7+8+9+10=56$，所以至少要画 10 条直线。

变形：一张圆纸片切 100 刀，最多可以将它分割为多少块？

解 我们分别用 $S_1, S_2, \cdots\cdots, S_n$ 表示将圆纸片切 1 刀、2 刀、

……、n 刀分割的最多块数，则

$S_1=2=1+1$

$S_2=4=1+1+2$

$S_3=7=1+1+2+3$

$S_4=11=1+1+2+3+4$

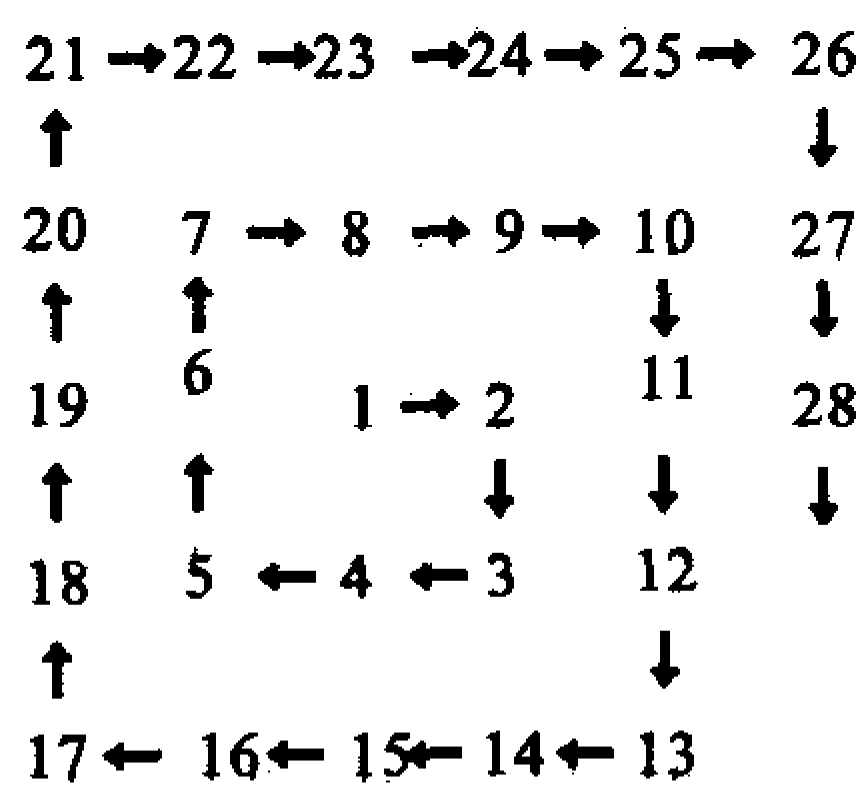
……、

$$S_n=1+1+2+3+\cdots\cdots+n=1+\frac{(n+1)n}{2}$$

当 $n=100$ 时，$S_{100}=1+\dfrac{(100+1)\times100}{2}=5051$（块）.

例 8.　如图 4，将正整数按从小到大的顺序排列成螺旋形，在 2 处拐第一个弯，在 3 处拐第二个弯，在 5 处拐第三个弯，….

问拐第 20 个弯的地方是哪一个数？



（图 4）

解 1　我们很容易看出一个规律来：

第一个拐弯处为　$1\times1+1=2$
第二个拐弯处为　$1\times2+1=3$　第一层

第三个拐弯处为　$2\times2+1=5$
第四个拐弯处为　$2\times3+1=7$　第二层

第五个拐弯处为　$3\times3+1=10$
第六个拐弯处为　$3\times4+1=13$　第三层

（所谓第几层，就是宽为几的正方形或长方形，是长方形时，长比宽多 1）

依次类推。第 20 个拐弯处应是　$10\times11+1=111$.

解 2　我们可以利用另一个规律来计算：

第一个拐弯处为　$1+1=2$

第二个拐弯处为　$1+1+1=3$

第三个拐弯处为　$1+1+1+2=5$

第四个拐弯处为　$1+1+1+2+2=7$

第五个拐弯处为　$1+1+1+2+2+3=10$

第六个拐弯处为　$1+1+1+2+2+3+3=13$

……　……　……

第 20 个拐弯处为　$1+(1+1+2+2+3+3+\cdots+10+10)$

$=1+2\times(1+2+3+\cdots\cdots+9+10)$

$=1+2\times55=111.$

在本题的数表中,找第 20 个拐弯处的数,如果画一个大表还可以找到答案。

那么,如果问第 20000 个拐弯处的数是什么?要画表实际去数将非常非常的困难!但按上面我们找到的规律很容易知道,第 20000 个拐弯处的数是

$1+(1+1+2+2+3+3+\cdots\cdots+10000+10000)$

$=1+2\times(1+2+3+\cdots\cdots+10000)=100010001.$

例 9.　对任意正整数 n 都可进行如下的"H 操作":如果 n 是奇数,则乘以 3 再加 13,这样的操作称为"奇"运算;如果 n 是偶数,则除以 2,商如果仍为偶数,则再除以 2,直到商为奇数时为止,这样的操作称为"偶"运算。

(1)对正整数 257,反复地做上述的"H 操作",问第 257 次"H 操作"后的结果是什么数?

(2)若对一个正整数进行若干次"H 操作"后出现循环,此时"偶"运算后的数值总是 a,请计算和说明 a 是什么数?

解　(1)一个正整数 n 经过 H 操作后的值是 b,则可简记为

$$n:\xrightarrow{H} b.$$

第一步操作后　$257:\xrightarrow{H}257\times3+13=784;$

第二步操作后　748: $\xrightarrow{H} 748 \div 2^4 = 49$;

第三步操作后　49: $\xrightarrow{H} 49 \times 3 + 13 = 160$;

第四步操作后　160: $\xrightarrow{H} 160 \div 2^5 = 5$;

第五步操作后　5: $\xrightarrow{H} 5 \times 3 + 13 = 28$;

第 6 步操作后　28: $\xrightarrow{H} 28 \div 2^2 = 7$;

第 7 步操作后　7: $\xrightarrow{H} 7 \times 3 + 13 = 34$;

第 8 步操作后　34: $\xrightarrow{H} 34 \div 2 = 17$;

第 9 步操作后　17: $\xrightarrow{H} 17 \times 3 + 13 = 64$;

第 10 步操作后　64: $\xrightarrow{H} 64 \div 2^6 = 1$;

第 11 步操作后　1: $\xrightarrow{H} 1 \times 3 + 13 = 16$;

第 12 步操作后　16: $\xrightarrow{H} 16 \div 2^4 = 1$;

第 13 步操作后　1: $\xrightarrow{H} 1 \times 3 + 13 = 16$;

第 14 步操作后　16: $\xrightarrow{H} 16 \div 2^4 = 1$;

从第 11 步以后出现循环,奇数步后的结果是 16,偶数步后的结果是 1. 因此,第 257 步后的结果是 16.

(2)若对一个正整数进行若干次“H 操作”后出现循环,此时“偶”运算后的数值总是 a,则 a 一定是个奇数,那么对 a 进行“奇”运算的结果是 $a \times 3 + 13$ 显然是个偶数,再对 $a \times 3 + 13$ 进行“偶”运算,即　$a \times 3 + 13$ 除以 2^k 的结果仍是 a,于是得

$$\frac{a\times 3+13}{2^k}=a,$$

也就是　　　　$a\times 3+13=a\times 2^k$

即　　$a\times(2^k-3)=13$

显然　　$1\leqslant 2^k-3\leqslant 13\Rightarrow 4\leqslant 2^k\leqslant 16$，$k$ 可取 2,3,4，

经检验知　　　　$k=2$，或 $k=4$.

当 $k=2$ 时，$a=13$；当 $k=4$ 时，$a=1$. 所以 a 仅可能取 1 与 13 这两个值。

例 10.　一个直角三角形的三边长都是正整数，这样的三角形称为整数勾股形。其三边的值叫勾股弦三数组。下面给出一些勾股弦三数组：

(3,4,5)，(5,12,13)，(7,24,25)，(8,15,17)，

(20,21,24)，(360,319,480)，(2400,1679,2929)，……

观察这些勾股弦三数组，请你归纳得出一个猜想，并加以证明。

分析　观察勾股弦三数组可以归纳得出如下猜想：整数勾股形中，勾、股中必有一个是 3 的倍数。

证明如下　勾股弦三数组是 $x^2+y^2=z^2$ 的一组正整数解。如果 x,y 中无 3 的倍数，则 $x=3k\pm 1$ 型的数，$y=3m\pm 1$ 型的数，他们的平方都是被 3 除余 1 的数，由此知 x^2+y^2 是被 3 除余 2 的数。但被 3 除余 2 的数一定不是完全平方数，所以与等于右边的 z^2 相矛盾。所以 x,y 中至少有一个是 3 的倍数。猜想命题"整数勾股形中，勾、股中必有一个是 3 的倍数"被证明为真。

进一步还可以得到如下的猜想：

"整数勾股形中，勾、股中必有一个是 4 的倍数。"

"整数勾股形中，勾、股、弦中必有一个是 5 的倍数"。

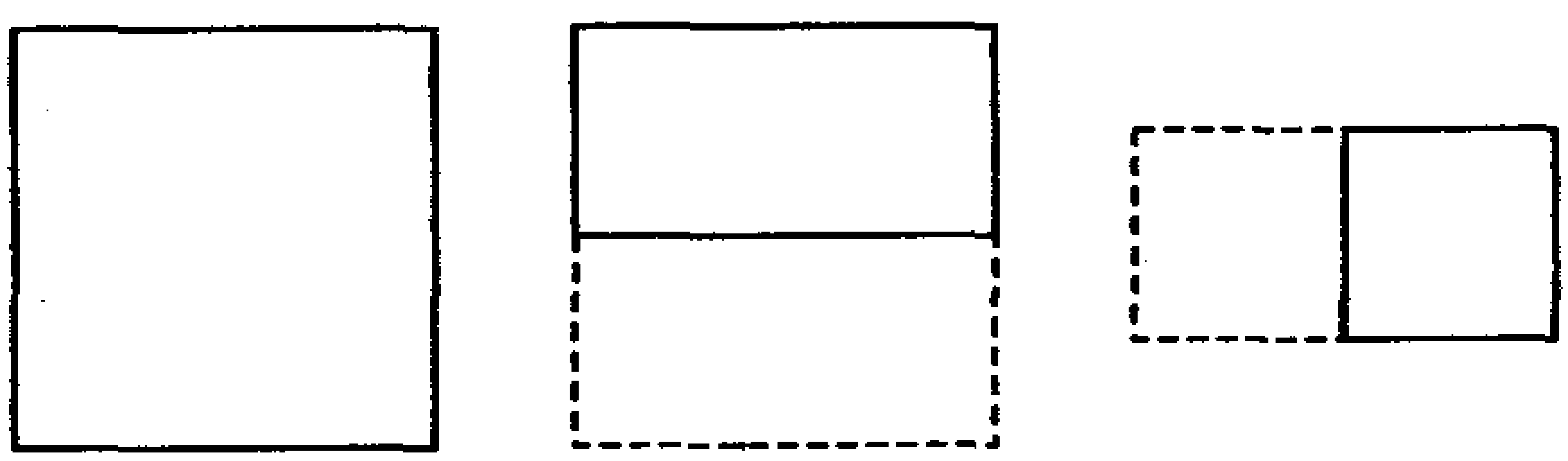
这两个命题同样是真命题，就留给同学们作为练习请自己完成吧。

例 10 告诉我们，通过观察和归纳可以发现很多有趣的事实。

正如高斯所说："在数论中由于意外的幸运颇为经常，所以用归纳法可以萌发出极漂亮的新的真理。"学好归纳推理是提高我们数学素养和创新意识的重要途径，数学是研究归纳推理的最合适的材料。

研究练习题 2－2

1. 将正方形纸片由下往上对折，再由左向右对折，称为完成一次操作。按上述规则完成五次操作以后，剪去所得小正方形的左下角问：当展开这张正方形纸片后，一共有多少个小洞孔？

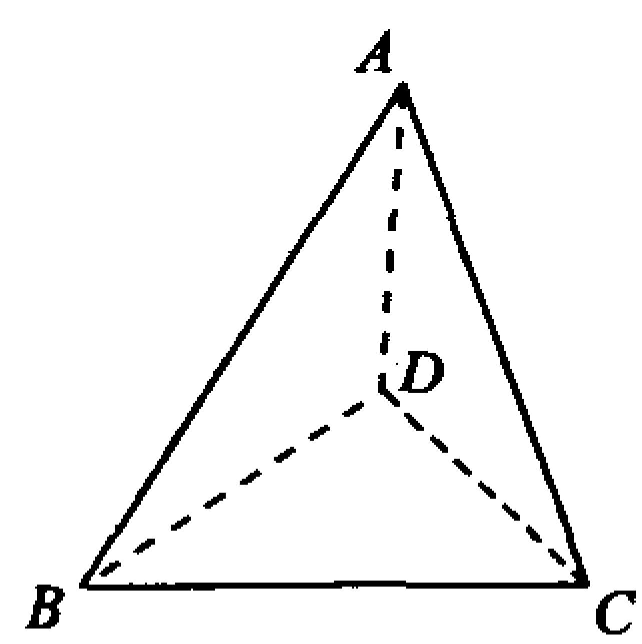


（图 5）

2. 一个正四面体，摆在桌面上，正对你的面（ABC）是红色，底面（BCD）是白色，右侧面（ACD）是蓝色，左侧面（ABD）是黄色。（如图 6）

先让四面体绕底面面对你的棱向你翻转，再让它绕底面右侧棱翻转，第三次绕底面面对你的棱向你翻转，第四次绕底面左侧的棱翻转。此后依次重复上述操作过程。

问：按规则完成第一百次操作后，面对你的面是什么颜色？



（图 6）

3. 将 100 以内的质数，从小到大排成一个数字串。依次完成以下五项工作叫做一次操作：

(1)将左边第一个数码移到数字串的最右边。

(2)从左到右两位一节组成若干个两位数。

(3)划去这些两位数中的合数。

(4)所剩两位质数有相同者，保留左边的一个，其余划去。

(5)所余的两位质数保持数码次序又组成一个新的数字串。

问:经过1997次操作,所得的数字串是什么?

4. 将自然数按如下顺序排列成一个表:

1	2	6	7	15	16	……
3	5	8	14	17	……	
4	9	13	……			
10	12	……				
11……						
……						

在这个数表中,数3排在第二行第一列,13排在第三行第三列,问:2001排在表中的第几行第几列?

5. 观察下面数表(横排为行):

$\frac{1}{1}$;

$\frac{2}{1}$;$\frac{1}{2}$;

$\frac{3}{1}$;$\frac{2}{2}$;$\frac{1}{3}$;

$\frac{4}{1}$;$\frac{3}{2}$;$\frac{2}{3}$;$\frac{1}{4}$;

$\frac{5}{1}$;$\frac{4}{2}$;$\frac{3}{3}$;$\frac{2}{4}$;$\frac{1}{5}$;

……　　……　　……

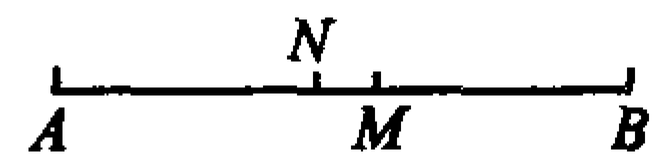
根据前5行数所表达的规律,说明:$\frac{1991}{1949}$这个数位于由上而下的第几行?在这一行中,它位于由左向右的第几个?

§2.3　反证法证题漫谈

给定一条线段AB,大家都会用尺规画出它的中点M,这在数

学上只表明线段 AB 中点的存在性。还能画出线段 AB 的另一个中点吗？大家会说不能了！线段 AB 的中点只有一个。再追问一下：你如何敢肯定线段 AB 的中点只有一个呢？我们的回答：可以如下来证明。

如图 1，已知 M 是线段 AB 的中点 $(AM = MB)$，设 AB 还有另一个中点 $N(AN = NB)$，假设 N 不与 M 重合，不失一般性，不妨设 N 点就落在 M 点左侧。这样一来，$AM > AN = NB > MB$，即 $AM > MB$ 与 $AM = MB$ 矛盾。所以 N 点必与 M 点重合，即线段 AB 的中点只能有一个。这样我们就完成了“线段的中点只有一个”的证明。



（图 1）

在证明过程中，我们使用的方法叫反证法。它是一种间接证法。反证法的逻辑依据，是形式逻辑中的矛盾律与排中律。

反证法证题大体分为如下三步：

(1)**否定结论**——先**假定**所要证明的结论不成立，从而结论的反面成立。

(2)**推出矛盾**——从这个“**假定**”出发，引用一系列论据进行正确推理，得出和已知条件、定义、公理或定理相矛盾的结果。

(3)**否定“假定”**——由于推理过程正确，矛盾的产生是由于“**假定**”所引致，因此“**假定**”不能成立，从而得出命题的结论成立。

反证法是数学工作者最精良的武器之一。在数学解题中，特别是解数学竞赛题中，一经采用，别开生面，别具一格，茅塞顿开。往往收到意想不到的效果。

例 1. 证明：凸多边形的内角中，锐角个数不超过三个。

证明 假设凸多边形的内角中锐角的个数超过 3 个（**否定结论！**），那么至少有 4 个内角为锐角。这时，这 4 个内角的邻补角都是钝角——，也就是说，这个多边形的外角中有 4 个钝角，这 4 个钝角之和大于 $360°$，因此这个多边形的外角和大于 $360°$. 与“凸 n 边形的外角和等于 $360°$”的结论矛盾（**推出矛盾！**）。于是，关于

凸多边形的内角中锐角的个数超过 3 个的假设不能成立(**否定“假定”**!)因此,凸多边形的内角中锐角的个数不能超过 3 个。

例 2. 证明:$\sqrt{3}$是无理数。

证明 假设$\sqrt{3}$不是无理数,那么$\sqrt{3}$是个有理数。则存在两个正整数 p,q 使得$\sqrt{3}=\frac{p}{q}$

两边平方得 $p^2=3q^2$ $\qquad(*)$

根据算术基本定理,p 与 q 均可表示为质因数乘积的形式,且表示法是唯一的。

设 $p=p_1p_2p_3\cdots\cdots p_m$, $\qquad q=q_1q_2q_3\cdots\cdots q_n$

其中 $p_i(i=1,2,3,\cdots,m)$,$q_j(j=1,2,3,\cdots,n)$都是质数,代入$(*)$式得 $p_1{}^2p_2{}^2p_3{}^2\cdots\cdots p_n{}^2=3q_1{}^2q_2{}^2q_3{}^2\cdots\cdots q_n{}^2$.

比较上面等式两边质数的个数,左边是偶数个质数的乘积;右边,因为 3 也是质数,总计是奇数个质数的乘积。由于等式两边可以看成同一个正整数的质因数分解式,但两种分解式中质因数的个数不同(左边是偶数个,右边是奇数个),这与算术基本定理相矛盾。

因此,$\sqrt{3}$是无理数。

例 3. 证明:三角形的三个内角中,最大角一定不小于 60°.

证明 设$\triangle ABC$ 的三个内角为$\angle A$, $\angle B$, $\angle C$,不妨设$\angle A\leqslant\angle B\leqslant\angle C$. 我们证明$\angle C\geqslant 60°$.

假设$\angle C\geqslant 60°$不成立,则应有$\angle C<60°$,从而更有$\angle A\leqslant\angle B\leqslant\angle C<60°$. 所以$\angle A<60°$, $\angle B<60°$, $\angle C<60°$,相加得$\angle A+\angle B+\angle C<180°$

与$\angle A+\angle B+\angle C=180°$矛盾。

因此“$\angle C\geqslant 60°$不成立”的假设不真,所以$\angle C\geqslant 60°$成立。

例 4. 设非零实数 p_1,p_2,q_1,q_2 满足关系式 $p_1p_2=4(q_1+q_2)$.

证明:方程 $x^2+p_1x+q_1=0$ 与 $x^2+p_2x+q_2=0$ 中至少有一个具有不等的实数根。

证明　设方程 $x^2+p_1x+q_1=0$ 与 $x^2+p_2x+q_2=0$ 中均无不等的实数根，则其判别式 Δ_1,Δ_2 应满足 $\Delta_1\leqslant0$ 且 $\Delta_2\leqslant0$. 也就是 $p_1^2-4q_1\leqslant0$ 且 $p_2^2-4q^2\leqslant0$.

相加得　$p_1^2+p_2^2-4(q_1+q_2)\leqslant0$，但 $p_1p_2=4(q_1+q_2)$

代入得　$p_1^2+p_2^2-p_1p_2\leqslant0$　　①

另一方面，对非零实数 p_1,p_2 有

$$p_1^2+p_2^2-p_1p_2=p_1^2-2\cdot p_1\cdot\frac{p_2}{2}+\frac{p_2^2}{4}+\frac{3p_2^2}{4}$$

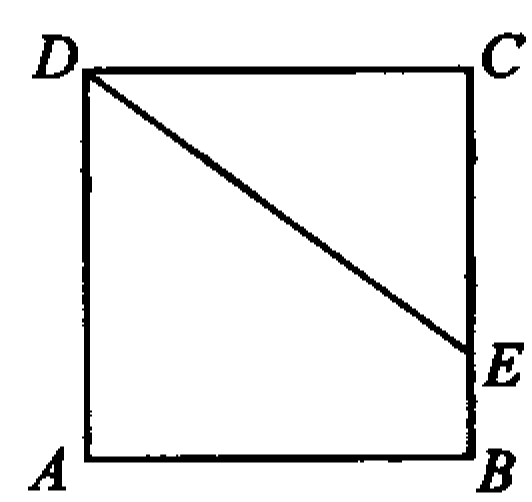
$$=\left(p_1-\frac{p_2}{2}\right)^2+\frac{3p_2^2}{4}>0\qquad②$$

①与②矛盾！

所以方程 $x^2+p_1x+q_1=0$ 与 $x^2+p_2x+q_2=0$ 均无实根的假设不真，也就是“这两个方程中至少有一个具有不等的实数根”应当成立。

例 5.　边长为 1 的正方形 $ABCD$ 中（图 2），E 是 BC 上一点，已知 $AB+BE<DE$.

求证：$BE<\frac{1}{4}$



（图 2）

证明　假设　$BE<\frac{1}{4}$ 不成立，则应有 $BE\geqslant\frac{1}{4}$ 成立。

又　$CE=BC-BE=1-BE\leqslant\frac{3}{4}$.

在 $Rt\triangle DCE$ 中，根据勾股定理有

$$DE=\sqrt{DC^2+CE^2}\leqslant\sqrt{1^2+\left(\frac{3}{4}\right)^2}=\frac{5}{4}$$

但　$AB+BE<DE$，所以 $AB+BE<\frac{5}{4}$,

进而　$BE<\frac{5}{4}-AB=\frac{5}{4}-1=\frac{1}{4}$，与“$BE<\frac{1}{4}$不成立”的假设矛盾。所以 $BE<\frac{1}{4}$成立。

说明　反证法第二步导出矛盾，可以与已知条件矛盾，也可以与已知的公理、定义、定理等事实相矛盾。还可能与“反设”矛盾或导致自相矛盾（如例5）。至于具体的矛盾“着点”以何种形式出现，那会因问题而异，需要灵活应对。

例6.　在六张纸片的正面分别写上整数1,2,3,4,5,6. 打乱次序后，将纸片翻过来，在它们的反面也随意分别写上1—6这六个整数。然后计算每张纸片正面与反面所写数字之差的绝对值，得出六个数。请你证明：所得的六个数中至少有两个是相同的。

证明　设6张卡片正面写的数是 a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6，反面写的数对应为 b_1,b_2,b_3,b_4,b_5,b_6，（a_i,b_i分别取值为1,2,3,4,5,6. $i=1,2,3,4,5,6$）

则这6张卡片正面写的数与反面写的数的绝对值分别为

$|a_1-b_1|,|a_2-b_2|,|a_3-b_3|,|a_4-b_4|,|a_5-b_5|,|a_6-b_6|$

设这6个数两两都不相等，则它们只能取0,1,2,3,4,5这6个值。

于是 $|a_1-b_1|+|a_2-b_2|+|a_3-b_3|+|a_4-b_4|+|a_5-b_5|+|a_6-b_6|=0+1+2+3+4+5=15$ 是个奇数。　　（＊）

另一方面，$|a_i-b_i|$与 a_i-b_i（$i=1,2,3,4,5,6$）的奇偶性相同，所以

$|a_1-b_1|+|a_2-b_2|+|a_3-b_3|+|a_4-b_4|+|a_5-b_5|+|a_6-b_6|$

与 $(a_1-b_1)+(a_2-b_2)+(a_3-b_3)+(a_4-b_4)+(a_5-b_5)+(a_6-b_6)$

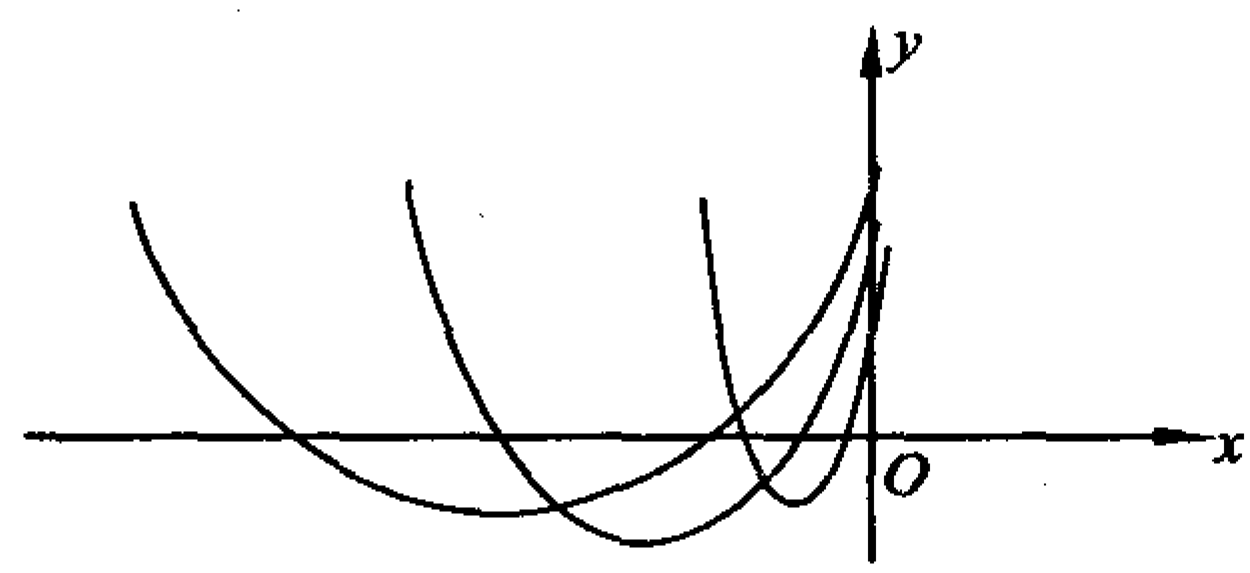
$=(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6)-(b_1+b_2+b_3+b_4+b_5+b_6)$

$=(1+2+2+4+5+6)-(1+2+3+4+5+6)=0$

的奇偶性相同，是个偶数，与（＊）矛盾。

所以$|a_1-b_1|,|a_2-b_2|,|a_3-b_3|,|a_4-b_4|,|a_5-b_5|,|a_6-b_6|$这 6 个数中至少有两个是相同的。

例 7.　小明在同一直角坐标系 $x-O-y$ 中画出了 $y=ax^2+bx+c,y=bx^2+cx+a,y=cx^2+ax+b$ 三个二次函数的图像，如图 3 所示。请你判定小明画的图像是否正确？如果正确，举出三个合乎条件的具体的二次函数，画图验证之；如果不正确，请说明理由。



（图 3）

解　小明画的图像是不正确的，理由如下。

假设小明画的图像是正确的，从图中可见应有 $a>0,b>0$ 且 $c>0$，图中抛物线与 x 轴均有两个交点，即方程 $ax^2+bx+c=0$，$bx^2+cx+a=0,cx^2+ax+b=0$ 均有两个不等的实根。

所以 $b^2>4ac,c^2>4ab,a^2>4bc$. 相乘可得 $a^2b^2c^2>64a^2b^2c^2$.

由于 $a^2b^2c^2$ 是个正数，两端同除 $a^2b^2c^2$ 有 $1>64$，得出矛盾！

因此，小明画的图像肯定是不正确的.

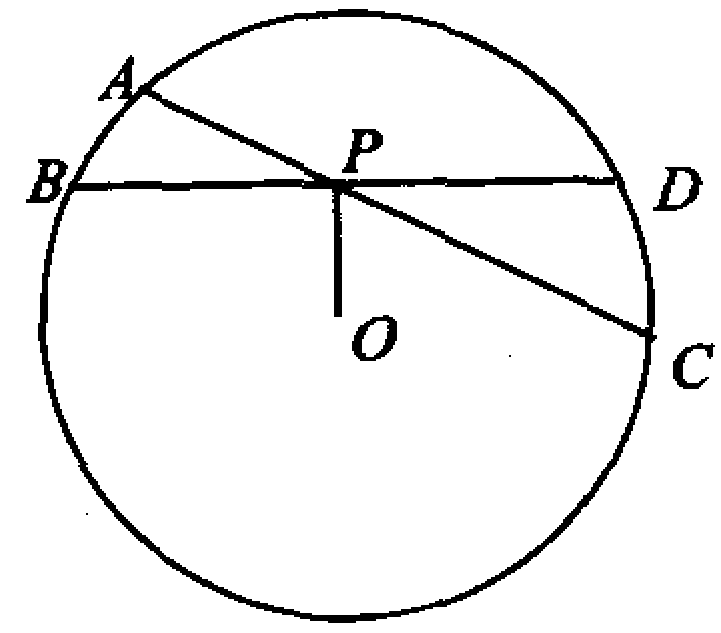
例 8.　圆内两条非直径的弦相交，试证它们不能互相平分。

证明　设 AC、BD 是$\odot O$ 内不是直径的两条弦，二弦相交于 P，则应求证，AC、BD 不能互相平分。可用反证法来证明。

假设 P 是弦 AC、BD 的中点，如图 4，连接 OP，则由垂径定理可得 $OP\perp AC,OP\perp BD$.（圆心与弦的中点之连线垂直于弦）

由于过 P 引 OP 的垂线只有一条，所以 AC 与 BD 应重合是一条弦。这与 AC、BD 是两条非直径的弦的条件相矛盾！

所以 P 不能同时是弦 AC、BD 的中点。



（图 4）

例 9.　设 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_{99},a_{100}$，

$b_1, b_2, b_3, \cdots, b_{99}, b_{100}$是1,2,3,…,99,100这100个自然数的任两个排列。

求证：$a_1b_1, a_2b_2, a_3b_3, \cdots, a_{99}b_{99}, a_{100}b_{100}$这100个数中至少存在两个数，它们被100除的余数是相同的。

证明 假设结论不真。即$a_1b_1, a_2b_2, a_3b_3, \cdots, a_{99}b_{99}, a_{100}b_{100}$这100个数被100除的余数是彼此不同的，恰取0,1,2,…,99这100个不同的值。其中有50个奇数，50个偶数。

由 $a_ib_i = 100 \times q_i + r_i\ (0 \leq r_i < 100)\ (i = 1, 2, \cdots, 100)$. (*)

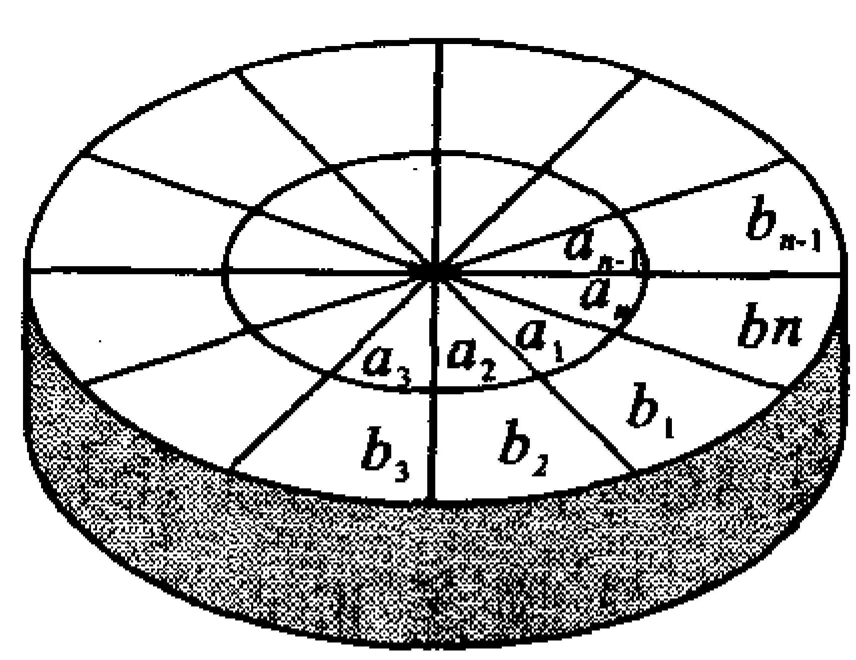
当r_i为奇数时，a_ib_i必为奇数，因此a_i与b_i也均为奇数。所以这50个奇余数，只能是a_i中的50个奇数与b_i中的50个奇数两两相乘之积被100除而得出的。这样一来，a_ib_i 中的另50个偶数，只能是a_i与b_i中的偶数相乘之积，必有$4|a_ib_i$，由(*)知，此时a_ib_i被100除而得出的余数r_i必被4整除，于是$4|r_i$. 这样一来，偶余数中不包含被4除余2的数。，即r_i中不会包含2,6,10,…，等数。与r_i取0,1,2,3,4,5,6,……,98,99所有值的假设矛盾。

因此，$a_1b_1, a_2b_2, a_3b_3, \cdots, a_{99}b_{99}, a_{100}b_{100}$这100个数中至少存在两个数，它们被100除的余数是相同的。

例10. 有两个同心圆盘，各分成n个相等的小格。外盘固定，内盘可以转动。内外两盘上分别填有实数$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$; $b_1, b_2, b_3, \cdots, b_n$; 且满足条件$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n < 0$,

$b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n < 0$.

证明：可将内盘转动到一个适当位置，使两个盘的小格对齐，这时，两个盘n个对应小格内数字乘积的和为一正数。



(图5)

证明 用反证法。如果不论内盘转到什么位置，两盘n个对应小格数字乘积的和都不是正数，那么有

$$a_1b_1+a_2b_2+\cdots\cdots+a_{n-1}b_{n-1}+a_nb_n\leqslant 0$$
$$a_1b_2+a_2b_3+\cdots\cdots+a_{n-1}b_n+a_nb_1\leqslant 0$$
$$a_1b_3+a_2b_4+\cdots\cdots+a_{n-1}b_1+a_nb_2\leqslant 0$$
$$\cdots\cdots\qquad\cdots\cdots\qquad\cdots\cdots$$
$$a_1b_{n-1}+a_2b_n+\cdots\cdots+a_{n-1}b_{n-3}+a_nb_{n-2}\leqslant 0$$
$$a_1b_n+a_2b_1+\cdots\cdots+a_{n-1}b_{n-2}+a_nb_{n-1}\leqslant 0$$

将这 n 个不等式相加，即有 $a_1(b_1+b_2+\cdots+b_n)+a_2(b_1+b_2+\cdots+b_n)+a_3(b_1+b_2+\cdots+b_n)+\cdots+a_{n-1}(b_1+b_2+\cdots+b_n)+a_n(b_1+b_2+\cdots+b_n)\leqslant 0$

即 $(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n)(b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n)\leqslant 0$　　①

但由题设条件 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n<0, b_1+b_2+b_2+\cdots+b_n<0$，所以

$(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n)(b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n)>0$　　②

①与②矛盾！

所以，必存在一个位置，使内外盘 n 个对应小格内数字乘积的和为一正数。

从上述例子中，可以看出，结论中有关“至少存在”、“至多存在”的问题，常常使用反证法。有时证明惟一性的问题也使用反证法。

反证法的使用，关键在于正确地体现出使用反证法的三个步骤。

在第一步否定结论中，会准确地否定一个条件的表述是关键。现将一些常用的否定形式列举如下表：

原结论用词	都是	大(小)于	至少有一个	至少有 n 个	至多有一个	n 个点共线	负数	…
反设用词	不都是	不大(小)于	一个也没有	至多有 $n-1$ 个	至少有两个	n 个点不全共线	非负数	…

在第二步会正确分类讨论，穷举各种情况逐一地加以否定，一定

不能遗漏情况。只有这样才能保证推理的正确性。当然每一步推理都要正确使用逻辑规则。

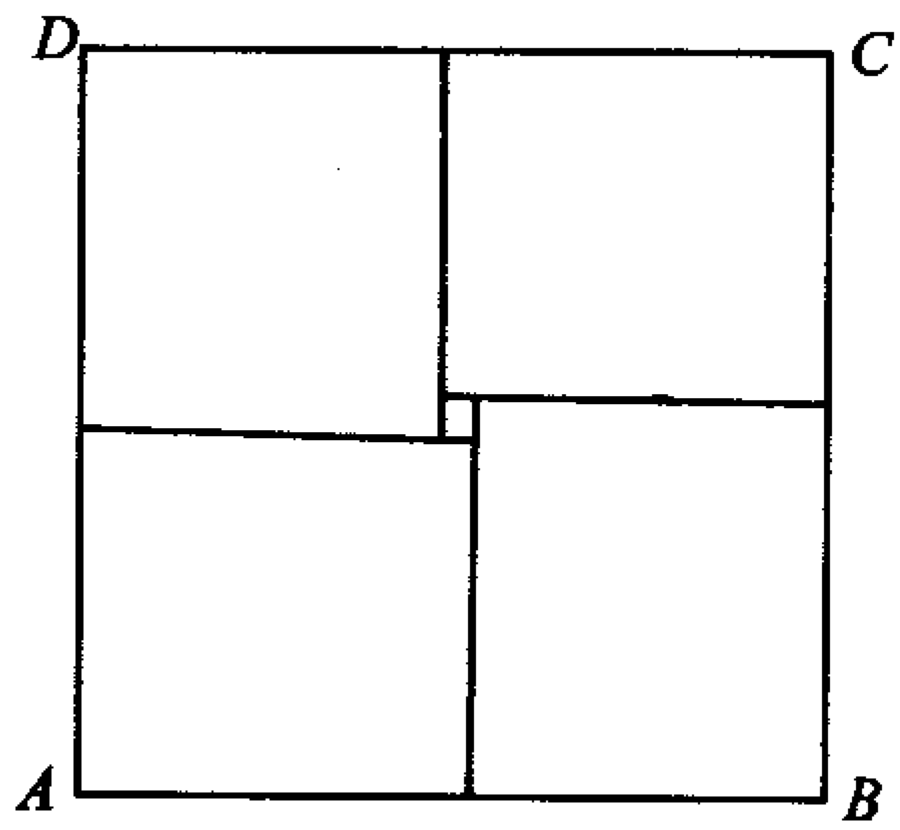
让我们掌握反证法这一精良的证明工具!

研究练习题 2-3

1. 三角形中直角或钝角的个数不能多于一个。

2. 将 5×9 的长方形分成 10 个边长为整数的长方形。证明,你分得的长方形中必有两个是完全相同的。

3. 某位同学想要选取五张边长不等的正方形纸片,如图 6 所示拼成一个大正方形 $ABCD$. 请问该同学的想法能实现吗?如果能,请写出选取的五个正方形边长的一组数值;如果不能,请说明理由。



(图 6)

§2.4 漫谈举反例

要谈反例,先看一个在解整数整除的问题时常犯的错误,有的同学应用如下的“性质”:“若 $a\mid bc$ 且 $a\mid b$ 则 $a\mid c$.”其实这是个假命题。比如当 $a=6,b=4,c=15$ 时,显然满足 $6\mid4\times15$ 且 $6\nmid4$,然而 $6\nmid15$. 可见命题“若 $a\mid bc$ 且 $a\mid b$,则 $a\mid c$.”不真。

我们知道,要断定一个命题真,必须经过严格的推证。而要否定一个命题,却只要能举出一个满足题设条件但与结论矛盾的例子就行了。这种与命题结论矛盾的例子就称为反例。如上我们举出的 “$a=6,b=4,c=15$ 时,显然满足 $6\mid4\times15$ 且 $6\nmid4$,然

而 $6 \nmid 15$”的例子，就是对命题“若 $a \mid bc$ 且 $a \mid b$，则 $a \mid c$”的一个反例。

下面通过例题来谈谈举反例的作用与方法。

例 1.　有两个关于整数整除的命题：

Ⅰ. 若 $a \mid bc \Rightarrow a \mid b$ 或 $a \mid c$.

Ⅱ. 若 $a \mid (b+c) \Rightarrow a \mid b$ 或 $a \mid c$. 则（　　）.

(A) Ⅰ真，Ⅱ假.　　(B) Ⅰ真，Ⅱ真.

(C) Ⅰ假，Ⅱ假.　　(D) Ⅰ假，Ⅱ真.

解　对于命题Ⅰ，若 $a=6, b=4, c=15$ 时，满足 $6 \mid 4 \times 15$，但 $6 \nmid 4$ 且 $6 \nmid 15$. 所以Ⅰ是假命题.

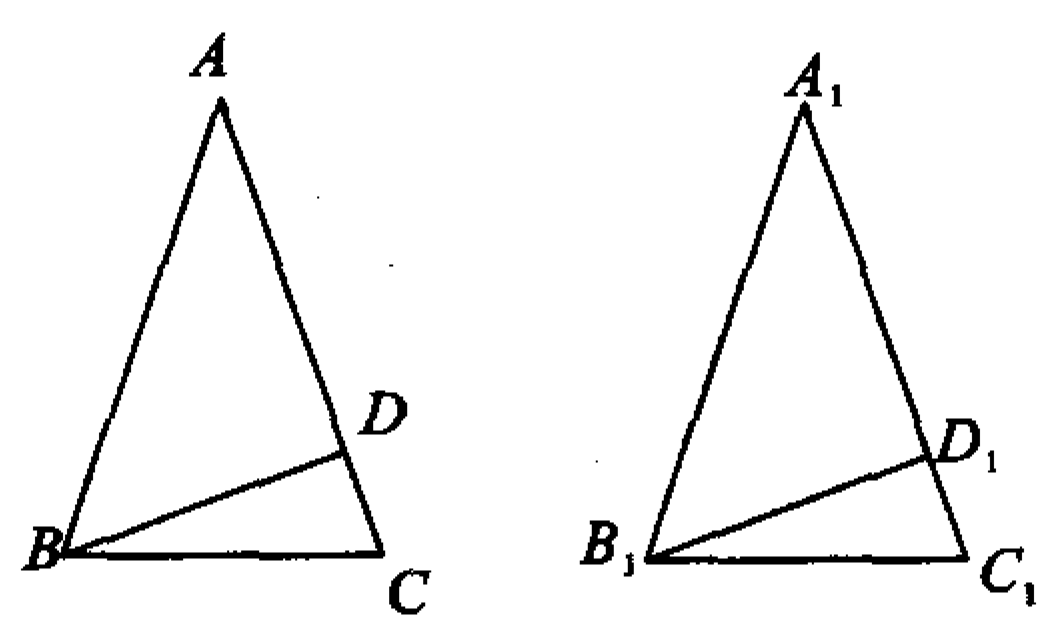
对于命题Ⅱ，设若 $a=6, b=3, c=15$ 时，满足 $6 \mid (3+15)$，但 $6 \nmid 3$ 且 $6 \nmid 15$. 所以Ⅱ也是假命题.

因此应选(C).

例 2.　过去有一本习题册上有这样一道习题：“两个等腰三角形，腰与腰上的高对应相等，求证：这两个等腰三角形全等。”有的同学拿过题来，立即如图 1 画出两个等腰三角形，并且写出了“证明”。满以为这个命题是真命题，其实，这个命题是个假命题。

如图 2 所示，$\triangle ABC$ 中，$AB = AC = 1$，$\angle BAC = 60°$. AC 边上的高 $BD = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\triangle A_1B_1C_1$ 中，$A_1B_1 = A_1C_1 = 1$，$\angle B_1A_1C_1 = 120°$. A_1C_1 边上的高 $B_1D_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$. 这两个等腰三角形满足

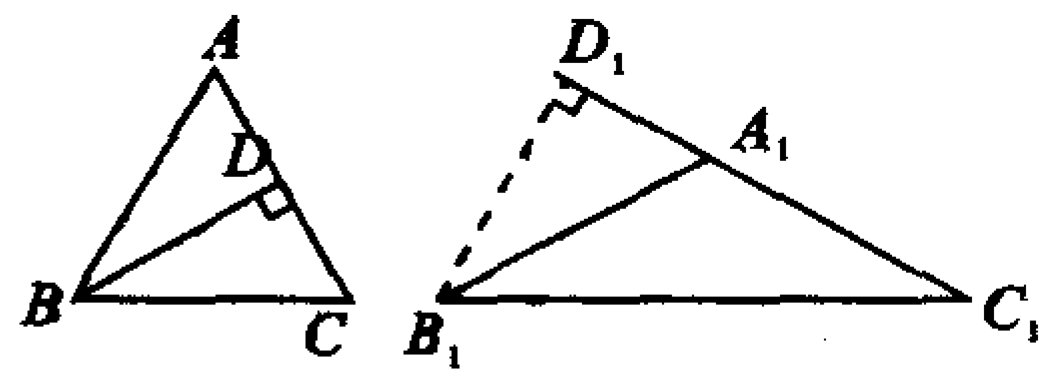


（图 1）

“腰与腰上的高对应相等”的条件，显然 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A_1B_1C_1$ 并不全等。找到了这个反例，就可以判定“两个等腰三角形，腰与腰上的高对应相等，求证：这两个等腰三角形全等。”是道错题。

分析原因，腰相等的两个等腰三角形，顶角可以相等，也可以

不等。当顶角一个为锐角 α，另一个为钝角 $180^\circ-\alpha$ 时，高线的垂足一个在腰上，另一个在腰的延长线上。但这两条高却是相等的。显然这两个等腰三角形并不全等。通过这个反例，会使我们的思维更加全面。



（图2）

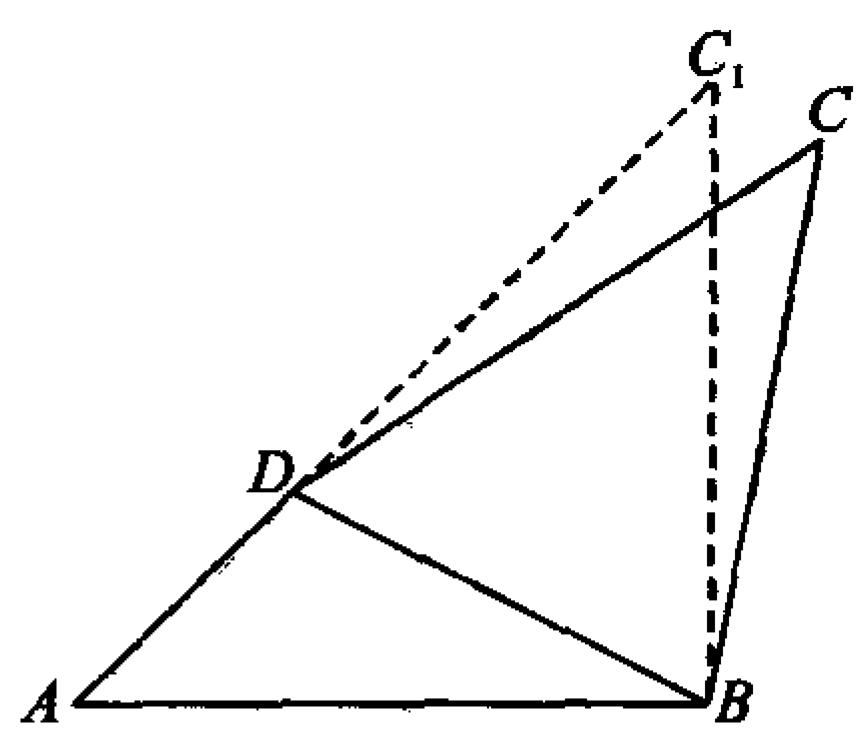
例3. 过去有一篇文章中，曾把"有一组对边及一组对角相等的四边形是平行四边形"想当然地认为是真命题。文中没给证明。当时的读者们也没仔细推敲。过了十多年，人们找到了一个反例，从而否定了这个命题。我们再给一个反例如下：

先作 $\triangle ABD$，使 $\angle DAB=45^\circ$，$\angle ABD=30^\circ$. 因此有 $\angle ADB=105^\circ$. 再作 $\angle ABC=105^\circ$，此时 $\angle DBC=75^\circ$. 作 $\angle BDC=60^\circ$，交成 $\triangle CDB$. 则 $\angle BCD=45^\circ$.

这时，在四边形 $ABCD$ 中，对角 $\angle A=\angle C=45^\circ$.

下面我们证明 $AB=CD$. 为此，过 B 作 $C_1B\perp AB$，交 AD 的延长线于 C_1. 则，$\angle DBC_1=60^\circ$，$\angle BDC_1=75^\circ$. 易知 $\triangle BDC_1\cong\triangle DBC$，所以 $BC_1=CD$.

此外，在 $\triangle ABC_1$ 中，$\angle ABC_1=90^\circ$，$\angle A=45^\circ\Rightarrow\angle C_1=45^\circ$. 因此 $C_1B=AB$. 所以有 $AB=CD$ 成立。



（图3）

显然，四边形 $ABCD$ 中，对边 $AB=CD$，对角 $\angle A=\angle C=45^\circ$. 但四边形 $ABCD$ 不是平行四边形。

可见"有一组对边及一组对角相等的四边形是平行四边形"是个假命题。

例4. a,b 都是实数。判断下面五个命题中哪些是真命题，哪些是假命题？

（Ⅰ）若 $a>b$，则 $a^2>b^2$.

（Ⅱ）若 $|a|>b$，则 $a^2>b^2$.

(Ⅲ)若 $a>|b|$则 $a^2>b^2$.

(Ⅳ)若 $a^2>b^2$,则 $a>b$.

(Ⅴ)若 $a\neq|b|$,则 $a^2\neq b^2$.

解　要断定一个命题为真,必须经过严格的推证;要断定一个命题是假命题,我们可以采取举反例的方法。

对命题(Ⅰ),当 $a=-2,b=-3$ 时,$-2>-3$ 但$(-2)^2<(-3)^2$.

可知(Ⅰ)为假命题。

对命题(Ⅱ),当 $a=-2,b=-3$ 时,$|-2|>-3$,但$(-2)^2<(-3)^2$

可知(Ⅱ)为假命题。

对命题(Ⅲ),我们可以证明它是真命题。

因为易知 $a>|b|$,可知 $a>0$ 且 $a-|b|>0$……①,

此外 $a+|b|>0$……②

①×②可得$(a-|b|)\times(a+|b|)>0$,即 $a^2-|b|^2>0$,也就是 $a^2>|b|^2$.

但 $b^2=|b|^2$,所以 $a^2>b^2$ 成立。

对命题(Ⅳ),设 $a=-2,b=-1$,$(-2)^2>(-1)^2$,但 $-2>-1$. 可知(Ⅳ)是个假命题。

对命题(Ⅴ),设 $a=-3,b=3$,显然 $-3\neq|3|$,但$(-3)^2=3^2$. 所以命题(Ⅴ)是个假命题。

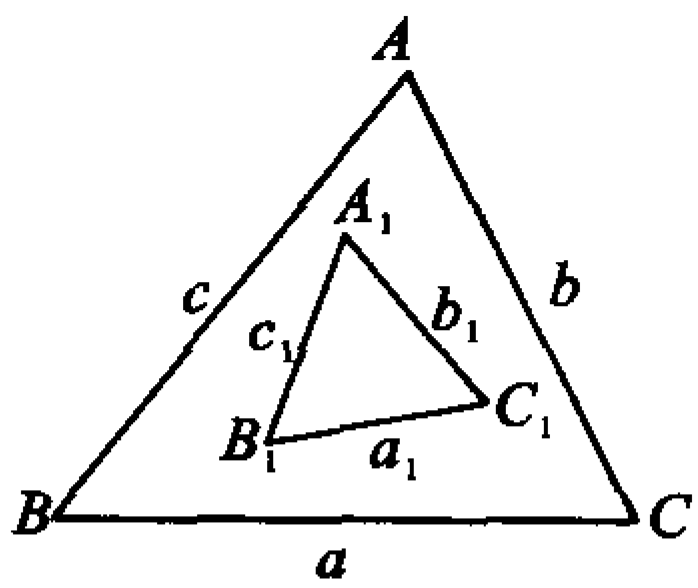
综上所述,只有命题(Ⅲ)是真命题,其余的命题(Ⅰ)、(Ⅱ)、(Ⅳ)、(Ⅴ)都是假命题。

例5.　有的同学在比较两个三角形面积时,想当然地利用了下述命题:$\triangle ABC$ 与 $\triangle A_1B_1C_1$ 中,$a\geqslant a_1,b\geqslant b_1,c\geqslant c_1$. 则 $S_{\triangle ABC}\geqslant S_{\triangle A_1B_1C_1}$"这个同学并以图4所示,直观地说明上述这个命题。这更使一些同学容易相信这是个真命题。

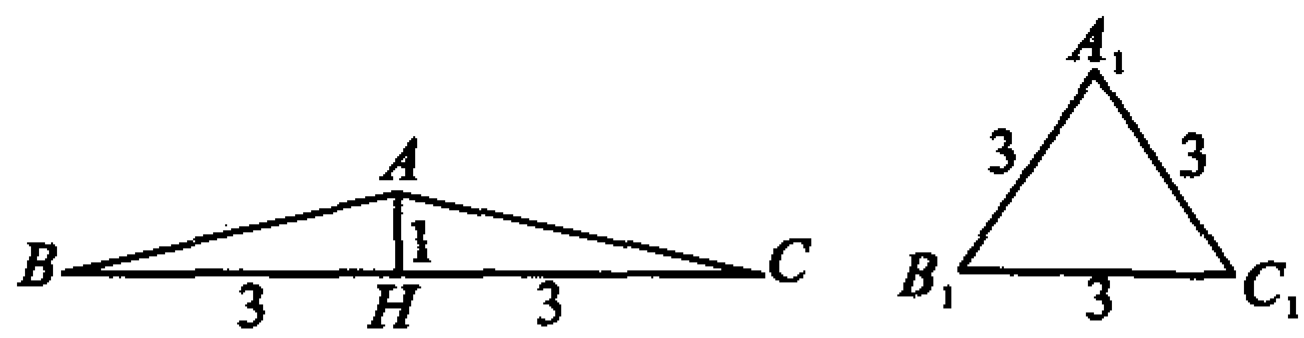
请你举出反例,说明这个命题是假命题。

解　由于三角形面积与一条边与这条边上的高的乘积有关。

如图5，$\triangle ABC$ 中作 $AH\perp BC$ 于 H. 使 $AH=1$，$BH=CH=3$，则 $AB=AC=\sqrt{10}>3$



（图4）



（图5）

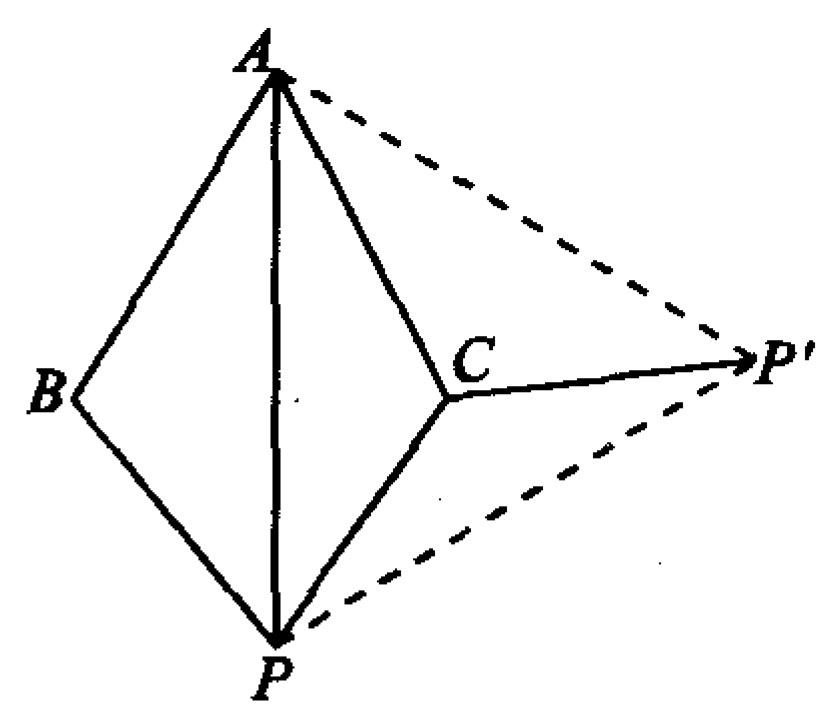
$\triangle A_1B_1C_1$ 中，$A_1B_1=B_1C_1=C_1A_1=3$，易知 $AB>A_1B_1$，$AC>A_1C_1$，$BC>B_1C_1$. 而 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times 6\times 1=3$. $S_{\triangle A_1B_1C_1}=\frac{\sqrt{3}}{4}\times 3^2>\frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}\times 9=3$. 也就是有 $S_{\triangle ABC}<S_{\triangle A_1B_1C_1}$. 这样的反例说明该同学的猜想命题是个假命题。

例6. 请指出下面证明中的错误：

已知：图6中，$AB=AC$，$\angle APB=\angle APC$.

求证：$\triangle ABP\cong\triangle ACP$.

误证：如图6，作 $\triangle ACP'$ 与 $\triangle ABP$ 全等（以 A 为中心 AP 为半径画弧，以 C 为中心 BP 为半径画弧，两弧交于 P' 点）这样 $AP=AP'$，$BP=CP'$.



（图6）

因为 $AP=AP'\Rightarrow\angle AP'P=\angle APP'$，但 $\angle AP'C=\angle APB=\angle APC$.

所以 $\angle CP'P=\angle CPP'$ （等量减等量其差相等）

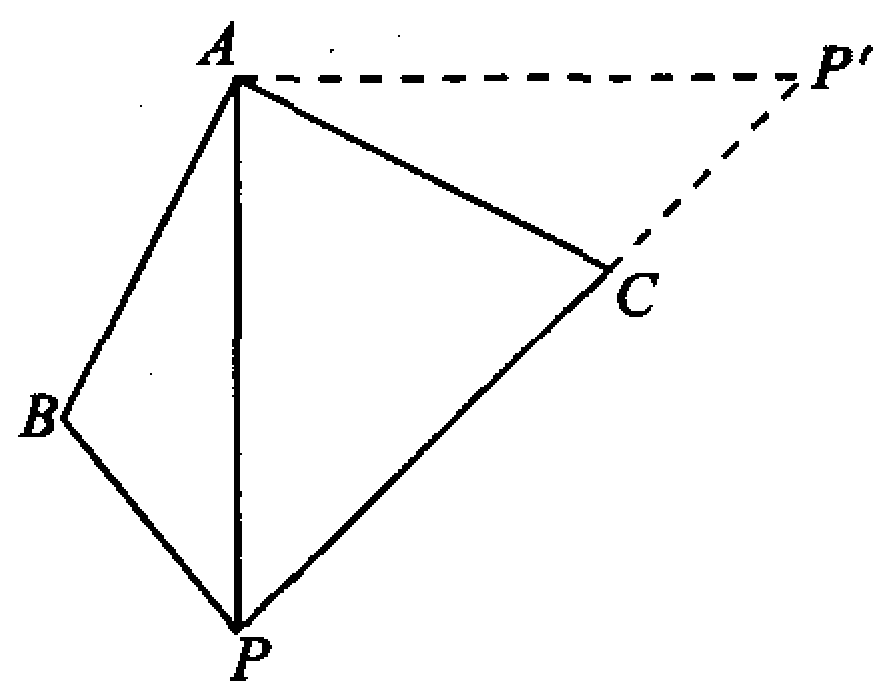
所以 $CP=CP'=BP$

在 $\triangle ABP$ 与 $\triangle ACP$ 中，由于 $AP=AP$，$\angle APB=\angle APC$，$PB=PC$（已证）

所以 $\triangle ABP\cong\triangle ACP(S,A,S)$.

对误证的分析　在$\triangle ABP$与$\triangle ACP$中，虽然$AB=AC$，$AP=AP$，$\angle APB=\angle APC$，但由于$\angle APB$不是AB、AP的夹角，$\angle APC$也不是AC、AP的夹角，所以并不能得出$\triangle ABP$与$\triangle ACP$全等的结论。事实上两个三角形有两边及其中一边的对角对应相等，这两个三角形不一定全等。但为什么在上述过程中我们却能证明$\triangle ABP$全等于$\triangle ACP$呢？错误究竟在哪里呢？

其实，错误恰恰在于由$\angle CP'P=\angle CPP'$推得$CP=CP'$这一步骤上。



（图 7）

在一般情况下，若C,P,P'三点构成一个三角形的三个顶点，这时推理是成立的；然而如果这三点不构成一个三角形的三个顶点，即$\angle CP'P=\angle CPP'=0°$时，就得不出$CP=CP'$这一结论。而这种情况却是可能发生的。当$\angle ABP$和$\angle ACP$互为补角时，这时虽然题设中的条件也能满足，但$\triangle ABP$与$\triangle ACP$却是不全等的。因为由图 7 可以看出，这时的$C,P,P'$三点恰好共线。误证在于凭籍直观论证，不知不觉中偷用了C,P,P'三点是一个三角形三个顶点的这一条件。由此可见，在分析问题时，应考虑各种可能的情况，以求论证的缜密。要作到这一点，就要求对每一步推理都要“问个为什么”. 利用举反例的方法帮我们排除不严格的地方。可以使我们避免常犯易犯的错误。

以上各例表明，数学中的反例，既是简明有力的否定方法，又是加深对概念和定理的理解的重要手段。它还有助于发现问题、活跃思维，避免常犯易犯的错误。反例的重要性正如美国数学家盖尔鲍姆所说：“**冒着过于简单化的风险，我们可以说（撇开定义、陈述以及艰苦的工作不谈）数学由两大类——证明和反驳组成。而数学发现也是朝着这两个目标——提出证明和构造反例。**”

例 7.　17 世纪法兰西数学家费尔马（1601—1665）观察到了

如下事实：

当 $n=0$ 时，$2^{2^0}+1=3$，是个质数，

当 $n=1$ 时，$2^{2^1}+1=5$，是个质数，

当 $n=2$ 时，$2^{2^2}+1=17$，是个质数，

当 $n=3$ 时，$2^{2^3}+1=257$，是个质数，

当 $n=4$ 时，$2^{2^4}+1=65537$，是个质数，

数学家费尔马试图把这种通过有限个特例观察得到的结论推广到一般情况去，由此得出猜想：对任意的非负整数 n，形如 $F_n=2^{2^n}+1$ 的数都是质数。这就是著名的费尔马猜想。

在费尔马的时代，对这个结论当时既不能证明，也不能否定。事隔 100 多年后，大数学家欧拉举出了一个反例，

当 $n=5$ 时，$2^{2^5}+1=4294967297$ 是个合数，从而否定了费尔马的这个猜想。

我们可以如下证明 $641\mid 2^{2^5}+1$：

因为 $2^{2^5}+1=2^{32}+1=2^{5+27}+1=2^5(2^9)^3+1\equiv 32\times(-129)^3+1(\mathrm{mod}641)\equiv 32\times(-2146689)+1\equiv 32\times 20+1\equiv 641\equiv 0(\mathrm{mod}641)$

所以 $641\mid 2^{2^5}+1$.

因此 641 是 $2^{2^5}+1$ 的一个约数。

可见，构造反例否定一个命题往往也不是轻易之举。

例 8. 在 20 世纪 50 年代的一些书中，还认为“三角形中有两条外角平分线长相等，则这个三角形是等腰三角形”是个真命题。

后来人们在解数学竞赛题中发现了这样一个反例：如图 8 所示的 $\triangle ABC$ 中，

设 $\angle BAC=12°$，$\angle BCA=36°$，$\angle ABC=132°$. 作 $\angle BAC$ 外角 $\angle BAG$ 的平分线交 CB 延长线于 D.

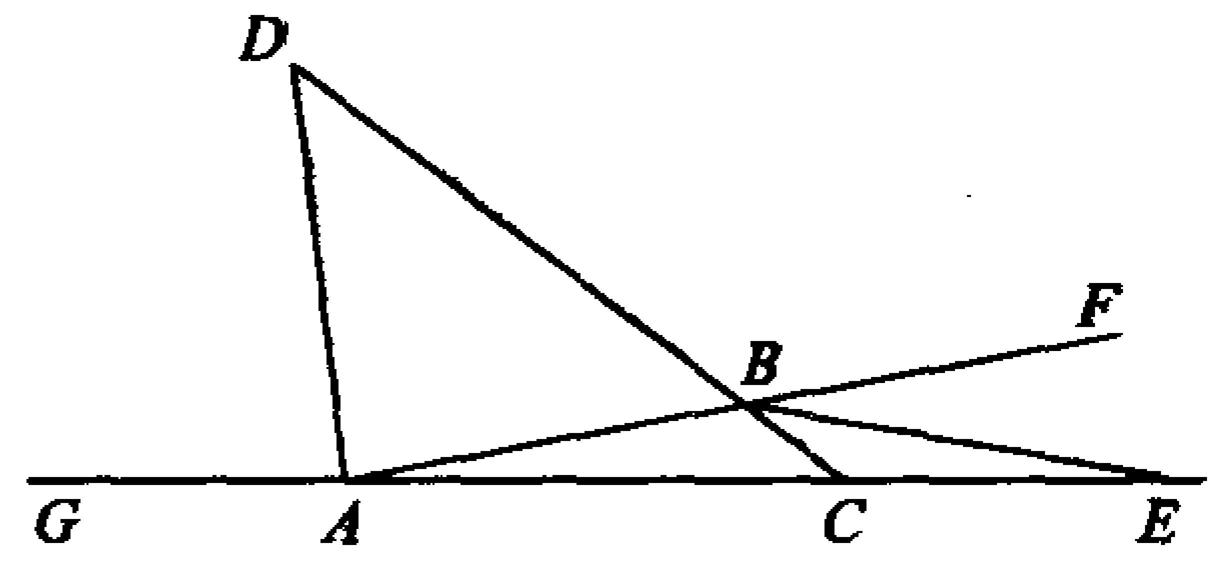
作 $\angle ABC$ 的外角 $\angle CBF$ 的平分线交 AC 延长线于 E.

则容易计算得 $\angle BEC=\angle ACB-\angle CBE=36°-24°=12°=$

$\angle BAC$. 所以推得 $BE=AB$.

同理可以推得 $\angle ABD=48°=\angle ADB$, 因此 $AD=AB$. 所以 $BE=AD$.

这时我们看到 $\triangle ABC$ 的外角平分线 $AD=BE$, 但是 $\triangle ABC$ 显然不是等腰三角形。



(图 8)

因此,"三角形中有两条外角平分线长相等,则这个三角形是等腰三角形"是个假命题。

例 9.　欧拉猜想

对任意的整数 $n\geqslant 3$, 方程 $x_1^n+x_2^n+x_3^n+\cdots+x_{n-1}^n=x_n^n$ 没有非平凡的整数解。

在 1960 年三个美国数学家(*L. J. Lander T. R. Parkin* 和 *J. L. Selfridge*)推翻了欧拉猜想,他们的文章发表在《计算机世界》21(1967)。后来 *N. D. Elkies*(*DSAMO* 获奖者)对 $n=5$ 的情况找到了反例: $133^5+110^5+84^5+27^5=144^5$, 从而否定了欧拉猜想。其寻求 144 的过程如下:

设 $133^5+110^5+84^5+27^5=k^5$, 显然应有 $k\geqslant 134$. 此外

$$k^5=133^5+110^5+84^5+27^5<133^5+110^5+(27+84)^5<133^5\times 3<\frac{3125}{1024}\times 133^5=\left(\frac{5}{4}\right)^5\times 133^5$$

可得 $k<\frac{5}{4}\times 133=166.25$, 所以 $134\leqslant k\leqslant 166$.

注意到一个自然数的 5 次幂的个位数字与这个自然数的个位数字相同。因此 $133^5+110^5+84^5+27^5$ 的个位数字与 $133+110+84+27=354$ 的个位数字相同,是 4,所以 k 只能是 134,144,154,164 中的一个。

由于 $133\equiv 1\pmod 3$, $130\equiv 2\pmod 3$, $84\equiv 0\pmod 3$, $27\equiv 0\pmod 3$,

我们有 $k^5=133^5+110^5+84^5+27^5\equiv1^5+2^5\equiv0(mod3)$.

这意味着 k 是 3 的倍数,所以 k 只能是 144.

经具体计算成立 $133^5+110^5+84^5+27^5=144^5$,表明方程存在非平凡的整数解。

反例也是数学中人们悉心追求的美感之一。正如数学家盖尔鲍姆在一本书中所说:"**一个数学问题用一个反例予以解决,给人的刺激犹如一出好的戏剧。为数学作出的许多最优雅和艺术性很强的贡献属于这个流派。**"

让我们在学习数学中学会举反例的方法。它会增强我们的分析、批判性的品质,培养创新意识。

研究练习题 2-4

1. "设$\triangle ABC$三边长分别为 a,b,c 满足 $a+\frac{1}{a}=b+\frac{1}{b}=c+\frac{1}{c}$,则$\triangle ABC$是正三角形。"是真命题吗? 是,请你证明;不是,请给出反例。

2. 请再构作一个不同于例 3 的反例,说明"一组对边相等且一组对角相等的四边形是平行四边形"不是真命题。

3. "一组对边相等且一条对角线平分另一条对角线的四边形是平行四边形"是真命题吗?

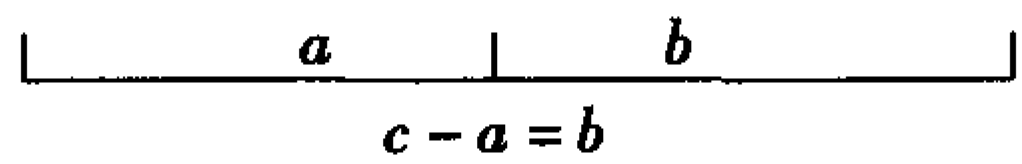
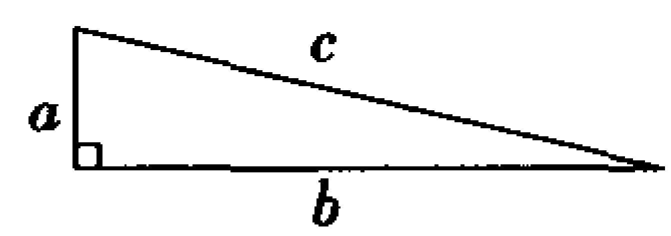
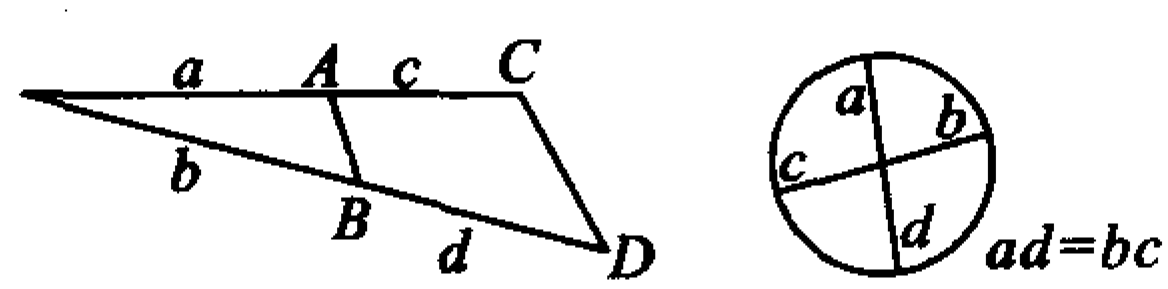
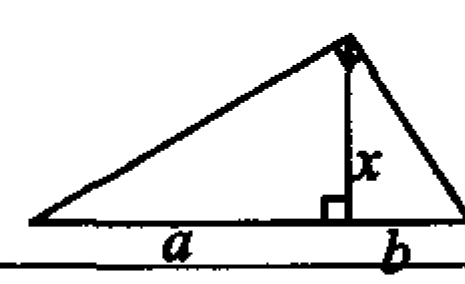
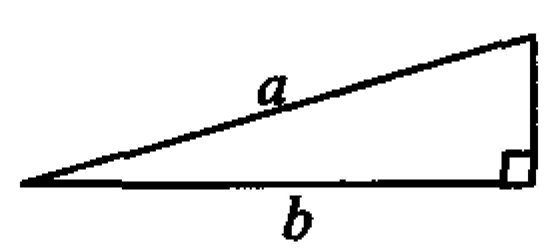
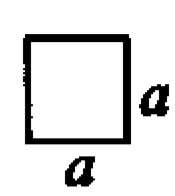
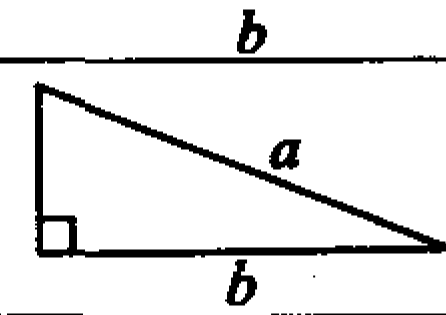
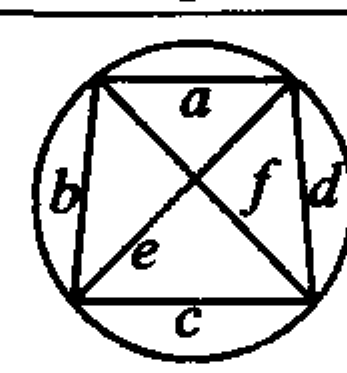
4. "如果对任意整数 x,二次三项式 ax^2+bx+c 的值恒为整数,那么系数 a,b,c 全为整数。"是真命题吗?

§2.5 构作图形帮你解题

数与形是数学中的两大柱石。发现数与形的联系并加以应用,是学好数学的重要途径与方法。

小学解算术四则应用题时的图解法，已经体现了数与形的联系。在初中用勾股定理解题时，同学们已经会用线段作图来表示 $\sqrt{a^2+b^2}$，其中 $a>0$ 且 $b>0$.

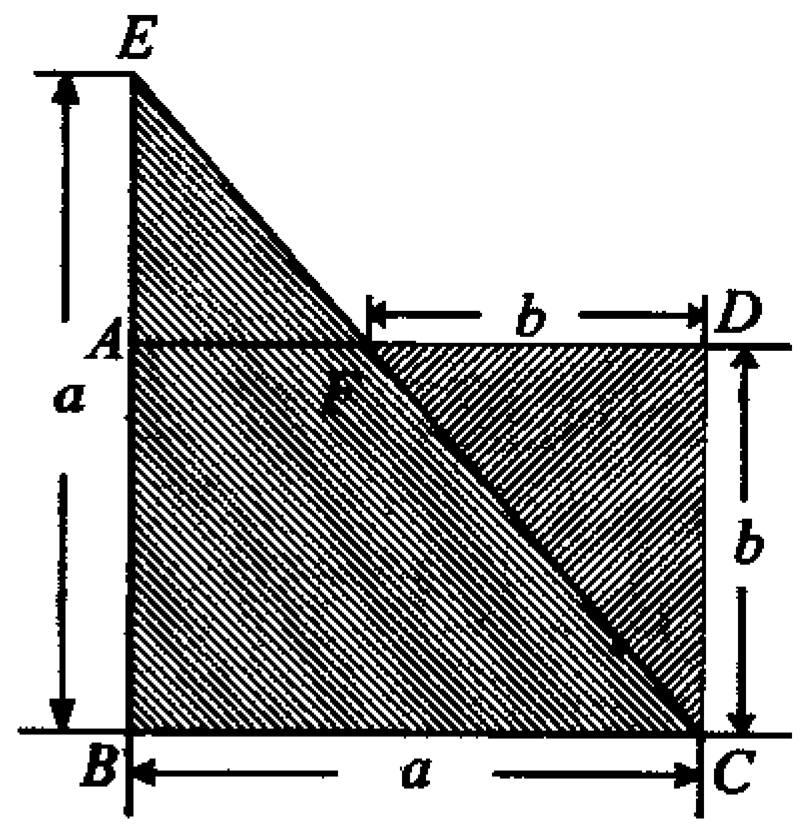
正实数可以用线段表示。两个正数之和、差可以用两条线段的和、差作图来表示。正数 a 的平方可以表示为边长为 a 的正方形的面积，当然，$\frac{a^2}{2}$ 可以用腰长为 a 的等腰直角三角形的面积来表示。在初中阶段常用的直线形表示的基本的代数关系式可综合列表如下：

代数关系式 a,x 等均为正数	相应的几何图形
$a+b=c$	
$c=\sqrt{a^2+b^2}$	
$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$	
$x=\sqrt{ab}$	
$a>b$	
a^2	
ab	
$\frac{ab}{2}$	
$ac+bd=ef$	

我们正是利用这些简单的基本关系式的图形表示及其组合进行巧妙地组合,来证明相关的代数问题。

例 1. 若 $a>0,b>0$,求证 $a^2+b^2\geqslant ab$

分析 所证的不等式等价于$\frac{a^2}{2}+\frac{b^2}{2}\geqslant 2ab$. $\frac{a^2}{2}$可作为腰为 a 的等腰三角形的面积,$\frac{b^2}{2}$可作为腰为 b 的等腰三角形的面积,ab 可作为边长为 a,b 的长方形面积。于是可得图 1 的构图。



(图 1)

证明 作长方形 $ABCD$,使 $BC=a,CD=b$(不妨 $a\geqslant b$)。延长 BA 到 E,使 $BE=a$. 连接 EC,交 AD 于 F. 则 $S_{\triangle EBC}=\frac{a^2}{2}$,$S_{\triangle FDC}=\frac{b^2}{2}$,而 $S_{ABCD}=ab$.

显然 $S_{\triangle EBC}+S_{\triangle FDC}\geqslant S_{ABCD}$.

即$\frac{a^2}{2}+\frac{b^2}{2}\geqslant ab$,

也就是 $a^2+b^2\geqslant 2ab$. 容易看出,当且仅当 $a=b$ 时,成立等式。

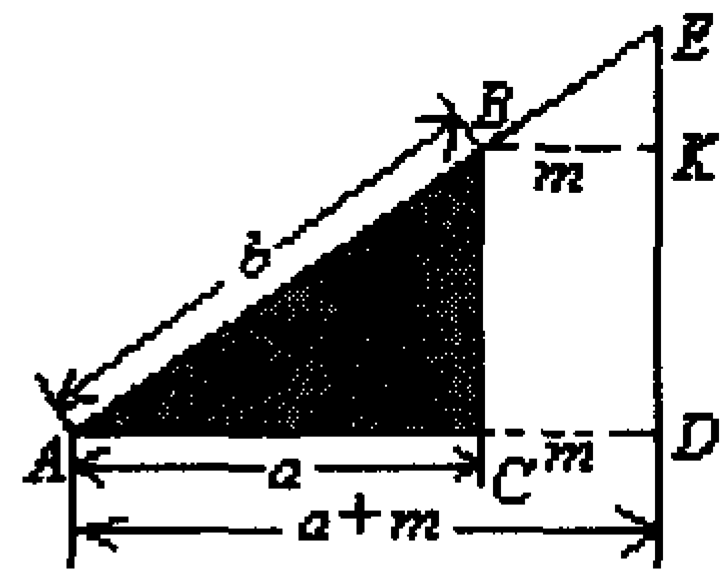
例 2. 若 a,b,m 都是正数,并且 $a<b$. 求证:$\frac{a+m}{b+m}>\frac{a}{b}$

分析 对正数 a,b 的关系 $a<b$ 可用直角三角形中直角边 a 小于斜边 b 来表示。同理,设想$\frac{a+m}{b+m}=\frac{a}{b}$时,可利用相似三角形来表示,于是得出如下的直观证法。

证明 作 $Rt\triangle ABC$,使 $\angle C=90°$,$AC=a$,$AB=b$ 延长 AC 到 D,使得 $CD=m$,则 $AD=a+m$.

过 D 作 AD 的垂线交 AB 的延长线于 E,过 B 作 AD 的平行线交 DE 于 K.

显见,$BE>BK=CD=m$.



（图 2）

由 $\triangle ACB \backsim \triangle ADE$，可得 $\frac{a}{b}=\frac{AD}{AE}=\frac{a+m}{b+BE}<\frac{a+m}{b+m}$

这样，我们利用图形证明了这个不等式。

其实，这个常用的重要不等式很好理解。设想，b 克的糖水中含糖为 a 克，当然有 $b>a>0$. 其浓度为 $\frac{a}{b}$. 若再溶入 m 克糖后，糖水的浓度增大，为 $\frac{a+m}{b+m}$，由 $\frac{a+m}{b+m}>\frac{a}{b}$，与糖水变得更甜的直感完全一致。

例 3.　正数 a,b,c,A,B,C 满足条件 $a+A=b+B=c+C=k$.

求证：$aB+bC+cA<k^2$.

这是第 21 届全苏数学竞赛八年级的一道试题。先给出原试题给出的代数解法，然后再与我们的几何解法比较。可以更好地领悟几何图形解法的妙处。

代数解法

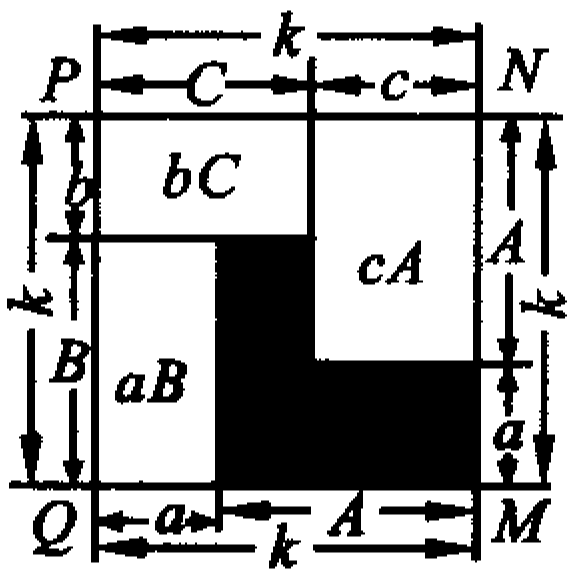
因为 $k^3=(a+A)(b+B)(c+C)$

$$\begin{aligned}&=abc+Abc+acB+ABc+abC+AbC+aBC+ABC\\&=abc+ABC+aB(c+C)+cA(b+B)+bC(a+A)\\&>aBk+bCk+cAk=k(aB+bC+cA)\end{aligned}$$

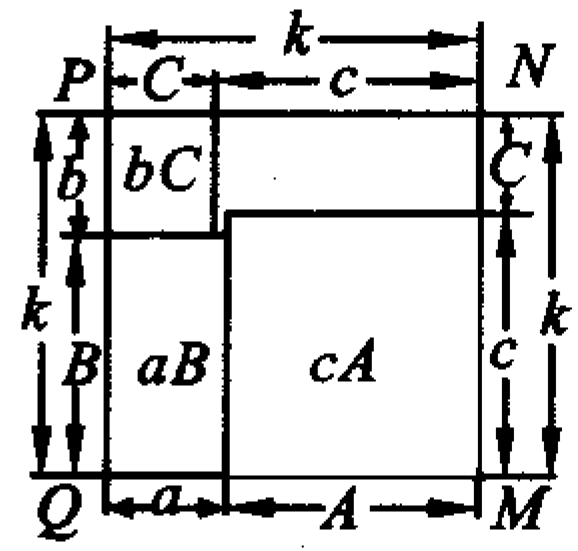
又因为 $k>0$，所以 $k^2>aB+bC+cA$.　即 $aB+bC+cA<k^2$.

不难见到，完成以上代数法证明，要求具备很好的因式分解的基本功。

几何证法　利用我们给出的代数关系式的几何表示，将 k^2 看成边长为 k 的正方形面积。先作一个边长为 k 的正方形 $PQMN$，设 $PQ=b+B$，$QM=a+A$，若 $a\leqslant C$，令 $PN=C+c$，$MN=A+a$，在正方形 $PQMN$ 内，如图 3 完成面积为 aB,bC,cA 的三个长方形，三个未涂阴影的长方形面积之和恰为 $aB+bC+cA$，显然小于正方形 $PQMN$ 的面积 k^2.



（图3）



（图4）

若 $a>C$，如图4完成面积为 aB,bC,cA 的三个长方形，三个未涂阴影的长方形面积之和恰为 $aB+bC+cA$，显然也小于正方形 $PQMN$ 的面积 k^2.

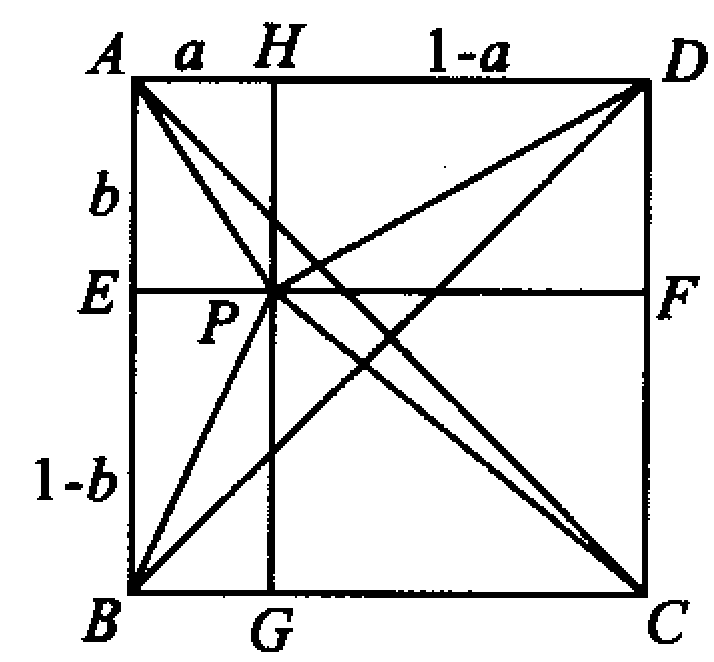
这个证法简单明快，直观有趣，小学生也可以理解。

例4. 已知 $0<a<1,0<b<1.$

求证：$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{a^2+(1-b)^2}+\sqrt{b^2+(1-a)^2}+$

$\sqrt{(1-a)^2+(1-b)^2}\geqslant 2\sqrt{2}.$

分析 求证的不等式左边的每一项都可以视为一个直角三角形的斜边，所证要判断这四个线段之和不小于 $2\sqrt{2}$. 只要证明其中每两条线段之和不小于$\sqrt{2}$即可。而$\sqrt{2}$可以由边长为1的正方形的对角线构作出来，由此形成如下的证法。



（图5）

证明 作边长等于1的正方形 $ABCD$，在 AD 上取点 H，使 $AH=a$，则 $HD=1-a$. 在 AB 上取点 E，使 $AE=b$，则 $EB=1-b$. 过 H 作 AB 的平行线交 BC 于 G，过 E 作 AD 的平行线交 CD 于 F，EF 与 HG 相交于 P. 连接 PA,PB,PC,PD,AC,BD，则

$$PA=\sqrt{a^2+b^2},PB=\sqrt{a^2+(1-b)^2},$$

$$PC=\sqrt{(1-a)^2+(1-b)^2},PD=\sqrt{b^2+(1-a)^2},$$

$$AC=BD=\sqrt{2}.$$

在$\triangle APC$ 中，$PA+PC\geqslant AC=\sqrt{2}$，……①

在$\triangle BPD$中，$PB+PD\geqslant BD=\sqrt{2}$，……②

由①+②，得　$PA+PB+PC+PD\geqslant 2\sqrt{2}$.

即$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{a^2+(1-b)^2}+\sqrt{b^2+(1-a)^2}+\sqrt{(1-a)^2+(1-b)^2}\geqslant 2\sqrt{2}$.

例 5.　设$x>0$，求证：$\dfrac{2+x}{1+x}\sqrt{1+(1+x)^2}\geqslant 2\sqrt{2}$.

我们给出两种证法。

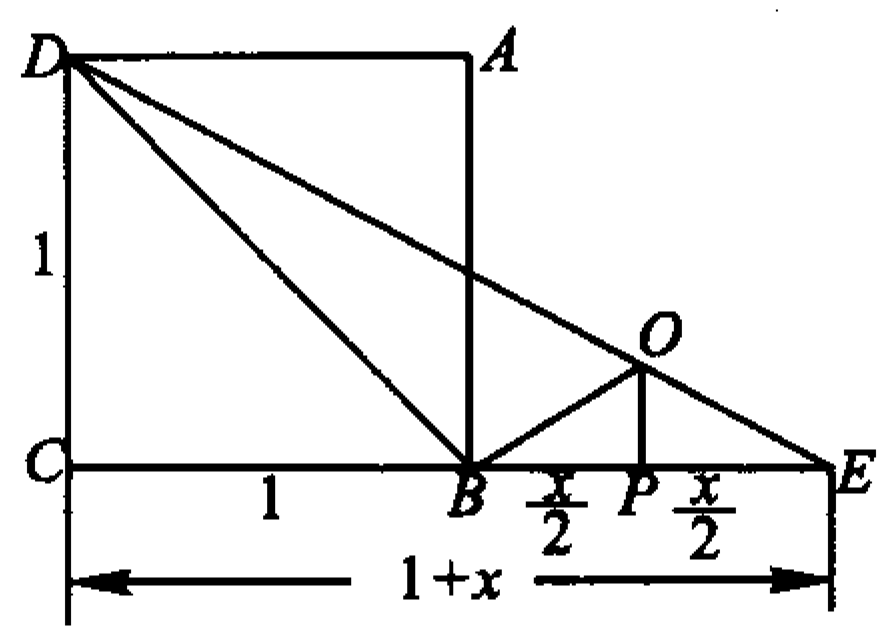
证法 1　要证　$\dfrac{2+x}{1+x}\sqrt{1+(1+x)^2}\geqslant 2\sqrt{2}$，

等价于证明　$\dfrac{\frac{2+x}{2}}{1+x}\geqslant\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+(1+x)^2}}$，

等价于证明　$\dfrac{1+\frac{x}{2}}{1+x}\geqslant\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+(1+x)^2}}$……（ * ）

作边长为 1 的正方形$ABCD$（$AB=BC=CD=DA=1$）

在CB延长线上取点E，使$BE=x$，则$CE=1+x$. 连接DE，则$DE=\sqrt{1+(1+x)^2}$. 取BE中点P，则$BP=PE=\dfrac{x}{2}$，$CP=1+\dfrac{x}{2}$. 连接BD，有$BD=\sqrt{2}$



（图 6）

过P作CD的平行线交DE于O，则有$\dfrac{CP}{CE}=\dfrac{DO}{DE}$，

即　$\dfrac{1+\frac{x}{2}}{1+x}\geqslant\dfrac{DO}{\sqrt{1+(1+x)^2}}$.

要证（ * ）式成立，只需证$DO\geqslant\sqrt{2}$即可。为此，连接BO，由

$\angle CDE \geqslant 45°$，则$\angle CED \leqslant 45°$. 所以$\angle OBD = 90° + 45° - \angle OBE = 135° - \angle CED \geqslant 135° - 45° = 90°$. 由于$\triangle OBD$中，$\angle OBD$为最大角，所以$OD$为最大边。即$DO \geqslant DB = \sqrt{2}$. 故（ * ）式成立。

证法2 先在一直线上依次取点A,E,P,C，使$AE=1$，$EP=x$，$PC=1$. 并作$PQ \perp AC$于P，使$PQ=1$，再过C作AC的垂线，使它与AQ的延长线交于B点，则在$Rt\triangle APQ$中，易知$AQ=\sqrt{1+(1+x)^2}$. 再由$QP /\!/ CB$，可知$\frac{AB}{AQ}=\frac{AC}{AP}=\frac{2+x}{1+x}$，所以

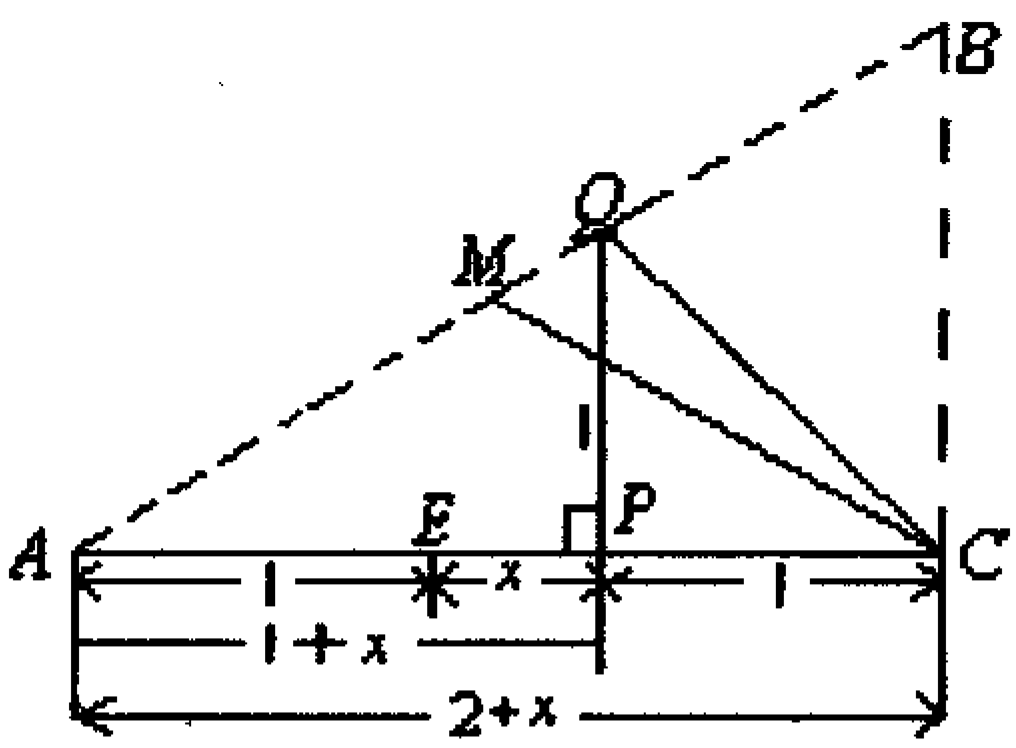
$$AB=\frac{2+x}{1+x}\sqrt{1+(1+x)^2} \cdots\cdots ①$$

取$Rt\triangle ABC$的斜边中点M，则

$$AB = 2CM \geqslant 2CQ = 2\sqrt{2} \cdots\cdots ②$$

由①、②可得

$$\frac{2+x}{1+x}\sqrt{1+(1+x)^2} \geqslant 2\sqrt{2}.$$



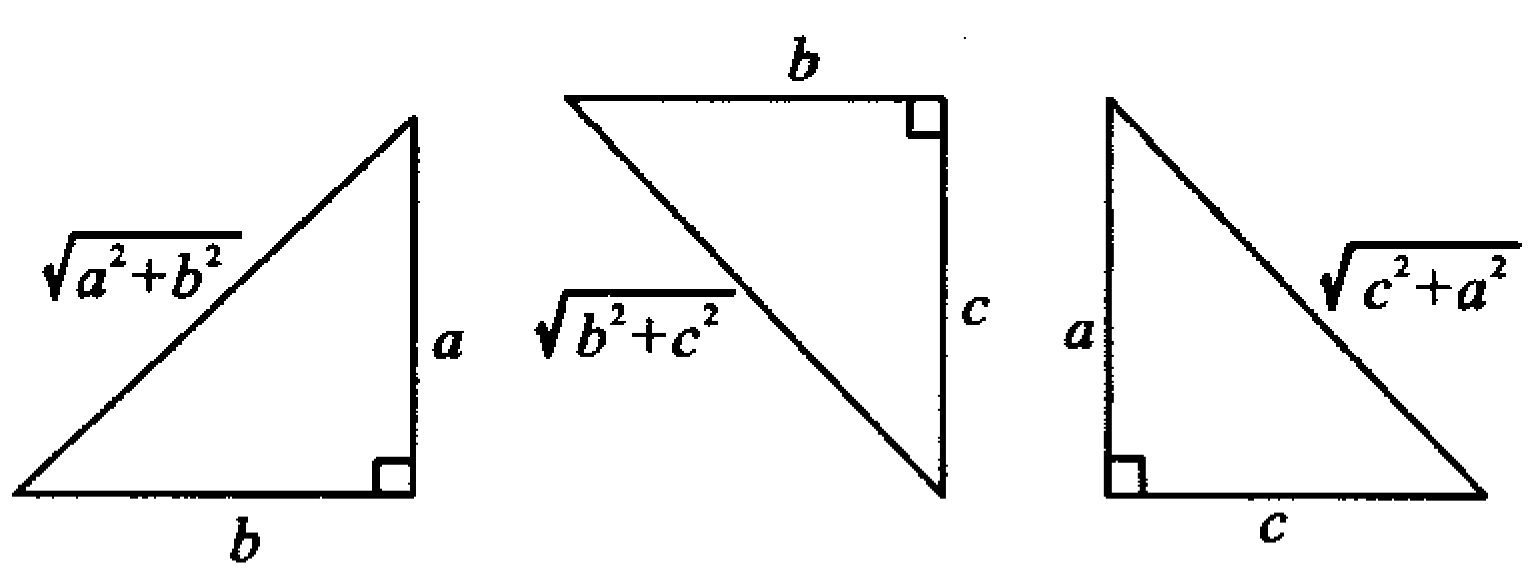
（图7）

例6. 若a,b,c都是正数。

求证$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}>\sqrt{c^2+a^2}$.

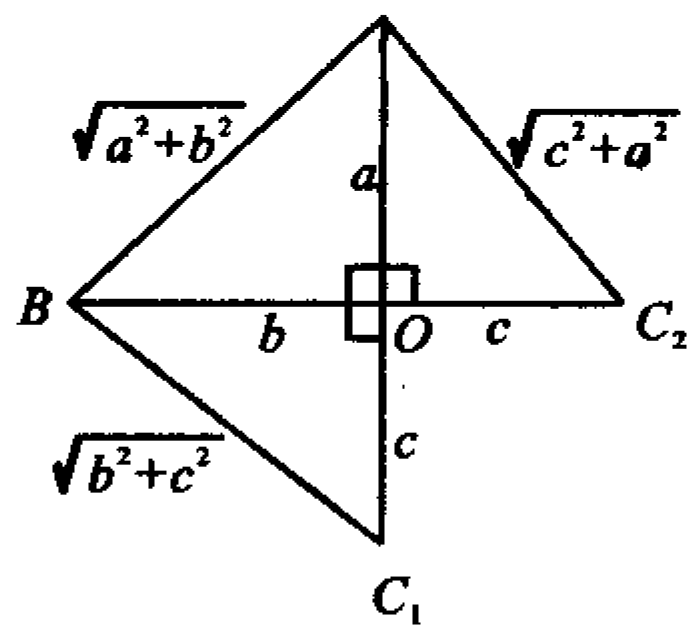
分析 $\sqrt{a^2+b^2}$、$\sqrt{b^2+c^2}$、$\sqrt{c^2+a^2}$都可以用勾股定理作为直角三角形的斜边构作出来（如图8）。

由所求证之不等式表明，所作出的三条线段组成三角形不等式。a,b,c公用，如图9集中在一起，这时

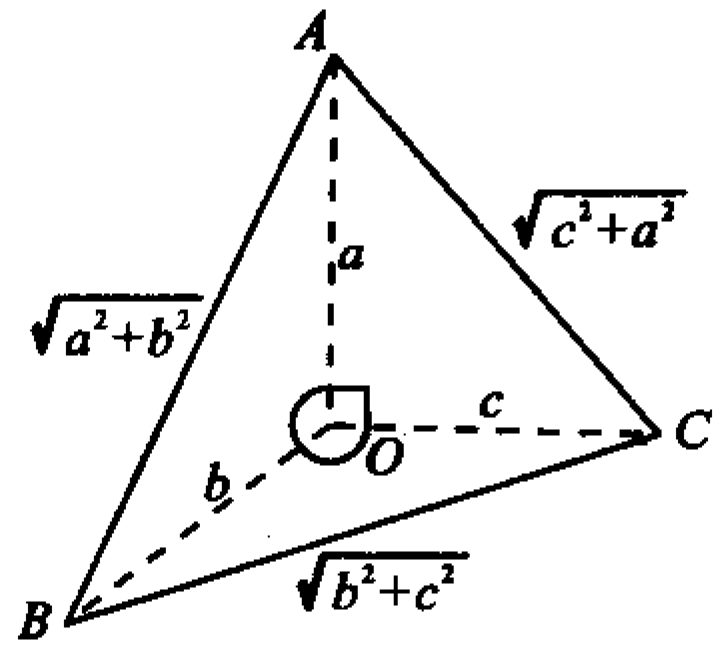


（图8）

$AB=\sqrt{a^2+b^2}$，$BC_1=\sqrt{b^2+c^2}$，$C_2A=\sqrt{c^2+a^2}$. 但AB，BC_1，C_2A并没有形成一个三角形的三条边，怎么办？需要使得C_2点与C_1点重合，OC_2与OC_1重合，这在平面上不能实现。只能形成如图10所示的空间图形，才能成为现实。在图10中，由三边有关系



（图 9）



（图 10）

$AB + BC > CA$，即得到所求证的不等式 $\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}>\sqrt{c^2+a^2}$

此法真乃妙趣横生！

构作图形帮我们解题，重要的一点是熟悉基本代数关系式的几何意义。证题过程实质是代数语言向图形语言的转换。其中的巧思构作会增加解题的美感，构作图形解题是发展数学创造性思维的一个有效途径。

研究练习题 2－5

1.　若非负实数 x,y 满足 $x+y=1$.

求证：$\sqrt{5}\leqslant\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2}\leqslant 1+\sqrt{2}$.

2.　设正数，a,b,c,d 中 a 最大，且 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$，

求证：$a+d>b+c$.

3.　a,b,c,d 为正实数且 $a<b,c<d$.

求证：$\sqrt{(a-b)^2+(c-d)^2}\leqslant\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}$.

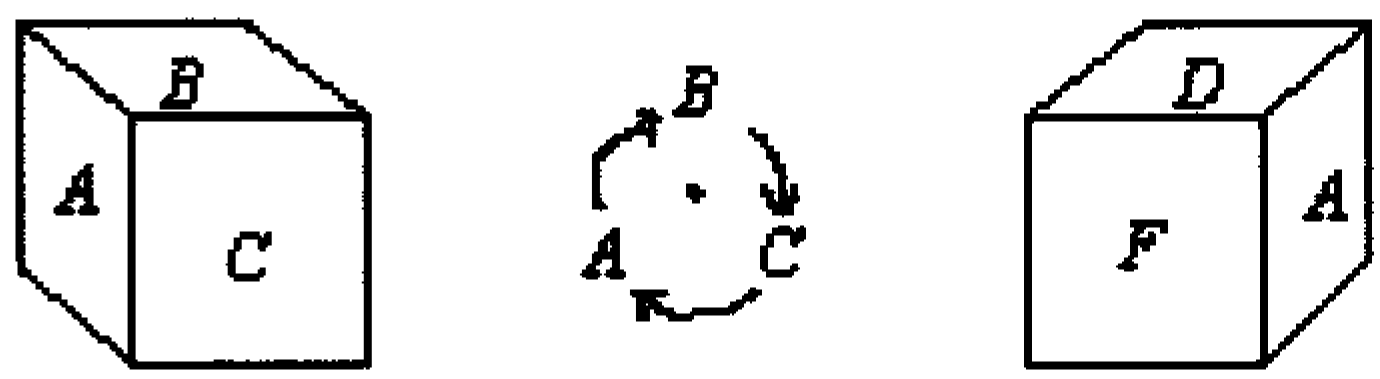
§2.6　趣味的逻辑推理问题

日常生活中，人们在观察现象以后总要进行推理。要正确推理，就要依据形式逻辑的基本规则。而数学是思维的科学，数学

是学习与锻炼思维的优良载体,数学是锻炼思维的体操。因此,要学会数学的思维方式,练习一些简单的逻辑推理问题是很有益处的。

一、简单的逻辑推理问题

例1. 图中(甲)、(乙)是同一个正六面体的从两个不同方位拍的照片,它的各面上分别标有 A,B,C,D,E,F 六个字母。



(甲)　　　　(乙)

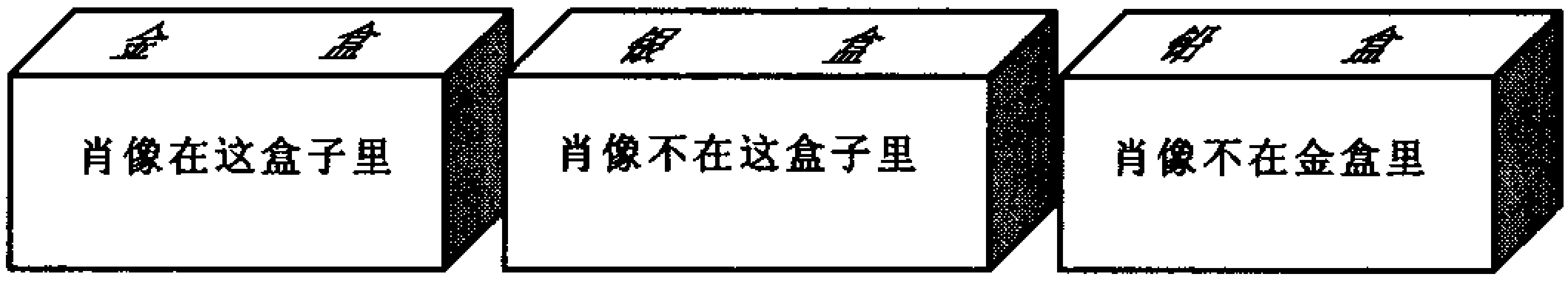
问:看不见的各面上的字母是什么?

解 从图上可见,A,B,C 所在各面有公共顶点。而且是以这个公共顶点为中心按顺时针方向排列的(见甲图)。根据这一特征可知图(乙)中,正方体后面与下面的字母分别是 B 与 C,即 F 的对面是 B;D 的对面是 C;进而可以肯定 A 的对面显然就是 E 了。

说明 本题把握观察出立方体摆的方位可以变化,但字母 A,B,C 所在的三个面共顶点,且这三个字母绕该顶点依顺时针的排列次序不变。因此在图(乙)中由 A 所在的面出现,A,B,C 三面所共的顶点就可以判定,B,C 所在面也随之而定。于是各面所对应的字母就确定了。

例2. 数学家斯摩林依据莎士比亚的名剧《威尼斯商人》中的情节编拟了一道问题:女主角鲍西娅对求婚者说:“这里有三只盒子,金盒、银盒、铅盒各一只。每只盒子的铭牌上各写有一句话。这三句话中,只有一句是真话。谁能猜中我的肖像放在哪只盒子里,谁就是我的丈夫。”盒子铭牌上的话如图所示:

其中有一个求婚者猜中了。请你想一想,这个求婚者是怎样猜中的?鲍西娅的肖像放在哪只盒子里?



分析　对这种问题算术四则计算已经无能为力,只能依据形式逻辑的排中律:一句话要么是真,要么是假,二者必居其一。

解　设想求婚者看到金盒的铭牌与铅盒的铭牌,所写的两句话的内容截然相反,因此可以断言其中必有一句是真话、另一句是假话。既然真话只有一句(见问题条件),那么银盒铭牌上的话“肖像不在这盒子里”就是假话,所以“肖像在这盒子里”才是银盒中的真实情况,也就是鲍西娅的肖像放在银盒里。

例 3.　华罗庚教授曾提出过这样一个问题。

一位教师让三位聪明的学生看了一下事先准备好的五顶帽子:三顶白帽子,两顶黑帽子。然后请这三位同学闭上眼睛并给每人戴上一顶帽子,将余下的两顶帽子收藏起来。随后,请三位学生睁开眼睛后说出自己头上所戴帽子的颜色。三个人睁开眼睛互相看了一下,踌躇了一会,觉得为难。而后,三个人几乎同时说出了自己头上所戴帽子的颜色。请问,这三个人是如何判定自己头上所戴帽子颜色的?他们三人头上各戴的是什么颜色的帽子?

分析与解　三人所戴帽子的颜色有 3 种可能:二黑一白;一黑二白;三白。若是二黑一白,则必有一人能看到另二人戴的都是黑帽,从而马上断定自己戴的是白帽,不会“踌躇不决”。所以不会是二黑一白的情况。于是只能是一黑二白或三白的情况。也就是三人中至多只有一人戴黑帽子。这一点在“踌躇的”一瞬间,三个聪明的学生都意识到了。此时,每个学生都在想:“若我戴的是黑帽子,那么另二人应猜出自己是戴白帽子的。”由于三人都在踌躇为难,可见自己头上戴的是白帽子。因此,三个学生几乎同时猜到了自己戴的是一顶白帽子。

所以三个学生戴的都是白帽子。

整个分析过程,按分类讨论分为三类,对‘二黑一白’是通过反证法推理否定的。对‘至多一顶黑帽子’的情况,也是通过反设推理进行判定的。猜帽子的推理既是形式逻辑推理,也含有数学推理。是依据现象中反映的条件进行的推理。比如“踌躇了一会,觉得为难”就是一个举足轻重的条件。

通过上面的例子,我们可以看出,所谓逻辑推理,就是依据基本的逻辑关系,经过逻辑思维对命题作出正确的判断。这里解决问题的关键是形式逻辑的推理判定。而不主要依据数学定理来判定。

二、用表格帮助推理

有时,通过列表可以将条件系统化,能直观地帮助我们推理,有助于逻辑上操作。

例4. 有50个女孩,她们的肤色是白色的或黑色的,眼睛是蓝色的或褐色的。若有14个蓝眼睛白肤色,31个黑肤色,18个褐眼睛。求褐眼睛黑肤色的女孩子的人数。

(1971年美国竞赛题)

解 这是与数字结合的逻辑题,用列表法最好。

眼睛 / 肤色	蓝色	褐色	总计
白色	14		
黑色			31
总计		18	50

依题意填好表后,可知蓝眼睛女孩有14人,因此黑肤色蓝眼睛的女孩子有

$$32 - 14 = 18 \text{ 人。}$$

于是褐眼睛黑肤色的女孩子应有 $31 - 18 = 13$ 人。

例 5.　甲、乙、丙三个学生分别戴着 3 种不同颜色的帽子，穿着 3 种不同颜色的衣服去参加申办新奥运的活动。已知

(1)帽子和衣服的颜色都只有红、黄、蓝 3 种；

(2)甲没戴红帽子，乙没戴黄帽子；

(3)戴红帽子的学生没有穿蓝衣服；

(4)戴黄帽子的学生穿着红衣服；

(5)乙没有穿黄衣服。

试问：甲、乙、丙三人各戴什么颜色的帽子，各穿什么颜色的衣服？

分析与解　用列表方法帮助推理。画两张 3×3 的表：比如甲没戴红帽子即在左表中‘甲红’格画 ×；乙穿红衣服，就在右表‘乙红’格画○，其余类推。

帽子

	红	黄	蓝
甲	×		
乙	○	×	
丙			

衣服

	红	黄	蓝
甲			
乙	○	×	×
丙			

由(2)甲没戴红帽子，乙没戴黄帽子；可分乙戴红帽、丙戴红帽两种情况讨论。

若乙戴红帽子（‘乙红’画○），由(3)戴红帽子的学生没有穿蓝衣服（‘乙蓝’填 ×），就得出乙穿红衣服或黄衣服（‘乙红’是○或‘乙黄’是○），由(5)乙没有穿黄衣服（‘乙黄’不是○），所以得出乙穿红衣服（‘乙红’是○）。与(4)戴黄帽子的学生穿着红衣服矛盾。所以‘乙戴红帽子’不成立，只能是丙戴红帽子。

当丙戴红帽子时，左表‘丙红’填○，则‘乙红’填 ×。这时‘乙蓝’填○。

帽子

	红	黄	蓝
甲	×	○	
乙	×	×	○
丙	○		

衣服

	红	黄	蓝
甲	○		
乙	×	×	○
丙	×	○	×

于是知甲戴黄帽（‘甲黄’填○）。由条件(4)戴黄帽子的学生穿着红衣服，右表‘甲红’填○。再由(3)戴红帽子的学生没有穿蓝衣服，右表‘丙蓝’填×。至此可知，‘乙蓝’填○，‘丙黄’填○。

所以得出，甲：穿红衣服、戴黄帽子；

乙：穿蓝衣服、戴蓝帽子；

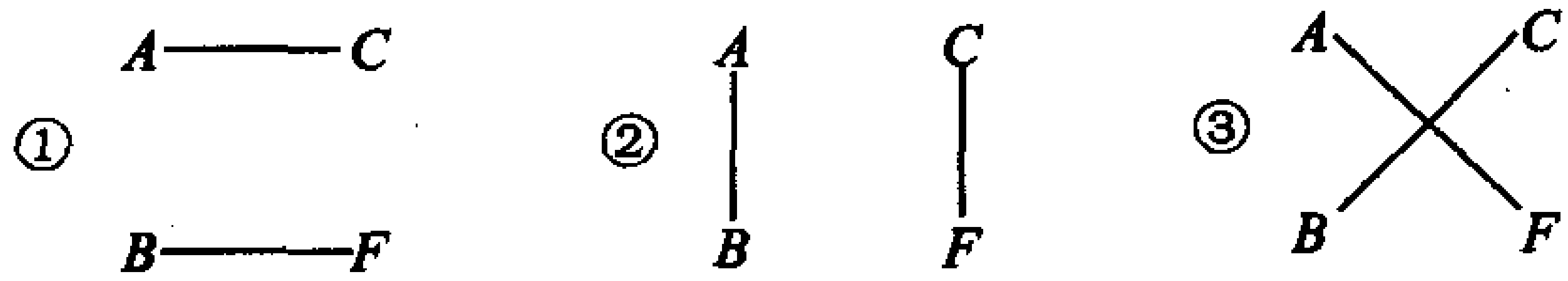
丙：穿黄衣服、带红帽子。

例6. A、B、C、D、E、F 六名选手进行乒乓球单打的单循环比赛（每人都与其他选手各赛一场）。每天同时在三张球台各进行一场比赛。已知第一天 B 对 D；第二天 C 对 E；第三天 D 对 F；第四天 B 对 C。问第五天 A 与谁对阵？

分析与解 我们用列表法帮助推理分析。用 (A,B) 表示 A 与 B 同台对阵比赛。由于是单循环比赛，六名选手每天在三张球台上分三组比赛。每位选手每天恰赛一场，每对选手 5 天内也恰赛一场。由于比赛与在几号球台无关，我们不妨记已知的各场比赛都安排在第 1 号台。我们只要按天顺次填好下表，其解答自然水落石出。

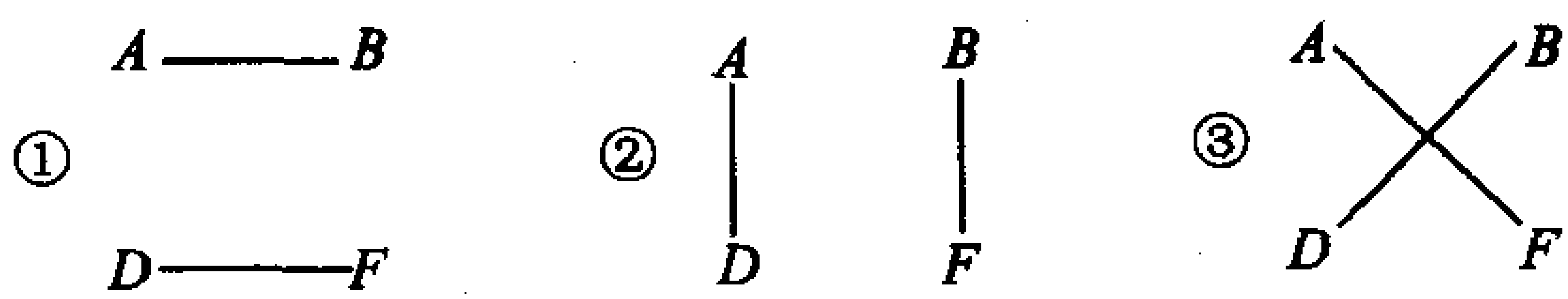
	1 号球台	2 号球台	3 号球台
第一天	(B,D)		
第二天	(C,E)		
第三天	(D,F)		
第四天	(B,C)		
第五天	$(A,?)$		

第一天　第 1 台(B,D)已赛，另两台为A、C、E、F组赛。可能的搭配为



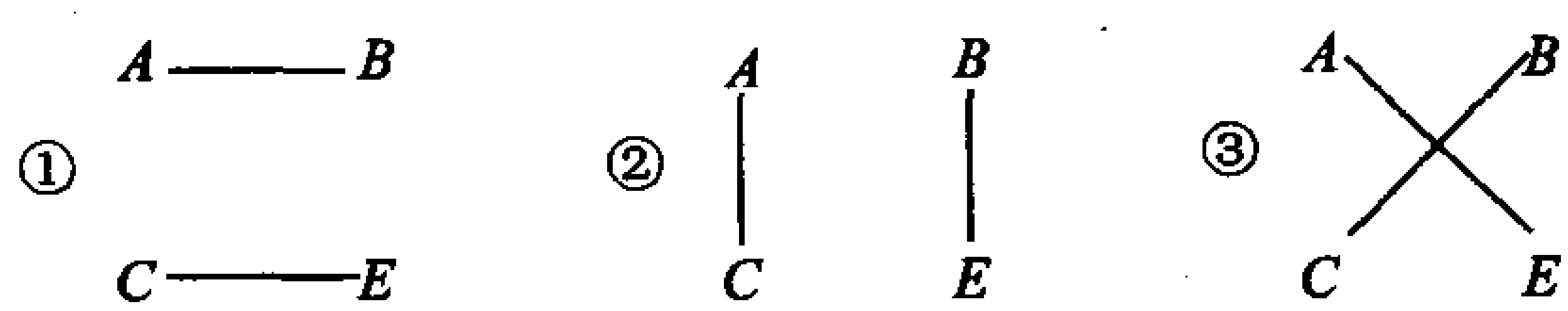
由于(C,E)在第二天赛，故排除③。所以第 2 台、第 3 台分别是(A,C)，(E,F)或(A,E)，(C,F)。

第二天　由于(C,E)在第 1 台，另两台是A,B,D,F组赛。可能的搭配为



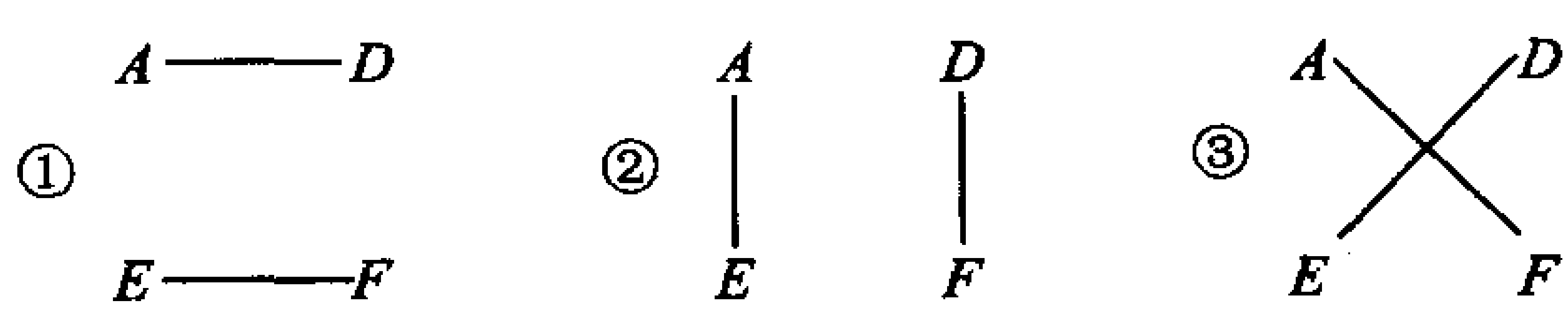
由于(D,F)在第三天赛，故①排除。由(B,D)在第一天已赛，故排除③。因此只能出现②(A,D)，(B,F)。

第三天　(D,F)已安排在第 1 台赛，另两台是由A,B,C,E组赛。可能的搭配为



由于(C,E)在第二天已赛，故排除①。又知(B,C)将在第四天比赛，故排除③。所以，另两台只能是(A,C)，(B,E)。此时可判定第一天第 2 台、第 3 台(A,C)，(E,F)不可能，只能是(A,E)，(C,F)。

第四天　第 1 台(B,C)比赛，另两台由A,D,E,F组赛。可能的搭配为



由于(A,D)在第二天已赛，故排除①。(D,F)在第三天已赛，故排除②。因此另两台只能是(A,F)，(D,E)组赛。

第五天 由于 A 与 C,D,E,F 前四天均已赛过,所以只能是 (A,B)。另两台分别为 (C,D),(E,F)。填如下表:

	1 号球台	2 号球台	3 号球台
第一天	(B,D)	(A,E)	(C,F)
第二天	(C,E)	(A,D)	(B,F)
第三天	(D,F)	(A,C)	(A,B)
第四天	(B,C)	(A,F)	(D,E)
第五天	(A,B)	(C,D)	(E,F)

答 第五天 A 与 B 对阵。另两台上分别是 C 与 D 对阵,E 与 F 对阵。

例 7. 老师拿来分别装有 1,2,3,4,5 颗球的同样的密封盒子,让五个学生每人选三盒来猜其中球的个数。

甲猜:第一盒 3 个,第四盒 5 个,第五盒 1 个;

乙猜:第一盒 4 个,第二盒 5 个,第三盒 2 个;

丙猜:第二盒 2 个,第四盒 1 个,第五盒 4 个;

丁猜:第二盒 3 个,第三盒 4 个,第四盒 5 个;

戊猜:第一盒 1 个,第三盒 3 个,第五盒 2 个。

老师听罢说:“真巧,你们每人都只猜对一盒,而且每一盒只有一人猜对”。请你判定,每个盒中各装几个球?

解 先将每个学生猜的情况列表如下:

	第一盒	第二盒	第三盒	第四盒	第五盒
甲	3			5	1
乙	4	5	2		
丙		2		1	4
丁		3	4	5	
戊	1		3		2

依题目条件可知:(1)表中的数有且只有 1,2,3,4,5 各一个数是正确的。(2)每一行、每一列的数中有且只有一个是对的。

看一看表中的数字马上便知:第四列取 1,第二列取 5,第三列取 4,第四列取 3,第五列取 2.

即第一盒到第五盒中的球的个数依次是 3,5,4,1,2.

例 8.　某校三人分别是初二、初三和高一年级的学生。他们报名参加校运动会。现已知所报项目信息如下:三人报了铅球、跳远和标枪,并且

(1)甲不在高一;

(2)在高一的不报铅球;

(3)在初三的参加跳远;

(4)乙既不在初三,也不报标枪。

问:甲、乙、丙分别在哪个年级,报名参加了何种项目?

解　依题目条件列出如下两个表:

(甲表)

	高一	初三	初二
甲	非		
乙		非	
丙			

(乙表)

	铅球	跳远	标枪
高一	非		
初三		是	
初二			

以上两表每行每列都应有且只有一个“是”,所以乙表中各空格均可填出,即初二学生报铅球,初三学生报跳远,高一学生报标枪。再由条件(4)可知乙是初二学生,于是甲表也可填出,甲是初三学生,丙是高一学生。

综上可得:甲是初三学生报跳远项目;乙是初二学生报铅球项目;丙是高一学生报标枪项目。

三、　更进一步的逻辑推理问题

情况比较复杂的“说真话说假话”等是一类很有趣的推理题目。利用逻辑链、排中律、简单的反证法,一般可以完成排查过

程和推理过程。

例 9. 某参观团根据下列的约束条件从 A,B,C,D,E 五个地方选定参观点。

(1)若去 A 地，也必须去 B 地；

(2)若去 E 地，A,D 两地也必须去；

(3)D,E 两地至少去一地；

(4)B,C 两地只去一地；

(5)C,D 两地都去或都不去。

问：参观团最多去几个地方？

解 假定参观团去 A 地，我们以 $A \xrightarrow{(1)} B$ 表示在去 A 地的前提下，依条件(1)也应去 B 地。并以类似的箭头表示法来简化语言叙述。

$$A \xrightarrow{(1)} B \xrightarrow{(4)} \text{非 } C \xrightarrow{(5)} \text{非 } D \xrightarrow{(3)} E \xrightarrow{(2)} A \text{ 与 } D$$

逻辑链中包含自相矛盾的“非 D 与 D”，由条件，因此不能去 A 地。

在不去 A 地的前提下，若去 B，依然会导致上面的逻辑矛盾，所以也不能去 B 地. 这样，非 $B \xrightarrow{(4)} C \xrightarrow{(5)} D$.

在去 D 的情况下，由(3)若去 E，则依据(2)A,D 两地也必须去，与“不去 A 地的前提”矛盾，所以 E 必不能去。因此参观团最多只能去 C,D 两地。

说明 这个题目解答开始时，我们不知道 A 地去或不去。但逻辑上只有去或不去两种可能性。因此分这两种情况进行讨论，按条件进行逻辑演绎，推出矛盾就表明前提不真。当然也可以从 B 地，C 地，……去或不去开始讨论。

例 10. 一位妇女，她的弟弟、她的儿子与女儿都是棋手。最差的棋手的孪生者与最佳棋手是异性；最差棋手与最佳棋手的年龄相同。请你判定谁是最差的棋手？

（美国 1975 年数学竞赛题）

分析与解 妇女、她的弟弟、儿子和女儿分别简记为‘妇’、‘弟’、‘子’和‘女’。这四个人中‘孪生’与‘同龄’的可能组合如下：

$$\left.\begin{matrix}\text{妇}\\ \text{弟}\end{matrix}\right\}\text{孪生(同龄)}\qquad \left.\begin{matrix}\text{子}\\ \text{女}\end{matrix}\right\}\text{孪生(同龄)}\qquad \left.\begin{matrix}\text{弟}\\ \text{子}\end{matrix}\right\}\text{同龄}\qquad \left.\begin{matrix}\text{弟}\\ \text{女}\end{matrix}\right\}\text{同龄}$$

下面以最差棋手为出发点，分类讨论。其依据是：①最差的棋手的孪生者与最佳棋手是异性；②最差棋手与最佳棋手的年龄相同。

1. 若妇人是最差棋手，则她的孪生者只能是‘弟’，根据①最差的棋手的孪生者与最佳棋手是异性，最佳棋手应为女性，只能是‘女’。由②最差棋手与最佳棋手的年龄相同，得‘妇’、‘女’应同龄，矛盾。所以妇人不是最差棋手。

2. 若‘弟’是最差棋手。‘弟’的孪生者只能是‘妇’，根据①最差的棋手的孪生者与最佳棋手是异性，最佳棋手应为男性，这只能是‘子’。由②最差棋手与最佳棋手的年龄相同，得‘弟’与‘子’同龄。但‘妇’为‘弟’的孪生者，所以推得‘妇’与‘子’同龄，矛盾。因此‘弟’不是最差棋手。

3. 若‘女’为最差棋手。‘女’的孪生者只能是‘子’。根据①最差的棋手的孪生者与最佳棋手是异性，最佳棋手应为女性，这只能是‘妇’。由②最差棋手与最佳棋手的年龄相同，得‘女’与‘妇’同龄，矛盾。所以‘女’不是最差棋手。

由于‘妇’、‘弟’、和‘女’均不能为最差选手，所以最差选手只能是‘子’。

事实上，当‘子’为最差棋手时，‘子’的孪生者只能是‘女’。根据①最差的棋手的孪生者与最佳棋手是异性，最佳棋手应为男性，这只能是‘弟’。由②最差棋手与最佳棋手的年龄相同，得‘子’与‘弟’同龄，能够相容。

所以，‘子’是最差的棋手。

例 11. 在远方海岛上，住着两个民族。一个是诚实族，一个

是谎言族。顾名思义，谎言族的人在说话或回答问题时总是说谎话；诚实族的人在说话或回答问题时全说真话。

某记者在此岛上遇到了四个岛民，记者照例对他们进行了访问："你们都是什么族的？诚实族的还是谎言族的？"

这四个人的回答如下：

第一个人说："我们四个人全都是谎言族的。"

第二个人说："我们之中只有一个人是谎言族的。"

第三个人说："我们四个人中有两个人是谎言族的。"

第四个人说："我们是诚实族的。"

问：第四个人是否真的是诚实族的？

解 由第一个人的回答可以判断：

(a)四个人中一定有诚实族的人(因为如果四个人全是谎言族的，那么谁也不会说"我们四个人全都是谎言族的"这句话)。

(b)第一个人必是谎言族的。

以上是由第一个人的回答作出的逻辑判定。

再由第二、第三人的回答进行推理：

(c)第二人必是谎言族的(因为他的话如果是实话，则第二、第三、第四人都应是诚实族的。即第二和第三人的回答应一致，但实际上第二和第三人的回答是矛盾的。因此第二个人的话不可能是实话)。

下面再看第三个人，如果第三个人是谎言族的，则由(a)可知第四个人是诚实族的。如果第三个人是谎言族的，那么由他的话可以推断确定第三、第四两个人是诚实族的。即无论第三人是诚实族还是谎言族，都推得第四个人是诚实族的人。所以第四个人真的是诚实族的人。

以上诸例都是逻辑推理趣题。这类问题的已知条件往往给我们的是若干条非数学内容的信息，其中正、误信息往往混杂在一起，或者若干信息是隐蔽的，要求我们按形式逻辑的方法排除错误信息，分离出正确信息，进一步推理获取全面信息，得出所要

求的结论。解这类问题要求很机敏、逻辑要很清楚,表达要很准确。可以从智力竞赛问题从易到难、从简到繁地进行练习。

学点逻辑可以使你的思维灵活、严谨、有条理。通过数学练习,可以帮我们学习和掌握基本的形式逻辑的常识。学习和掌握了基本的形式逻辑的常识,又可以提高我们分析问题解决问题的能力。

研究练习题 2-6

1. 在卡片上有下列四个命题,且仅有这四个命题。

在这张卡片上恰有一个命题是不真的。
在这张卡片上恰有二个命题是不真的。
在这张卡片上恰有三个命题是不真的。
在这张卡片上恰有四个命题是不真的。

假设在卡片上的每个命题要么是真的,要么是不真的。试找出上述四个命题中的真命题来!

2. 有 100 个人,其中至少有一个人说假话,但任意两个人中总有一个说真话的。问:这 100 个人中说真话的有多少人?讲假话的有多少人?

3. 张三说李四在说谎,李四说王五在说谎,王五说张三和李四都在说谎。问:张三、李四、王五三个人到底谁说的是谎话?

4. 某种商品的编号是一个三位数。现有五个三位数:

874,765,123,364,925.

其中每一个数与商品编号恰好在同一位上有一个相同的数字。问这个商品的编号是哪个三位数?

§2.7 奇偶分析例谈

整数用 2 为标准可分为两类:被 2 除余 1 的整数叫做奇数,记

做 $2n+1$,($n\in Z$);被 2 整除的整数叫做偶数,记做 $2n$,($n\in Z$)。

奇偶数有如下的一些简单基本的性质:

1. 奇数≠偶数. 换言之,"奇数 = 偶数"是一个矛盾。

2. 奇数 ± 奇数 = 偶数;偶数 ± 偶数 = 偶数;奇数 ± 偶数 = 奇数。

3. 奇数个奇数的和是奇数;偶数个奇数的和是偶数。任意个偶数的和是偶数。

4. 奇数 × 奇数 = 奇数;奇数 × 偶数 = 偶数;偶数 × 偶数 = 偶数;$(\text{奇数})^n$ = 奇数,其中 n 是正整数。若干个奇数的乘积是奇数。

5. 奇数的平方被 4 除余 1,偶数的平方被 4 整除。

6. 相邻二整数之和必为奇数,相邻二整数之积必为偶数。

7. 若干个整数之和为奇数,则至少有一个加数是奇数;若干个整数之积为奇数,则所有因数都是奇数。

8. n 是正整数,若 $(-1)^n=-1$,则 n 是奇数;若 $(-1)^n=1$,则 n 是偶数。

利用分析整数的奇偶性来解决问题的方法叫做奇偶分析。

(一)整数数串有关的奇偶性问题

将若干个整数按一定的规则排成一列,我们称为一个整数数串。往往依据最初几个数的奇偶性和数串构成规则可以确定数串中元素的一些性质。我们称为整数数串的奇偶性问题。

例 1. 一串数排成一行,它的规律是这样的:头两个数都是 1,从第 3 个数开始,每一个数都是前面两个数的和。即

$$1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,\cdots\cdots$$

问这串数的前 100000 个数中(含第 100000 个数在内)有多少个偶数?

解 我们很容易发现这串数中依次有奇、奇、偶、奇、奇、偶、

……,的规律。

因为任意相邻三个数都有

$$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n \quad (n\text{ 是自然数})$$

由 $a_1=1,a_2=1$,知 $a_3=2$ 是偶数,

$a_2=1$(奇数),$a_3=2$(偶数)知 $a_4=3$(奇数). 依次作下去很容易发现,任相邻的三个数中有且仅有一个是偶数. 而且是序号被 3 整除的那些项是偶数。

而 $100000\div 3=33333\frac{1}{3}$,即前 100000 个数中应有 33333 个是偶数。

例 2. 在数 $1^2,2^2,3^3,4^4,5^5,\cdots\cdots,2002^2002,2003^2003$,这些数的前面任意放置"+""-"号,并顺次完成所指出的运算,求出代数和。请你证明:这个代数和必定不等于 2003.

证明 $1^1,2^2,3^3,\cdots\cdots,2002^{2002},2003^{2003}$ 的奇偶性依次与

$1,2,3,\cdots\cdots,2002,2003$ 的奇偶性相同。

因此,在 $1^1,2^2,3^3,\cdots\cdots,2002^{2002},2003^{2003}$ 的前面任意放置"+""-"号后的代数和的奇偶性,与 $1+2+3+\cdots\cdots+2002+2003$ 的奇偶性相同。

由于 $1,2,3,\cdots\cdots,2002,2003$ 中共有 1002 个奇数,1001 个偶数,因此其和必为偶数。

所以在 $1^1,2^2,3^3,\cdots\cdots,2002^{2002},2003^{2003}$ 的前面无论如何放置"+""-"号后的代数和总是偶数,当然不会等于 2003.

(二)整数等式的奇偶分析问题

一个整数等式成立,则等号两端的奇偶性相同。反之,一个整数等式两端奇偶性不同,则这个等式一定不能成立。

例 3. 请你证明:方程 $x^2-y^2=2002$ 没有整数解.

证明 设有整数 x,y 满足 $x^2-y^2=2002$.

即　$(x+y)(x-y)=2\times1001$　　　　$(*)$

若 x,y 奇偶性相同,这时 $x+y$ 与 $x-y$ 均为偶数,那么 $(x+y)(x-y)$ 是4的倍数,而 2×1001 只是2的倍数,$(*)$产生矛盾。

若 x,y 奇偶性不同,这时 $x+y$ 与 $x-y$ 均为奇数,那么 $(x+y)(x-y)$ 是奇数,而 2×1001 是个偶数,$(*)$产生矛盾。

所以无论怎样的整数 x,y,$(*)$式都产生矛盾。因此方程 $x^2-y^2=2002$ 没有整数解。

例4.　你能找到三个整数 a,b,c 使得关系式

$(a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)(b+c-a)=3388$

成立吗?如果能找到,请举一例;如果找不到,请说明理由。

解　找不到满足条件的三个整数。理由如下:

如果存在整数 a,b,c 使 $(a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)(b+c-a)=3388$ 成立,因为3388是偶数,则左边的四个因子中至少有一个是偶数。不妨设 $a+b+c$ 是偶数。则

$a-b+c=(a+b+c)-2b$ 是偶数;

$a+b-c=(a+b+c)-2c$ 是偶数;

$b+c-a=(a+b+c)-2a$ 是偶数。

因此,$(a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)(b+c-a)$ 能被16整除,而3388不能被16整除,得出矛盾!

所以不存在三个整数 a,b,c 满足关系式 $(a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)(b+c-a)=3388$

(三)利用奇偶性证明某些整除问题

例5.　设 $x_1,x_2,\cdots\cdots,x_n$ 分别取值为 $+1$ 或 -1. 如果使得

$$\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_3}+\frac{x_3}{x_4}+\cdots\cdots+\frac{x_{n-1}}{x_n}+\frac{x_n}{x_1}=0$$

请你证明:$4\mid n$.

证明　由于 $x_1,x_2,\cdots\cdots,x_n$ 分别取值为 $+1$ 或 -1，所以 $\frac{x_1}{x_2}$，$\frac{x_2}{x_3},\frac{x_3}{x_4},\cdots\cdots,\frac{x_{n-1}}{x_n},\frac{x_n}{x_1}$ 这 n 个数也是分别取值为 $+1$ 或 -1，由于这 n 个数之和为 0，所以 -1 的个数与 $+1$ 的个数相等，因此可知 n 为偶数。不妨设 $n=2k$.

此时，$\frac{x_1}{x_2},\frac{x_2}{x_3},\frac{x_3}{x_4},\cdots\cdots,\frac{x_{n-1}}{x_n},\frac{x_n}{x_1}$ 中必有 k 个 -1，k 个 1. 所以

$$1=\frac{x_1}{x_2}\times\frac{x_2}{x_3}\times\frac{x_3}{x_4}\times\cdots\cdots\times\frac{x_{n-1}}{x_n}\times\frac{x_n}{x_1}$$
$$=(-1)^k\times(+1)^k=(-1)^k$$

所以 k 必为偶数，即 $k=2l$. 于是有 $n=2k=2(2l)=4l$，所以 $4\mid n$.

例 6.　n 个整数 $a_1,a_2,a_3,\cdots\cdots,a_n$，适合等式

$$a_1a_2a_3\cdots\cdots a_n=n, \text{且 } a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n=0$$

请你证明：$4\mid n$.

证明　先证 n 为偶数。

如若不然，则 n 为奇数。由 $a_1a_2a_3\cdots\cdots a_n=n$（奇数），可知 $a_1,a_2,a_3,\cdots\cdots,a_n$ 每一个都是奇数。所以 $a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n$ 是奇数个奇数之和应是奇数，与 $a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n=0$ 矛盾。所以 n 必为偶数。

由于偶数 n 是角码的个数，所以 n 不为 0。由 $a_1a_2a_3\cdots\cdots a_n=n$ 知，$a_1,a_2,a_3,\cdots\cdots,a_n$ 每一个都不为 0.

由 $a_1a_2a_3\cdots\cdots a_n=n$（偶数），可知 $a_1,a_2,a_3,\cdots\cdots,a_n$ 中至少有一个为偶数，不妨设 a_n 为偶数。这时由 $a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n=0$ 知，$a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_{n-1}=0-a_n=$ 偶数，由于 n 为偶数，显然 $n-1$ 为奇数，因为奇数个奇数的和是奇数，所以 $a_1,a_2,a_3,\cdots\cdots,a_{n-1}$ 不能全为奇数，也就是其中至少有一个是偶数。不妨设 a_{n-1} 是偶数。这时有 $2\mid a_n$ 且 $2\mid a_{n-1}$，所以 $4\mid a_{n-1}a_n$，更有

$4 | a_1a_2a_3\cdots\cdots a_n$，即 $4 | a_1a_2a_3\cdots\cdots a_n = n$.

说明 例 6 所展现的 n 个整数的性质是存在的。比如 $a_1 = 1, a_2 = -1, a_3 = 2, a_4 = -2$。则 $a_1a_2a_3a_4 = 4, a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0$. 角码 $n = 4$ 被 4 整除。

（四）状态的存在性问题

例 7. 某班学生（人数大于 2）围成一圈席地而坐. 并按照以下规则戴上红帽或蓝帽：如果一个学生的两邻旁都是男生或都是女生，这个学生就戴红帽；否则，就戴蓝帽. 请你证明：戴蓝帽的学生数目必定是偶数。

证明 用数字代表性别，男生记为 $+1$，女生记为 -1. 再将全班学生编号记为 $1, 2, \cdots, n$. 将与第 i 个学生相邻的两个学生所对应的性别数的乘积记为 A_i，称为第 i 个学生的特征数。$(i = 1, 2, \cdots\cdots, n)$.

由题意，若 $A_i = 1$，则第 i 个学生戴红帽，若 $A_i = -1$，则第 i 个学生戴蓝帽。

现在考虑乘积 $A_1 \times A_2 \times \cdots\cdots \times A_n$ 由于每个学生所对应的性别数字在乘积式中都出现了 2 次，所以 $A_1 \times A_2 \times \cdots\cdots \times A_n = 1$ 因此，$A_1, A_2, \cdots\cdots, A_n$ 中 -1 的个数必为偶数。即戴蓝帽子的学生数目必为偶数个。

例 8. 在操场上有 101 名学生面向南站成一排。老师每次口令使其中任意指定的 10 名学生向后转，称为一次"反向运动". 请你证明，无论多少次"反向运动"，都不可能使得这 101 名学生都同时面向北方。

证明 若每个学生一次向后转称为一人次，则每次"反向运动"口令将转动 10 个人次。假设经过 k 次"反向运动"后这 101 名学生都同时面向北方，则总计这 101 个人共转了 $10k$ 个人次，显然这是偶数个人次；另一方面，每人要从面南转到面北，他必须转

奇数个人次,而这 101 个人都要从面南最后到达面北就要转 101 个奇数的和,总计是奇数个人次。从两个不同角度统计这 101 名学生转动的总人次数得:“偶数 = 奇数”,矛盾。所以无论多少次“反向运动”,都不可能使所有学生同时都面向北方。

例 9.　在十个容器中分别装有 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10 毫升的水。每次操作可由盛水多的甲容器向盛水少的乙容器注水,注水量恰好等于乙容器原有的水量。问能否在若干次操作后,使得 5 个容器都装有 3 毫升的水,而其余容器分别装有 6,7,8,9,10 毫升的水? 如果能,请说明程序;如果不能,请说明理由。

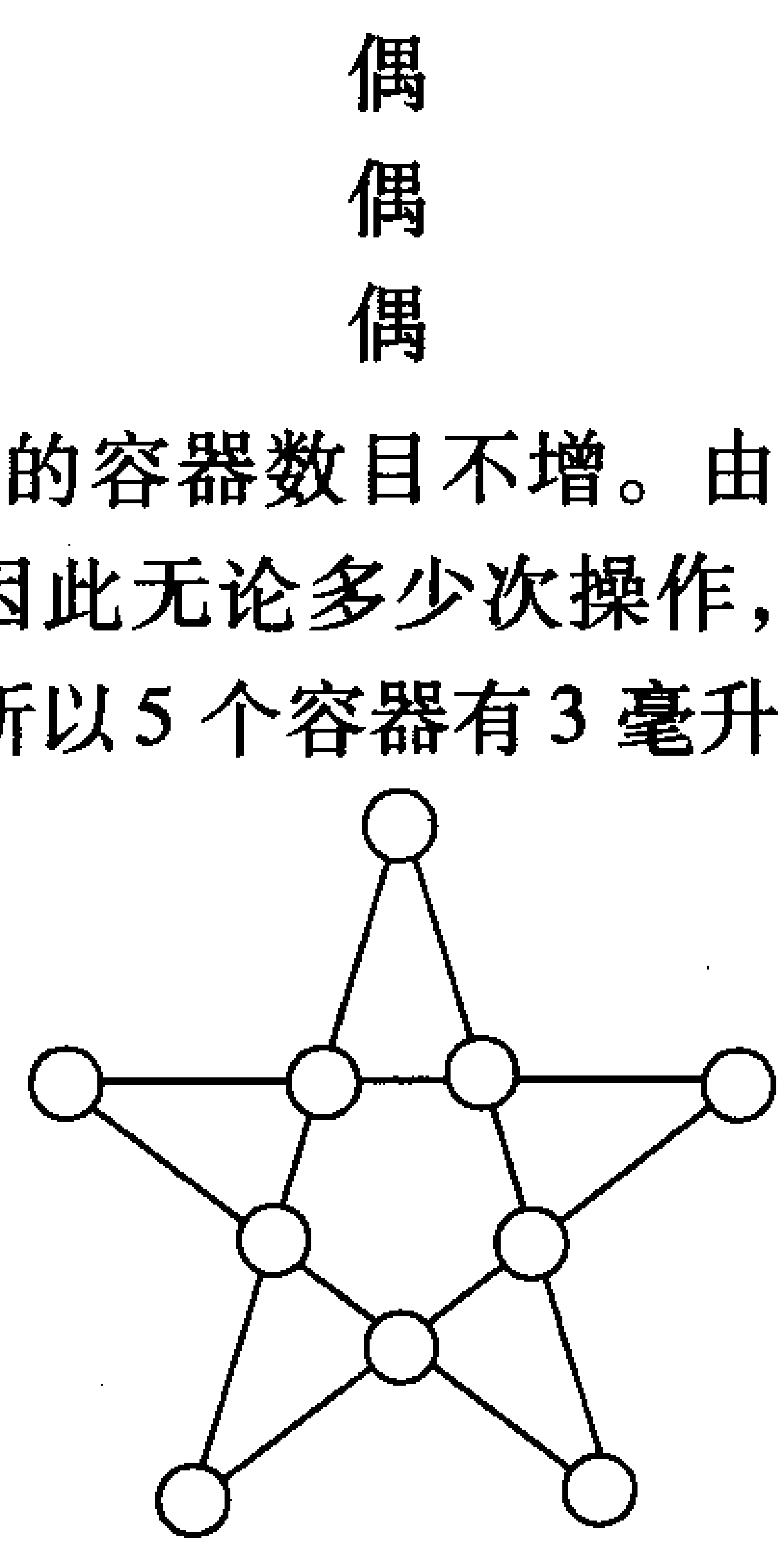
分析与解　不能! 理由如下:设甲容器水量为 a,乙容器水量为 b。转注前后两容器水量和相等。所以

转注前				转注后		
甲容器		乙容器		甲容器		乙容器
a	+	b	=	$(a-b)$	+	$2b$
奇		奇		偶		偶
奇		偶		奇		偶
偶		偶		偶		偶
偶		奇		奇		偶

从以上可见,每次操作后,水量为奇数的容器数目不增。由于初始状态有 5 个杯中水量是奇数毫升,因此无论多少次操作,水量为奇数毫升的容器数总不能比 5 多。所以 5 个容器有 3 毫升水,其余容器分别装有 6,7,8,9,10 毫升水(总计有 7 个容器水量为奇数毫升)的状态不可能出现!

例 10.　把图 1 中的圆圈任意涂上红色或蓝色。

问:有无可能使得在同一条直线上的红圈数都是奇数? 请说明理由。



(图 1)

解　设在每条直线上红圈数都是奇

数，由于每条线段上共 4 个圈。

我们把红圈标上 1，蓝圈标上 0，则每条线段上 4 个圈标数之和是个奇数。五条线段上所标数(20 个数)之总和为 5 个奇数之和是奇数。

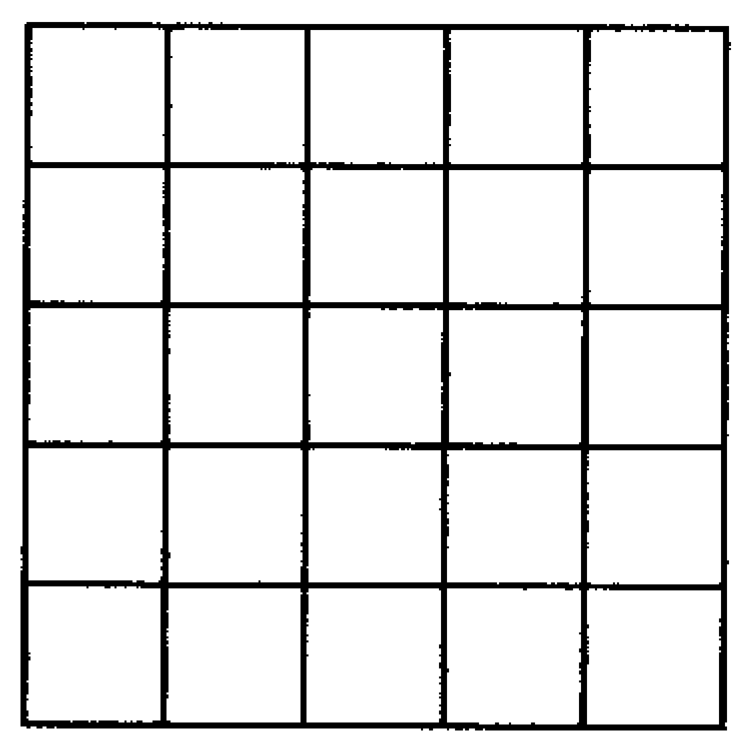
从另一角度来看，每个圈都属于两条线段，所以五条线段上所填 20 个数之和为偶数。因此得出矛盾。

所以没有可能使得在同一条线段上的红圈数都是奇数。

(五)方格填数问题

在方格中填数或把格子染色，主要是染两色，是一种有趣的奇偶分析问题。这种问题主要与两色状态的奇偶性和格子数的奇偶性有关。因此，应用奇偶分析常是证明这类问题的方法。

例 11. 能否将 1 - 25 这 25 个自然数填入 5×5 的方格中(每个小方格只填一个数)，使得每行的 5 个数中最大的一个数恰等于其余 4 个数之和。若能，请给出一种填法；若不能，请你说明理由。



(图 2)

解 如果可以按要求将 1，2，3，……，25 填在 5×5 的方格中，则这 25 个数总和为

$1+2+3+\cdots\cdots+24+25=13\times25=325$ 是个奇数。

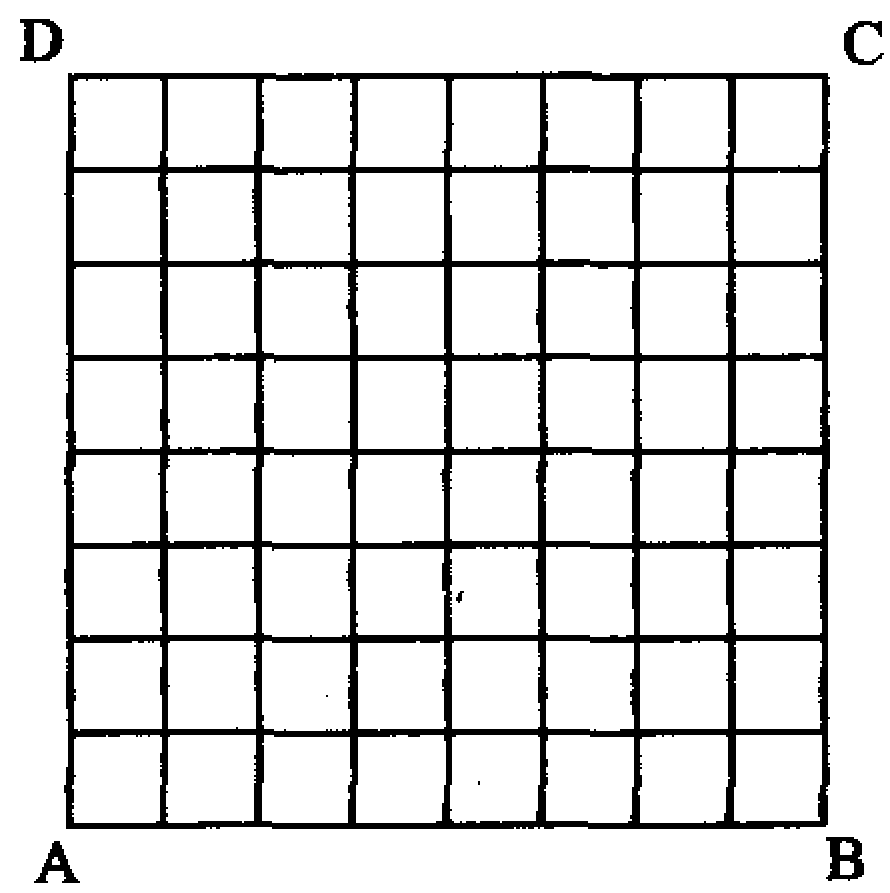
另一方面，每行 5 个数中最大的等于其余 4 个数之和，

则这一行五个数之和必为最大数的两倍，是个偶数。从而五行中每一行 5 个数之和均为偶数，所以加起来得到这 25 个数之和将是个偶数。这与这 25 个数总和是个奇数矛盾。

因此，题设要求的填数方法是不存在的。

例 12. 将正方形 $ABCD$ 分割成 n^2 个相等的小方格(n 是正

整数)。把相对的顶点 A,C 染成红色,把 B,D 染成蓝色,其它交点任意染成红蓝两色中的一种颜色。请你证明:恰有三个顶点同色的小方格的数目必是偶数。



(图 3)

我们从三个不同角度来解这个问题:

证法 1　用数代表颜色。将红色点记为 0。蓝色点记为 1. 再将小方格编号,记为 $1,2,3,\cdots\cdots,n^2$.

又记第 i 个小方格四个顶点数字之和为 A_i,若恰有 3 个顶点同色,则 $A_i=1$ 或 3 是奇数;否则 A_i是偶数。

在 $A_1+A_2+\cdots\cdots+A_{n^2}$中,有如下事实:

对正方形 $ABCD$ 内部的交点,各加了 4 次;

对正方形 $ABCD$ 边上非顶点的交点,各加了 2 次;

对正方形 $ABCD$ 的四个顶点,各加了 1 次(两个 0,两个 1)。

因此,$A_1+A_2+\cdots\cdots+A_{n^2}$

$=4\times$(内部交点相应的数之和)$+2\times$(边上非端点的交点相应的数之和)$+2$

$=$偶数.

于是 $A_1,A_2,\cdots\cdots,A_{n^2}$中必有偶数个奇数,也就是说,恰有 3 个顶点同色的小方格必为偶数个。

证法 2　用数代表颜色。将红色点记为 $+1$。蓝色点记为 -1. 再将小方格编号,记为 $1,2,3,\cdots\cdots,n^2$.

又记第 i 个小方格四个顶点数字之积为 A_i,若恰有 3 个顶点同色,则 $A_i=-1$;否则 $A_i=+1$.

现考虑乘积 $A_1\times A_2\times\cdots\cdots\times A_{n^2}$. 对正方形内部的交点,各点相应的标数重复出现了 4 次;边上的不是端点的交点相应的标数各出现了 2 次;A,B,C,D 四点相应的标数的乘积为$(+1)\times(+$

$1)\times(-1)\times(-1)=+1$.

于是可得 $A_1\times A_2\times\cdots\cdots\times A_{n^2}=+1$.

因此 $A_1,A_2,\cdots\cdots,A_{n^2}$ 中 -1 的个数必为偶数,所以恰有三个顶点同色的小方格必有偶数个。

证法 3 考虑将点染色以后,改变一个点的染色方式,这时,以此点为顶点的小方格,要么由三个顶点同色变为非三个顶点同色,要么由非三个顶点同色变为三个顶点同色。

注意,除 A,B,C,D 之外每一个交点,必是偶数个小方格的顶点。因此,改变一个交点的染色并不改变三个顶点同色的小方格个数的奇偶性。

当 $n=1$ 时,结论显然成立。

当 $n>1$ 时,每改变一个交点的染色,最终总可以使 B,D 之外的点皆为红色,这时,三个顶点同色的小方格只有两个,为偶数个。

因此,任意染色之下,三顶点同色的小方格必有偶数个。

本题的三种证法各有特色。证法 1 通过数字标识后的总和数来分析,这时区分红、蓝两色利用 1,0 两个数与其对应。证法 2 通过数字标识后的乘积数来分析,这时区分红、蓝两色利用 $+1$,-1 两个数与其对应。证法 3 则是分析染色法无论如何改变,但恰有三个顶点同色的小方格个数的奇偶性却不变,具有不变性。这充分反映出应用奇偶分析的精湛技艺!

奇偶分析是解证数学竞赛问题的常用武器。要使用这一工具,一要注意问题涉及的是整数范围的数量关系,二要注意,自然界中的两态关系,如正、反;开,关;前,后等可用奇偶关系来讨论。

研究练习题 2－7

1. 若 k 是大于 1 的整数,求证:数 $m=k+(k-1)^{\frac{1-(-1)^k}{2}}$ 是个奇数。

2. p、q 均是质数，且 $5p+7q=29$. 试求 p^2+q^2+p+q 之值。

3. 若 p、q 都是质数，以 x 为未知数的方程 $px+5q=97$ 的根是 1. 求 p^2-q 的值。

4. 设 a_1,a_2,a_3,a_4,a_5 是任意给定的 5 个整数。把它们打乱顺序后记为 b_1,b_2,b_3,b_4,b_5.

求证：$(a_1-b_1)(a_2-b_2)(a_3-b_3)(a_4-b_4)(a_5-b_5)$是偶数。

5. 设 $\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\cdots\cdots+\frac{1}{1993}+\frac{1}{1995}=\frac{n}{m}$，其中 $\frac{n}{m}$ 是一个既约分数. 试说明 n 必是一个奇数.

6. 求证：不存在整数 a,b,c,d，满足方程组

$$\begin{cases} abcd-a=2011 \\ abcd-b=2013 \\ abcd-c=2015 \\ abcd-d=2017 \end{cases}.$$

7.　一个五位数，它的每个数码都不小于 5. 将它的数码交换后又得一个新的五位数。小明将这两个五位数作加法，得和数恰是 146245. 问小明的计算正确吗？为什么？

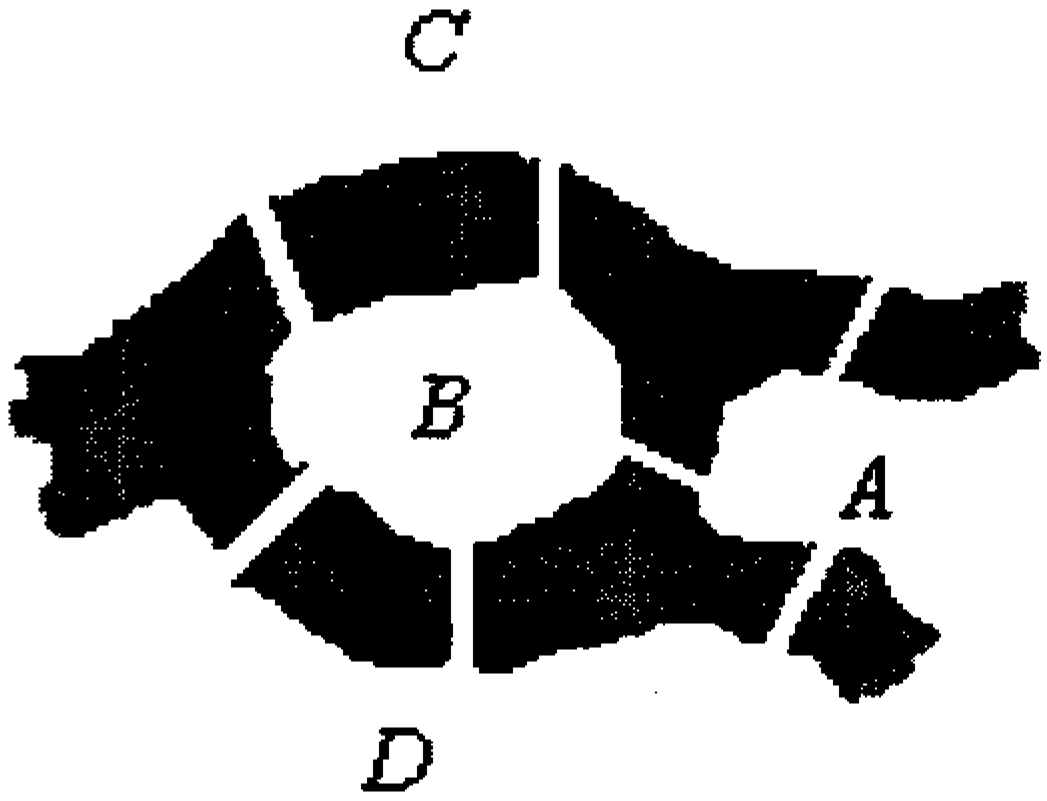
§2.8　数学竞赛中的图论方法

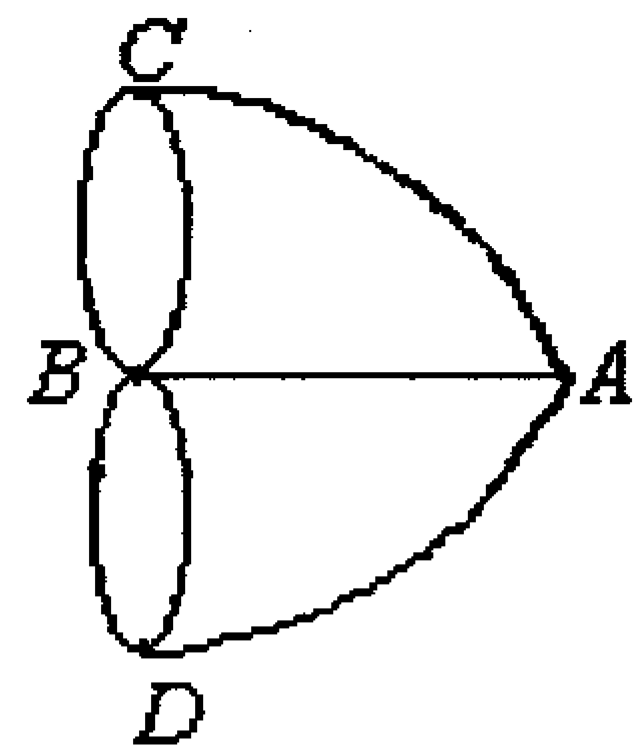
(一)

18 世纪东欧的哥尼斯堡城，有图 1 所示的七座桥。居民经常沿河过桥散步，到两岸、河心岛、半岛上一览风光，于是提出了一个问题：

一个散步者能否一次走遍这七座桥，而每座桥只许通过一次，最后仍回到起始的地点？

这个问题看起来似乎不难，然而众多热心散步的市民们都没





（图1）　　　　　　　　（图2）

能找到答案。于是问题被提到了大数学家欧拉（*Euler*，1707—1783）那里。欧拉以深邃的洞察力很快地证明了这样的走法根本不存在，并于1736年公布了自己的研究结果。

欧拉的思考是这样的：既然岛与半岛无非是桥梁的连接地点，两岸陆地也是桥梁通往的地点，那么就不妨把这四处地方抽象成 A,B,C,D 四个点，把七座桥表示成连接这四个点间的七条线，如图2所示，当然，这样作并不改变问题的本质。于是人们企图一次无重复地走过七座桥的“七桥问题”，就等价于图2所示图形能否一笔画的问题。欧拉作为一位数学大师，把实际中的“七桥问题”抽象成图2的“一笔画”模型。当千百个过桥者在实际的桥上转得昏头昏脑而不得其解时，欧拉的数学思维真乃大有高屋建瓴之势。这正是一个生动的数学建模过程。

欧拉所画的图2叫做“图”，A,B,C,D 叫做图的顶点。两顶点之间的连线叫做边。欧拉着手研究这个图，它若能一笔画，从图中 A 点出发不重复的走遍所有的边，再返回 A 点，这样的图有什么性质呢？容易看到，在每个顶点处都从一条边进入再从另一条边走出。一进一出，这个顶点应聚结偶数条边。对起点 A 也是如此，开始由 A 走出，中间不管有无边的进出，最后总要又有另一条边返回 A 点。所以 A 点聚结的也是偶数条边。这表明，凡能从某顶点 A 出发不重复地走遍所有边又最后返回 A 点的图，每个顶点都聚结偶数条边，然而图2所示的图形中 A,B,C,D 各顶点都

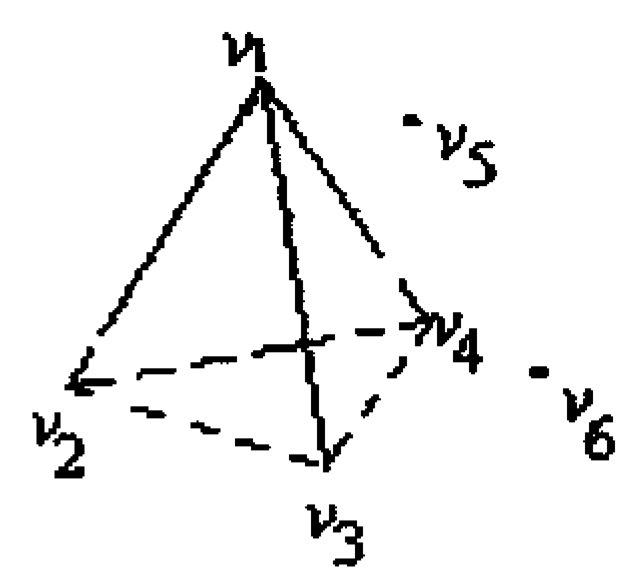
聚结着奇数条边，所以这个图形不能“一笔画”，所谓“七桥问题”就这样轻松地解决了。

我们再看一道著名的趣题：

“任何 6 个人的聚会，其中总会有 3 个人互相认识或有 3 个人彼此都不认识，请你证明。”

这个问题应用分析推理可以解决。然而表述起来总感到抽象、不直观。但若设 v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6 六个点表示六个人，两个人相识，就在相应的两点间连红边（图中用实线），若两人不相识，就在相应两点之间连蓝边（图中用虚线）。这样原来的问题就等价于：“有六个点，任两点之间要么以红边相连，要么以蓝边相连。证明：必定存在一个三条边都同色的三角形（同色三角形）。”

我们选定 v_1，在 v_1 与其它五个点的连线中至少有三条同色。为确定起见，不妨设 v_1v_2,v_1v_3,v_1v_4 同为红色边，若 v_2v_3,v_2v_4,v_3v_4 中有一边为红边。则这红边与 v_1 顶点组成红色三角形；v_2v_3,v_2v_4,v_3v_4 中无一红边，则 $\triangle v_2v_3v_4$ 就是蓝色三角形。即总会有三个人彼此相识或彼此不相识。



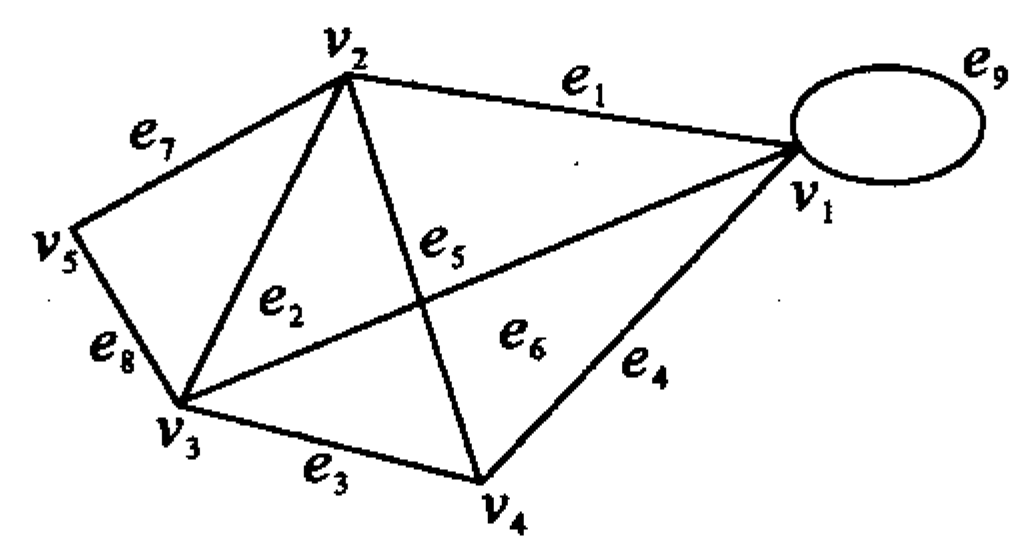
（图 3）

无论“七桥问题”还是“单色三角形问题”，我们对构想解题的思路很感兴趣。它们的共同特点是：把所研究的事物抽象成几何中的点，而把两个事物之间的某种关系抽象成点与点间的连线，就可以画出一个图。原来的问题就等价于所画图形中的一个问题。这样只需研究所画图形的边、顶点之间的某些性质，就使原问题迎刃而解。这种解题构想既形象又直观。我们的逻辑推理很容易借助图形展开，常使所处理的问题妙手生辉。其实上述的解题构想已使我们步入“图论”的领地。由于初中数学知识所限，我们只引入图的基本概念和一两个简单定理。只把图作为一种帮助我们分析推理增强机敏的一种工具。

(二)

所谓“图”,是指由一些点 $v_1,v_2,\cdots\cdots,v_n$ 及连接其中若干个点对的连线所组成的几何图形。其中 $v_1,v_2,\cdots\cdots,v_n$ 叫做图的**顶点**。连线 v_iv_j 叫做图的**边**。如果两个顶点 v_i 与 v_j 之间有边相连,我们称 v_i 与 v_j 两个顶点**相邻**。否则称 v_i 与 v_j 两个顶点**不相邻**。此外,从同一个顶点出发的两条边我们叫做**邻边**。

设 G 表示一个图。G 的顶点集合记为 $V(G)$,显然 $V(G)=\{v_1,v_2,\cdots\cdots,v_n\}$. G 的边的集合记为 E. 则 $E(G)=\{e_1,e_2,\cdots\cdots,e_m\}$,其中每个 e_i 都是图 G 的边。如图 4 给出的图 G 中,



(图 4)

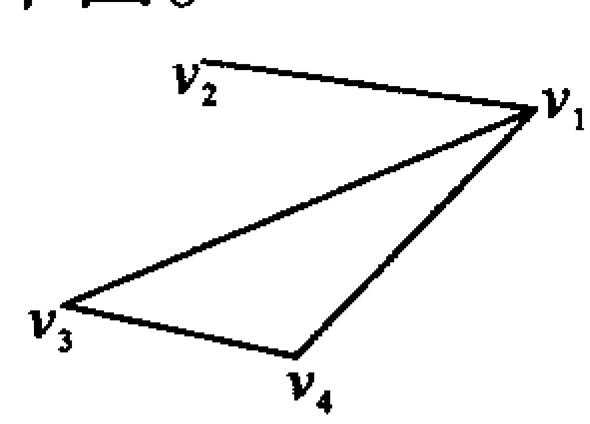
$$V(G)=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\},$$
$$E(G)=\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6,e_7,e_8,e_9\}.$$

请注意 e_5 与 e_6 不要认为是相交的。

若以 $|G|$ 表示图 G 的顶点数,以 $\|G\|$ 表示图 G 的边数。则图 4 所示的图 G 中有 $|G|=5$,而 $\|G\|=9$.

由于一个图由顶点集合 $V(G)$ 及边的集合 $E(G)$ 所确定,因此,在数学中通常以 $G=(V(G),E(G))$ 来表记一个图。

$G=(V(G),E(G))$ 是一个图,$H=(V(H),E(H))$ 是另一个图。若 $V(H)\subseteq V(G)$,$E(H)\subseteq E(G)$,则称图 H 是图 G 的**子图**,记为 $H\subseteq G$. 图 5 所示的图就是图 4 所示的图的一个子图。

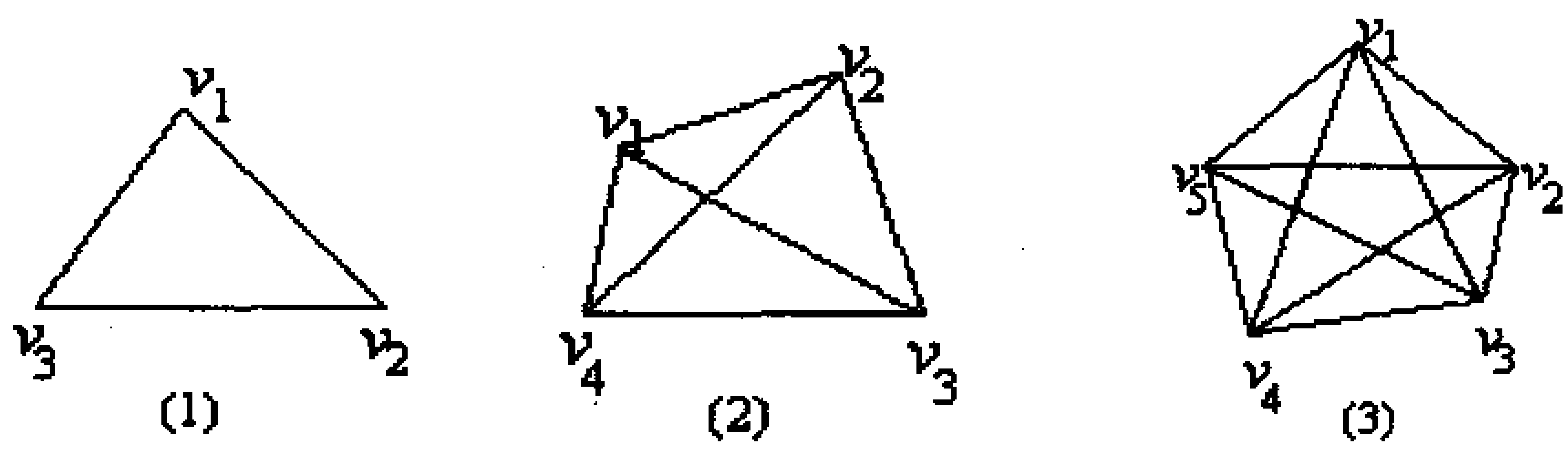


(图 5)

如果一个边的两个端点是同一个顶点,则这条边叫做**环**。图 4 中的 e_9 是一个环。不是环的边叫做**连杆**。

我们希望图中的边不要太复杂,因此约定,在一个图中,如果

任意两个顶点之间最多有一条边,并且图中不存在"环"的话,我们就称该图为**简单图**。如图5所示的图就是简单图(本文不作特别声明,所研究的图都是简单图)。当 $|G|=1$ 时,称为**平凡图**。任何两点都相邻的简单图叫做**完全图**。具有 n 个顶点的完全图记作 K_n. 图6(1)所示为 K_3,图6(2)所示为 K_4,图6(3)所示为 K_5.



(图6)

与顶点 v 相邻的边的数目叫做顶点 v 的**度数**,记作 $d(v)$. 容易看出下列性质成立:

(1)若 $d(v)=0$,则 v 是一个孤立点。

(2)若图 G 有 n 个顶点,v 是它任一顶点,则 $0\leqslant d(v)\leqslant n-1$.

(3)若图 G 有 n 个顶点,且无孤立点,则 $1\leqslant d(v)\leqslant n-1$.

(4)若图 G 有 n 个顶点,且有一孤立点,则则 $0\leqslant d(v)\leqslant n-2$.

(5)对完全图 K_n 的每个顶点 v,都有 $d(v)=n-1$.

度数概念的上述性质对我们解题会有很大帮助。

例1. 参加一次会议的 n 个学生中,一定有两位同学他们认识的人数一样多。

证明 把 n 个学生看成 n 个点,两人相识则在相应的两点连一条线。若两人不相识,则不连线,这样形成一个图 G. 因此问题归结为证明图 G 中有两个顶点的度数相同。当图 G 中有孤立点时,由(4)则 $0\leqslant d(v)\leqslant n-2$. $d(v)$ 取 $0\sim n-2$ 这 $n-1$ 个值。当图 G 中无孤立点时,由(3)则 $1\leqslant d(v)\leqslant n-1$. $d(v)$ 取 $1\sim n-1$ 这 $n-1$ 个值。所以 n 个顶点的度数只能取 $n-1$ 个不同的值,根据抽屉原理,必有两个顶点的度数相同。即 n 个学生中一定有两个学生他们认识的人的个数一样多。

我们再探索一下顶点度数与边数的关系。因为每个顶点的度数，就是这个顶点相邻的边的数目，然而每一边都与两个顶点相邻，所以有如下结论：

定理 1 一个图所有顶点度数的总合等于这个图边数的两倍。

即若图 G 有 n 个顶点，则

$$d(v_1)+d(v_2)+\cdots+d(v_{n-1})+d(v_n)=2\|G\|$$

例 2. 一个会议的参加者互相握手。证明：握过奇数次手的人一定是偶数个。

分析 设到会者共 n 个人，以 $v_1,v_2,\cdots\cdots,v_n$ 这 n 个点来表示。某两人 $v_i,v_j(i\neq j)$ 握过手，则将这两点以边相连。这样就构成了一个图 G.

握过奇数次手的人 $v_i\leftrightarrow$ 图 G 中 $d(v_i)$ 为奇数（v_i 为奇顶点），握过偶数次手的人 $v_j\leftrightarrow$ 图 G 中 $d(v_j)$ 为偶数（v_j 为偶顶点）。问题变为：证明图 G 中奇顶点的个数为偶数个。

证明 由定理 1 知，

所有顶点度数的和 = “奇顶点”度数之和 + “偶顶点”度数之和，“偶顶点”度数之和是个偶数，所以得

“奇顶点”度数之和 = 偶数……(*)

由于奇数个奇数之和是奇数，所以要(*)式成立，“奇顶点”的个数必为偶数。即握过奇数次手的人一定是偶数个。

本题实际是定理 1 的一条推论：图 G 中度数为奇数的顶点的个数是偶数个。

由例 1、例 2，我们看到，只要对图的性质稍加考察，就得出了令人鼓舞的有趣的结论。我们不妨再多考察一些图的基本类型和性质。

在图 G 中，一个由不同的依次连接的边组成的序列 $e_1,e_2,e_3,\cdots,e_p$，其中 e_i 是连接顶点 v_i 与 v_{i+1} 的边 $(i=1,2,\cdots,p)$. 则称这个序列是从 v_1 到 v_{p+1} 的**链**（也叫轨）. 数 p 称为这个**链的长**。v_1 与 v_{p+1} 称为这个链的端点。如图 4 中 e_1,e_2,e_3,e_5,e_7 就是一个始于 v_1

终于 v_5 的链。如果一个链的两个端点 v_1 与 v_{p+1} 重合，则称该链为一个**圈**。通常将含有 n 个顶点的圈记为 c_n. 如图 4 中 e_1,e_2,e_3,e_4 就是一个含 4 个顶点的圈 c_4.

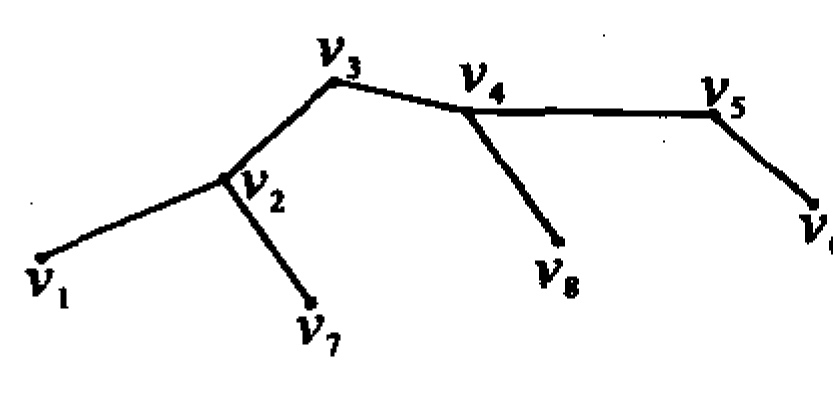
当 G 是一个简单图时，链可简记为 $(v_1,v_2,\cdots,v_{p+1})$. 如果一个圈的边数为奇数，则该圈叫奇圈，如果一个圈的边数为偶数，则该圈叫偶圈。

如果在图中任何两个顶点之间都有一个链相连，则这样的图叫**连通图**，否则就叫**不连通图**。

我们不难发现，**一个没有圈的连通图，至少有两个顶点的度数为** 1(只有一条边相邻).

设这个没有圈的图的顶点数 $n\geqslant 2$，其中 $(v_1,v_2,v_3,\cdots,v_k)$ 是图 G 中最长的链，我们证明：$d(v_1)=d(v_k)=1$. 事实上，由于 G 是连通图，所以 $d(v_1)\neq 0, d(v_k)\neq 0$. 如果 $d(v_1)\neq 1$，则 $d(v_1)\geqslant 2$. 从而至少存在一点 v_0，使得 v_0 与 v_1 相邻，但 v_0 不与 $v_i(i=1,2,\cdots,k)$ 每一个相邻(否则的话，图中会产生圈，与图 G 无圈矛盾)。这样一来，链 $(v_1,v_2,v_3,\cdots,v_k)$ 可延长为 $(v_0,v_1,v_2,\cdots,v_k)$，这与 $(v_1,v_2,v_3,\cdots,v_k)$ 是最长链的假设相矛盾！所以 $d(v_1)=1$. 同理可证 $d(v_k)=1$.

这种无圈的连通图如图 7 所示。根据其形状，在图论中命名为**树**。而其中度数为 1 的顶点，称为该树的**叶**。具有 n 个顶点的树记为 T_n. 只有一个顶点的树 T_1 叫做**平凡树**。上面我们证明的结论："没有圈的连通图，至少有两个顶点的度数为 1"可归结为



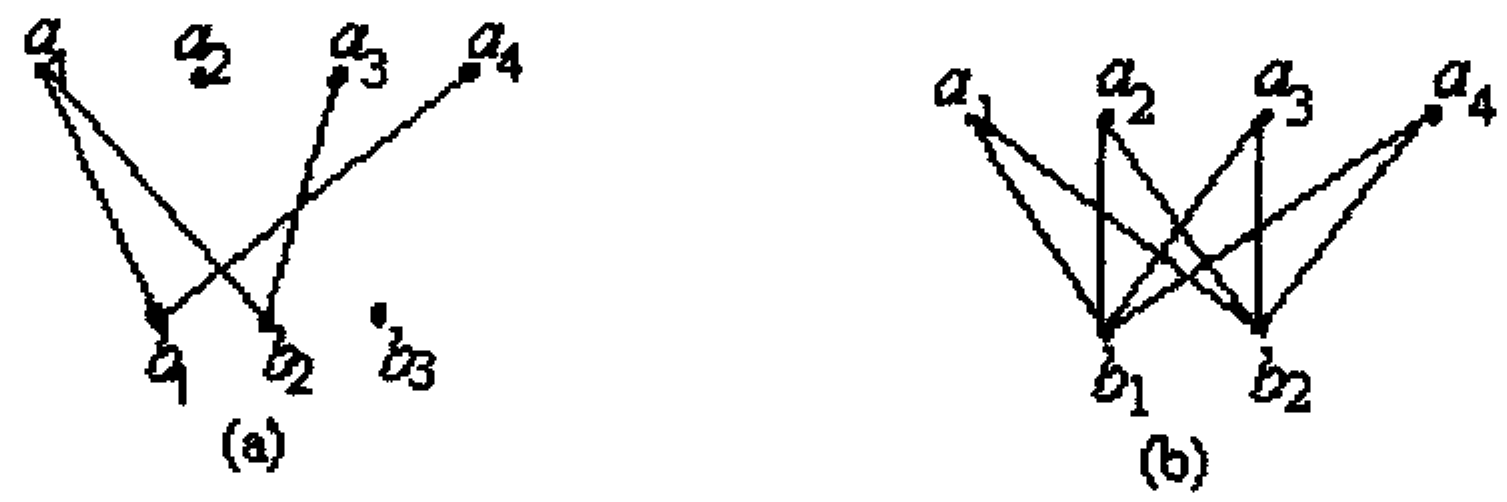
(图 7)

定理 2　非平凡树至少有两个叶。

一棵树，我们可以从一个叶开始，一条边一条边地画，每增加一条边，则多连一个顶点。因此，边的总数比顶点数少 1. 由此得出

定理 3　若 T_n 是树，则 $\|T\|=n-1$.

下面我们再分析一种特殊类型的图。



（图8）

如果图 G 的顶点的集合是由两个没有公共元素的子集 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$ 与 $B=\{b_1,b_2,\cdots,b_n\}$ 组成的,并且 A 中任两顶点均不相邻,B 中的任两顶点也均不相邻,这样的图叫二部图,记为 $G_{m,n}$. 如图8中(a)与(b)都是二部图。但(a)与(b)又有差异。图8(b)中集 A 的每个元素都与集 B 中每个元素相邻,像这样的图叫做**二部完全图**,简记为 $K_{m,n}$. 其中 m,n 分别是 A,B 的顶点数。如图8(b)是一个二部完全图 $K_{4,2}$. 显然一个二部完全图必是一个连通图,且 $|K_mn|=m+n$, $\|K_mn\|=mn$

细心观察,图8(a)中没有圈,而图8(b)中存在圈,如$\{a_1,b_1,a_3,b_2,a_1\}$就是一个圈。一个二部图的圈有什么性质呢? 这个圈 C 从 A 中一顶点 a_k 引出进入 B 形成一条边,再由 B 进入 A 又形成一条边,……,如此反复直到最后由 A 进入 B 再由 B 进入 A 到 a_k 终止。因此圈 C 的长一定是偶数,即 C 是"偶圈"。这就证明了

定理4　二部图中无奇圈。

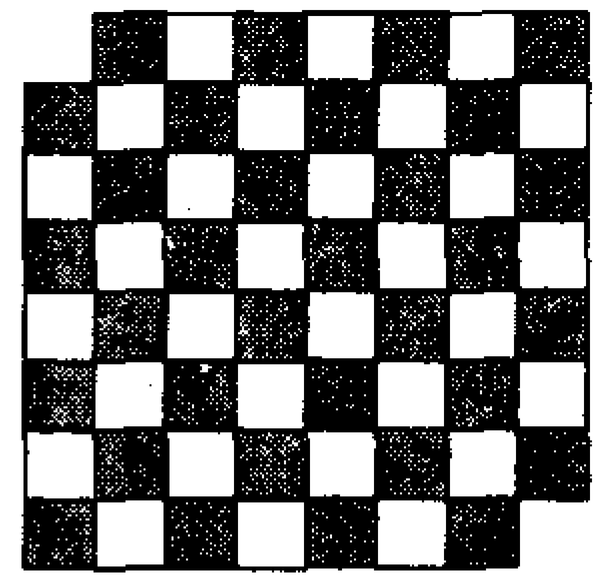
由此得到一个简单而作用极大的推论:**二部图中没有三角形**。

如果一个二部图 $G_{m,n}$ 中 A 的点与 B 的点之间可以建立一一对应,则称这个二部图存在一个**完全匹配**。显然,$G_{m,n}$ 存在一个完全匹配,则有 $m=n$.

例3.　将 8×8 的国际象棋盘的左上角和右下角各剪去一个

方格,余下的部分一定不能用 31 个 1 ×2 的矩形将它完全盖住。

分析　棋盘格白、黑相间,剪掉了两个白格. 以小方格为顶点,两个小方格有公共边则称相应的二顶点相邻,此时相邻的顶点颜色一定不同。这样以白点为一部,黑点为一部构成一个二部图$_{30,32}$. 若用 31 个 1 ×2 的矩形完全覆盖缺角棋盘,每个小矩形对应一个黑点与一个白点连结。这样二部图$_{30,32}$中必存在一个完全匹配,则两部的顶点数相等,即必有 30 = 32,得出矛盾! 所以缺角棋盘不能用 31 个 1 ×2 的小矩形完全覆盖住。

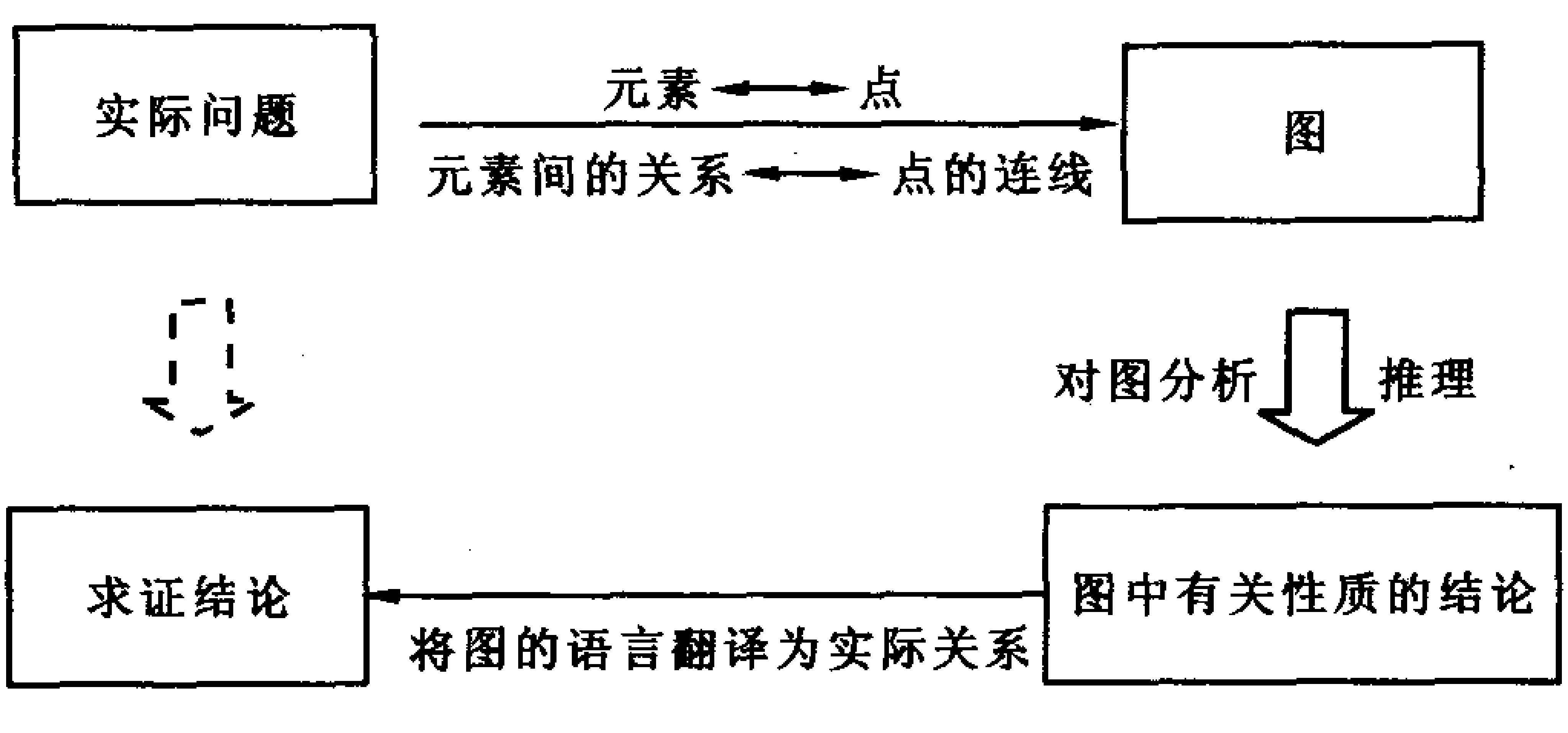


(图 9)

例 3 的证法中,我们应用了若干图论的术语。建议你不使用"二部图"、"完全匹配"等专门术语写出本题的证明。你就会发现,过去你所拟的本题的解法中已不知不觉地步入图论的领地了。

(三)

从上节的例子,我们可以总结归纳应用图论方法的思维程序。以框图表示如下:



本来应由实际问题直接经过逻辑推理得出求证结论,但这个过程比较抽象。因此推理难度较大。我们采用迂回的办法,把元

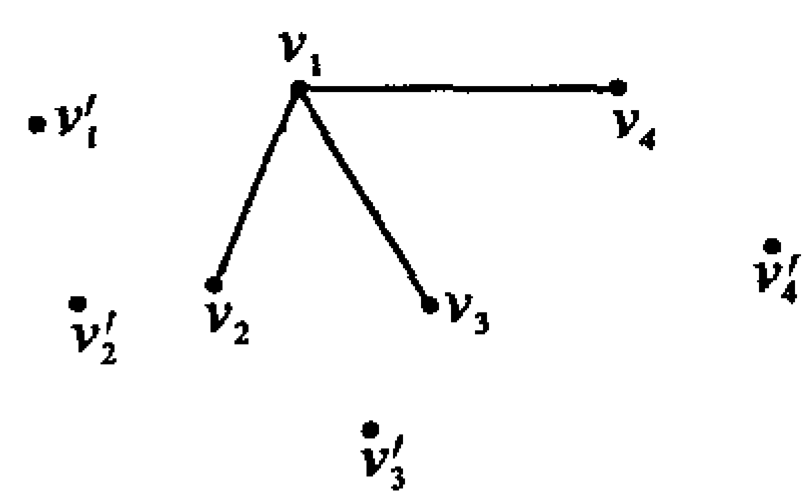
素看成点，元素之间的关系看成点之间的连线，这样把实际问题抽象为一个图中的有关问题。于是，我们可以对图引入一些概念，对图的性质很直观地分析推理，得出图的某个有关结论。将这个结论翻译为实际的关系，就得出所求证的结论。

由此可见，用图帮助解题，一要学会建立正确的“语言”翻译系统，二要会对“图”本身进行分析。按照前述框图程序解题的方法称为图论方法。下面我们用图论方法来求解一些数学竞赛题。大家可以对照程序图思索，学习用图论的术语简写证明。

例 4. 已知在参观团的任意四个人中，有一个人原先见过其他三个人。求证：在这个参观团的任意四个人中，总可以找到一个人，他原先见过参观团的所有的人。

（匈牙利数学奥林匹克 1960 年试题）

证明 设参观团共 n 个人（自然地 $n\geqslant4$），我们以点 $v_1,v_2,\cdots\cdots,v_n$ 来表示之。若 v_i 与 v_j 原先见过面，就在 v_i 与 v_j 之间连一条边，于是得图 G. 注意，按上述构图法，若两点不相邻，就意味相邻两个人原先未见过面。因此问题变为：图中任意四个顶点中必有一个顶点和其它三个顶点都相邻。求证：图的任意四个顶点中必有一个顶点和 G 的其它所有顶点都相邻。



（图 10）

设图中有四个顶点 v_1,v_2,v_3,v_4，其中每个顶点和 G 的其它顶点不都相邻。则至少存在 v_1',v_2',v_3',v_4'，它们依次与 v_1,v_2,v_3,v_4 不相邻。由已知条件 v_1,v_2,v_3,v_4 中至少有一点与其它三个点相邻。不妨设 v_1 与 v_2,v_3,v_4 相邻（图 10）。因此 $v_1'\neq v_2,v_1'\neq v_3,v_1'\neq v_4,v_2'\neq v_1$

如果 $v_1'\neq v_2'$，则 v_1,v_2,v_1',v_2' 中没有一个顶点和其它三个顶点相邻，，与已知条件矛盾！

如果 $v_1'=v_2'\neq v_3'$，则顶点 v_2,v_3,v_2',v_3' 中没有一个顶点和其

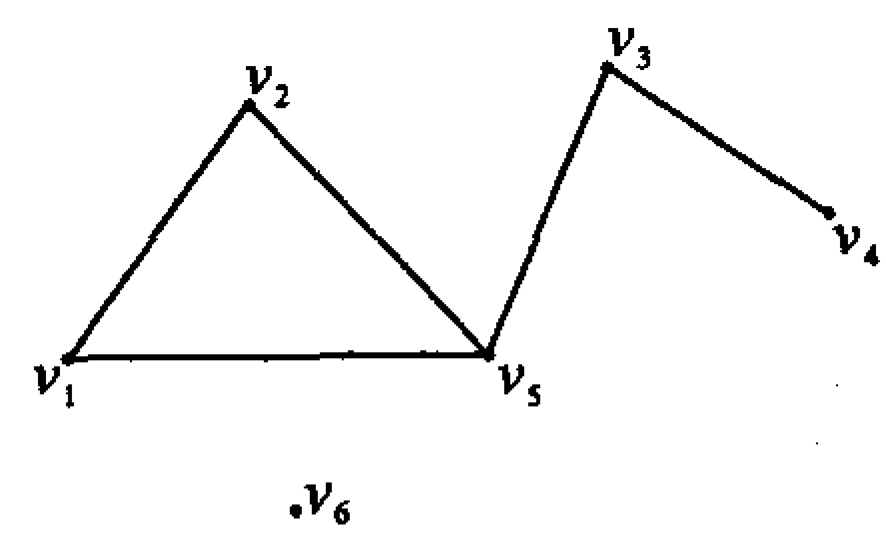
它三个顶点相邻,也与已知条件矛盾！如果 $v_1' = v_2' = v_3'$,则顶点 v_1, v_2, v_3, v_1'中没有一个顶点和其它三个顶点相邻,也与已知条件矛盾！因此,图 G 的任意四个顶点中必有一个顶点和 G 中其它顶点都相邻。

例 5.　某工厂生产由六种不同颜色的纱线织成的双色布。在这个工厂所生产的双色布中,每一种颜色的纱线至少与三种其它颜色的纱线搭配过。证明:可以挑出三种不同的双色布,它包含有全部六种颜色。

(匈牙利数学奥林匹克 1957 年试题)

分析　我们用六个点 $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$ 代表六种不同颜色。如果这个工厂生产了由颜色 v_i 与 v_j 搭配而成的双色布,就在 v_i 与 v_j 之间连一条边 v_iv_j,而得图 G. 根据题设,每种颜色至少与三种颜色搭配过,所以图中每个顶点的度数至少是 3. 求证,可以找到三条边,使这些边的端点都是不同的。

考察 v_1,因 $d(v_1) \geqslant 3$,所以不妨设边 v_1v_2 在 G 中。类似地,因 $d(v_1) \geqslant 3$,故不妨设边 v_3v_4 在 G 中。这时,若边 v_5v_6 在 G 中,问题得证。若边 v_5v_6 不在 G 中,因为 $d(v_5) \geqslant 3$,所以 v_5 与 v_1, v_2, v_3, v_4 中的至少三个点相邻。不妨设 v_5 与 v_1, v_2, v_3 相邻,即 G 中有边 v_5v_1, v_5v_2, v_5v_3(图 11). 观察点 v_6,若 v_6v_4 在 G 中,则 v_6v_4, v_5v_3, v_1v_2 为所求。若 v_6v_4 不在 G 中,因 $d(v_6) \geqslant 3$,所以 v_6v_1, v_6v_2, v_6v_3 必在 G 中,这时 v_1v_5, v_2v_6, v_3v_4 即是合要求的三边。问题得证。



(图 11)

例 6.　在一个会议室里,若每个议员至多有三个反对者,证明:一定可以把所有议员分为两组,使每一组中,每个议员至多只有一个反对者。

(前苏联 1979 年中学生数学竞赛试题)

分析　用点 $v_1, v_2, \cdots\cdots, v_n$来表示议会中的 n 个议员,若 v_i与

v_j是反对者，则 v_i与 v_j之间以边相连，则得图 G. 由题意知，G 中每个顶点 v_i，都有 $d(v_i)\leqslant 3$.

我们把 n 个顶点分为两组。当 v_i与 v_j是反对者时将它们一个放在 A 组、另一个放在 B 组。这样分好组之后，在同一组中每个点的度数都不超过 2. 我们统计 A,B 各顶点的度数。如果在每组各点的度数均不超过 1，则问题得证。如果有某个点 v_k的度数大于 1，不妨设 v_k是 A 组的点，即表明在 A 组中 v_k至少有两个反对者。此时，我们立即把 v_k调到 B 组去，v_k在 B 组中至多有一个反对者。由于议会议员是有限的，所以，这种调整一定会在有限次完成，使 A,B 两组中每个顶点的度数都最多为 1.

例 7. 空间中不可能有这样的多面体存在，它们有奇数个面，且它们的每个面又都有奇数条边。

（北京市 1956 年中学生数学竞赛试题）

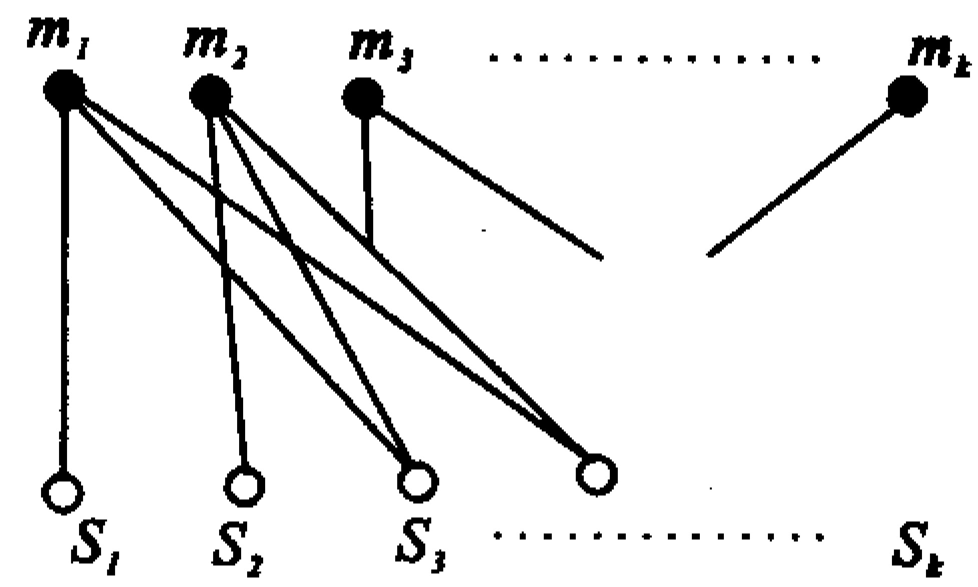
分析 以这种多面体的面为“顶点”，当两个面有公共棱时，在相应两个顶点之间连一条边，得图 G. 依题意 $|G|$ 是奇数。每个顶点 $d(v_i)$的度数都是奇数。所以 $d(v_1)+d(v_2)+\cdots+d(v_{|G|})$仍为奇数。这与定理 1 矛盾！所以不会有这种多面体存在。

例 8. 舞会上先生、女士各 $n>(n>2)$人。没有一个先生同所有的女士都跳过舞。但每个女士至少同一个先生跳过舞。证明：必有两个舞伴 m_1,s_1 和 m_2,s_2，他们中 m_1 没与 s_2 跳过舞，s_1 没与 m_2 跳过舞。

分析 设 A 为先生的集合，B 为女士的集合。A 中每个顶点表示一个先生，B 中每个顶点表示一个女士。如果某个先生与某个女士跳过舞，则在相应两点之间连一条边。这样组成一个二部图 G. 问题变为：在 G 中存在四个点，$m_1,m_2\in A,s_1,s_2\in B$，使得 m_1 与 s_1 相邻，m_2 与 s_2 相邻，但 m_1 与 s_2 不相邻，s_1 与 m_2 也不相邻。

在 A 中存在一点 m_1，有 $d(m_1)$最大（即 m_1 是与女士跳舞最多的那位先生）。因为 $d(m_1)<n$（没有一个先生同所有的女士都跳过舞），所以在 B 中至少有一点 s_2 与 m_1 不相邻（即至少有女士

s_2 与先生 m_1 没跳过舞)。又每个女士至少同一个先生跳过舞,即 A 中至少有一点 m_2 与 s_2 相邻。若 B 中除 s_2 外同 m_1, m_2 相邻的点都相同,则导致 $d(m_2) > d(m_1)$,与 $d(m_1)$ 最大的假设相矛盾。所以在与 m_1 相邻的点中,至少有一点 s_1 与 m_2 不相邻。这样就找到了四个点 m_1, m_2 和 s_1, s_2 就代表了符合要求的四个人。



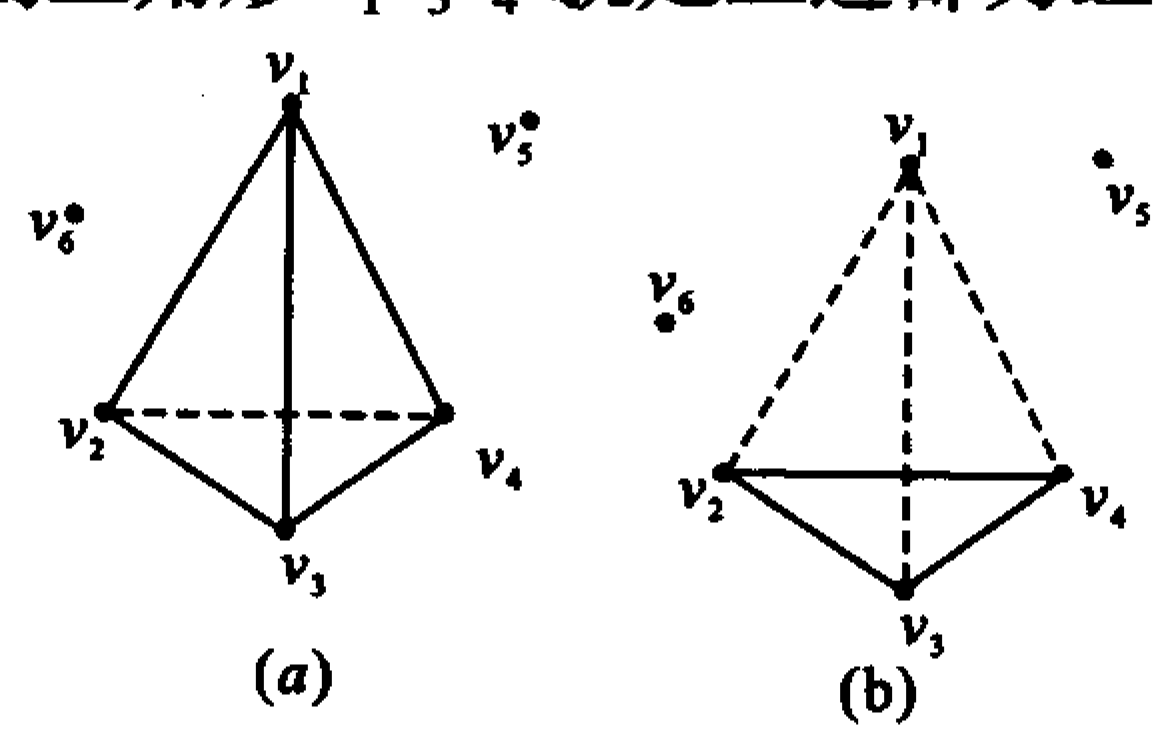
(图12)

例9. 平面上有6个点,任何三点都是一个不等边三角形的顶点。求证:这些三角形中必有一个的最短边同时是另一个三角形的最长边。

分析 设 $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$ 是已知点。在每个三角形 $v_iv_jv_k$ 中把最短边涂红色。因为任何三点都是一个不等边三角形的顶点,于是每个三角形中都有它的最短边涂红色。我们只需证明:在以这6个点为顶点的三角形中必有一个三边都被涂成红色。事实上,这个三角形的最长边之所以被涂红,就在于它同时是另一个三角形的最短边的缘故。

在 v_1 与其它5个点的连的边中要么至少有三条涂红色,要么有三条未涂色。

若 v_1v_2, v_1v_3, v_1v_4 涂红色,而三角形 $v_2v_3v_4$ 的最短边也涂红色,不妨设 v_3v_4 为最短边被涂红,则三角形 $v_1v_3v_4$ 就是三边都为红色的三角形(图13a)。若 v_1v_2, v_1v_3, v_1v_4 未涂色,则 $\Delta v_1v_2v_3$, $\Delta v_1v_3v_4$, $\Delta v_1v_2v_4$ 每个都有最短边被涂红色,只能是 v_2v_3, v_3v_4, v_2v_4 被涂红色,所以三角形 $v_2v_3v_4$ 就是三边都为红色的三角形(图13b)。



(图13)

例10. n 个点由线段连接着。已知每一点与另外任何一点

都有道路相连通,而任何两点都没有两种不同的道路。证明:线段总条数为 $n-1$.

(1961 年莫斯科第 24 届数学奥林匹克试题)

证明 把 n 个点作为图 G 的顶点,线段是边。依题意,G 是无圈连通图,因此 G 是树。由定理 3,G 的边数为 $n-1$. 即线段总条数为 $n-1$.

例 11. 有 n 个顶点且不含三角形的图 G 的最大边数为$\left[\frac{n^2}{4}\right]$.

证明 设 v_1 是 G 中具有最大度数的顶点,$d(v_1)=d$. 又设与 v_1 相邻的 d 个顶点为 $v_n, v_{n-1}, \cdots, v_{n-d+1}$. 由于 G 中不含三角形,所以 $v_n, v_{n-1}, \cdots, v_{n-d+1}$ 中任意两点都不相邻。故 G 的边数 $\|G\|$ 满足

$$\begin{aligned}\|G\| &\leqslant d(v_1)+d(v_2)+\cdots+d(v_{n-d})\\ &\leqslant (n-d)\times d \leqslant \left(\frac{n-d+d}{2}\right)^2=\frac{n^2}{4}.\end{aligned}$$

因为 $\|G\|$ 是正整数,所以 $\|G\| \leqslant \left[\frac{n^2}{4}\right]$. $\left[\frac{n^2}{4}\right]$是可以达到的:当 $n=2m$ 时,$G=K_{m,m}$;当 $n=2m+1$,$G=K_{m,m+1}$.

例 12. 在一次数学讲演中,有五位数学家打瞌睡。每人恰好睡了两次,每两个人都在某时刻同时睡着了。证明:一定存在某个时刻,有三个数学家同时睡着了。

(第 15 届美国奥林匹克数学试题)

证明 设 A,B,C,D,E 五个数学家,由于每人恰好瞌睡了两次,以角码区分,五个数学家的 10 次瞌睡可用 $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2, D_1, D_2, E_1, E_2$ 十个点表示,得到一个有十个顶点的图 G. 当且仅当两次瞌睡同时时,才在所对应的点之间连一条边。问题变为:证明图 G 中至少包含一个圈。

若 G 图中无圈,对连通图 G,根据定理 3,$\|G\|=9$;对非连通图,有 $\|G\|<9$. 因此,当图中 G 无圈时,G 中至多有 9 条边。但因为每对数学家都在某时刻同时瞌睡,于是图 G 中至少有$\frac{5\times4}{2}=$

10 条边。矛盾！所以可以肯定图 G 中存在圈。即一定存在某个时刻有至少三个数学家同时瞌睡着了。

以上诸例只是通过有趣的数学竞赛题来介绍图论的基本知识和方法。为了更好地用图论解题，人们把图作为一个对象来专门研究，从而形成图论这样一个学科。如果通过上面的介绍你已对图论产生兴趣，那么我们热切地欢迎你能到图论的王国来览胜探幽！

研究练习题 2－8

1. 在一间房子里有 $n(n>3)$ 个人，至少有一个人没有和房子里每个人握手。房子里可能与每人握手的人数的最大值是多少？

2. $2n(n\geqslant2)$ 个人中每人至少同其中 n 个人相识。证明：其中至少有四个人，使得这四个人围圆桌而坐时，每个人的旁边坐的都是与他相识的人。

3. 空间 $2n(n\geqslant2)$ 个点，其中任意三点不共线。试证：连接这些点的任何 n^2 条线段，可能不构成三角形。

4. 有 n 名选手参加数学竞赛，其中有些选手是互相认识的。而且任何两个不相识的选手都恰有两个共同的熟人。选手 B 与 A 认识但他俩没有共同的熟人。证明：他俩的熟人一样多。

5. 任意九个人中一定有三个人互相认识或者有四个人互不相识。

6. 俱乐部里有 99 个人，每个人声称只愿与他认识的人在一起打桥牌。证明：如果每个人认识的人数大于 66，总可以从这 99 个人中找出 4 个人，这 4 个人可以在一起打桥牌。

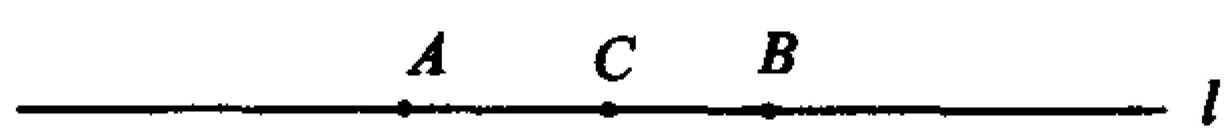
第3章 数学问题与模型

§3.1 平面点集二染色例谈

数学竞赛中的染色问题,本质上是一种分类方法。对所研究的对象通过黑、白两色来加以分类,称为二染色方法。对平面上的点集的所有点都染且仅染两种颜色之一,称为平面点集的二染色。

例1. 将一条直线黑、白二染色,证明:必存在同色的三个点,使得其中一点是另两点为端点的线段的中点。

证明 将一条直线 l 黑、白二染色,直线 l 称为二染色直线。在二染色直线 l 上任取三点,必有两点同色,不妨设 A,B 两点同为黑色。记 AB 的中点为 C.



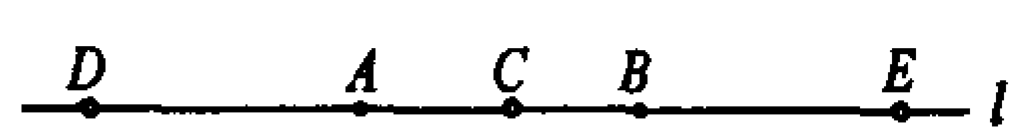
(图1)

(1)若 C 是黑点,则结论已成立(图1)

(2)若 C 是白点,在二染色直线 l 上再取 D,E 两点,使 $DA=AB=BE$.

①若 D,E 中有黑点,比如 D 为黑点,则 D,A,B 三点合于要求(图2);

(图2)

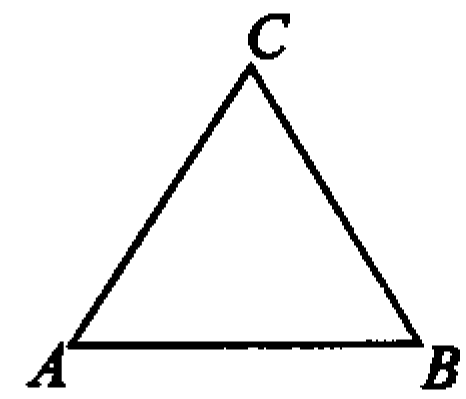


(图3)

②若 D,E 均为白点,这时 D,C,E 三点合于要求(图3)。

例2. 用任意方式将平面黑、白二染色。求证:一定存在长为 $a(a>0)$ 的线段,它的两个端点同色。

分析 在平面上任画一条长为 a 的线段 AB. 若 A,B 两点同色,则结论已成立;若 A,B 两点不同色,为确定起见,不妨设 A 为黑色,B 为白色。以 AB 为边作正三角形 ABC(图4),这时,若 C 为黑点,则线段 AC 合于题设要求;若 C 为白点,则线段 BC 合于题设要求。



(图4)

上述分析过程,其实已完成了证明。其中作单位正三角形 ABC 是关键,于是可以找到如下的简化证明方法。

证明 在二染色平面上作一个边长为 a 的正三角形,设三个顶点为 A,B,C,根据抽屉原则,A,B,C 三点中必有两点同色,比如 A,B 两点同色,又 $AB=a$,线段 AB 合于题设要求。

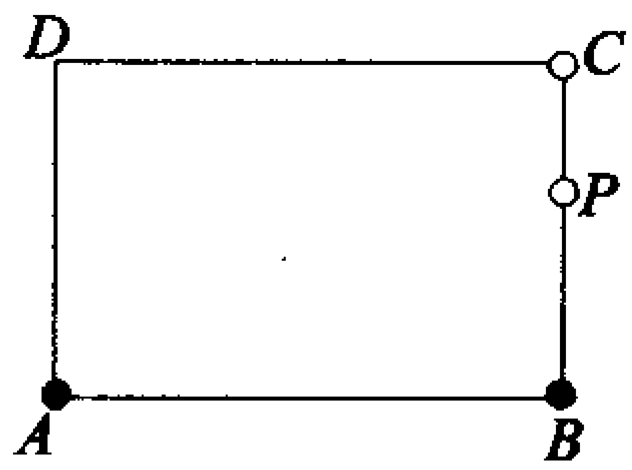
例3. 在二染色平面上,一定存在三个顶点同色的直角三角形。

证法1 根据例2,二染色平面上存在线段 AB,两个端点 A,B 同色,为确定起见,不妨设 A,B 同黑色。如图5,以 AB 为一边作矩形 $ABCD$,若 C,D 两点中至少有一个黑点,比如 D 为黑点,则三角形 ABD 为三个顶点同(黑)色的直角三角形。若 C,D 两点均为白色,这时在线段 BC 内部取一点 P,若 P 为黑点,则三角形 PAB 为三个顶点同(黑)色的直角三角形;若 P 为白点,则三角形 PDC 为三个顶点同(白)色的直角三角形。

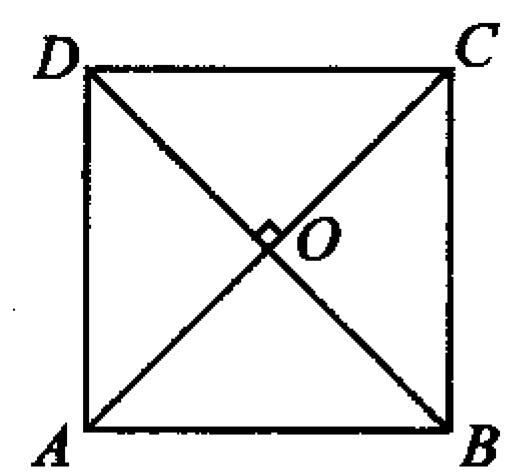
证法2 根据例2,二染色平面上存在线段 AB,两个端点 A,B 同色,为确定起见,不妨设 A,B 同黑色。如图6,以 AB 为一边作正方形 $ABCD$,设对角线交点为 O,如果 D,O,C 中有一点为黑点,则该点与 A,B 构成一个三顶点同(黑)色的直角三角形的三个顶点。如果 D,O,C 三点均为白点,则三角形 QOC 为三个顶点同(白)色的直角三角形。

由证法2可得推论:在二染色平面上,要么存在斜边为 a,要么存在斜边为$\sqrt{2}a$ 的直角三角形,它的三个顶点同色。

例4. 在二染色平面上,一定存在斜边为 a,一个锐角为30°



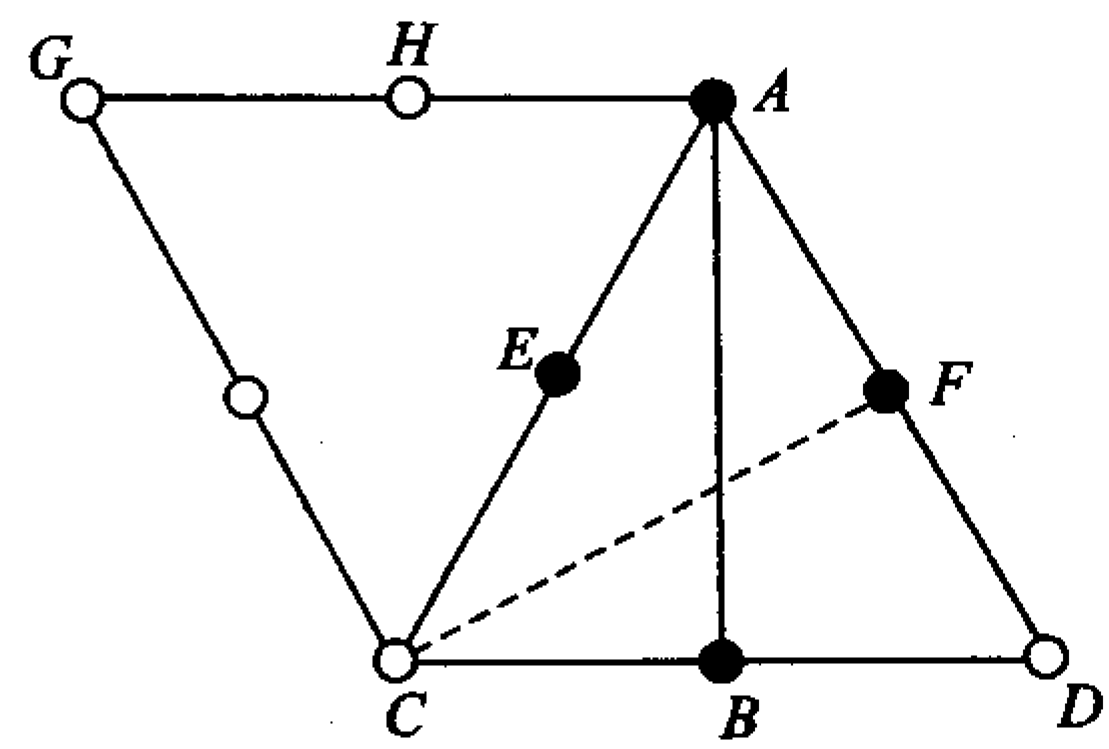
（图5）



（图6）

的直角三角形，它的三个顶点同色。

证法1 根据例2，二染色平面上存在线段 $AB=\frac{\sqrt{3}a}{2}$，它两个端点 A,B 同色，为确定起见，不妨设 A,B 同黑色。以 $AB=\frac{\sqrt{3}a}{2}$ 为一条高线作正三角形 ACD，其中 B 为 CD 边的中点。再完成正三角形 ACG，取 AC 的中点 E，AD 的中点 F，AG 的中点 H.



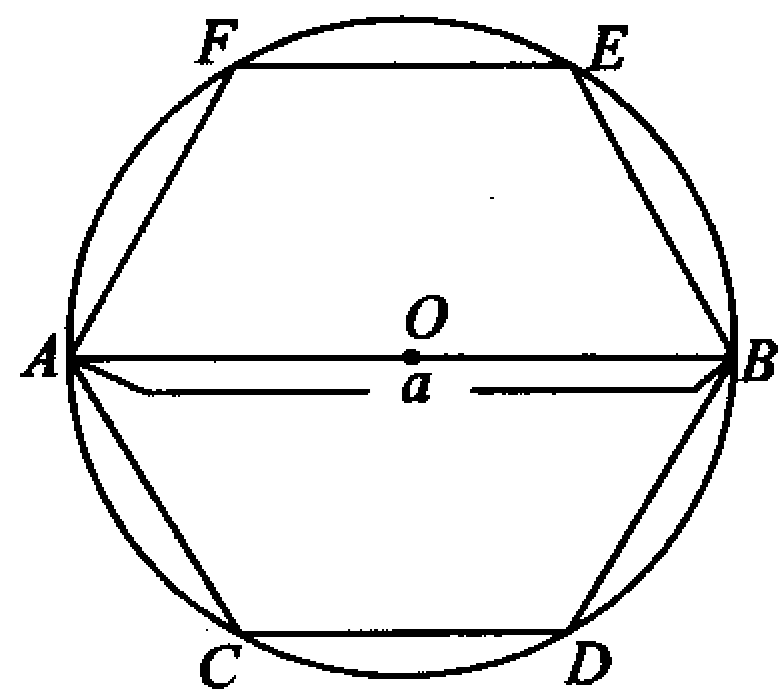
（图7）

假设在二染色平面上，不存在斜边为 a，一个锐角为 $30°$ 的直角三角形，它的三个顶点同色。则由 A,B 同黑色，知 C,D,H 均应为白色。E,F 应为黑色。由 A,E 同为黑色知，G 必为白色。此时 C,G,H 同为白色，且三角形 CGH 中斜边 CG 为 a，$\angle GCH=30°$. 与前面的假设矛盾！

所以，在二染色平面上，一定存在斜边为 a，一个锐角为 $30°$ 的直角三角形，它的三个顶点同色。

证法2 根据例2，二染色平面上存在线段 $AB=a$，它两个端点 A,B 同色，为确定起见，不妨设 A,B 同黑色。以 $AB=a$ 为直径作圆，在该圆内作内接正六边形 $ACDBEF$，若 C,D,E,F 中有一个黑点，比如 C 为黑点，则三角形 ACB 就是满足题设条件的直角三角形；若 C,D,E,F 全是白点，则三角形 CDE,CDF,CEF,DEF 都是满足题设条件的直角三角形。

综上所述，在二染色平面上，一定存在斜边为 a，一个锐角为 $30°$ 的直角三角形，它的三个顶点同色。

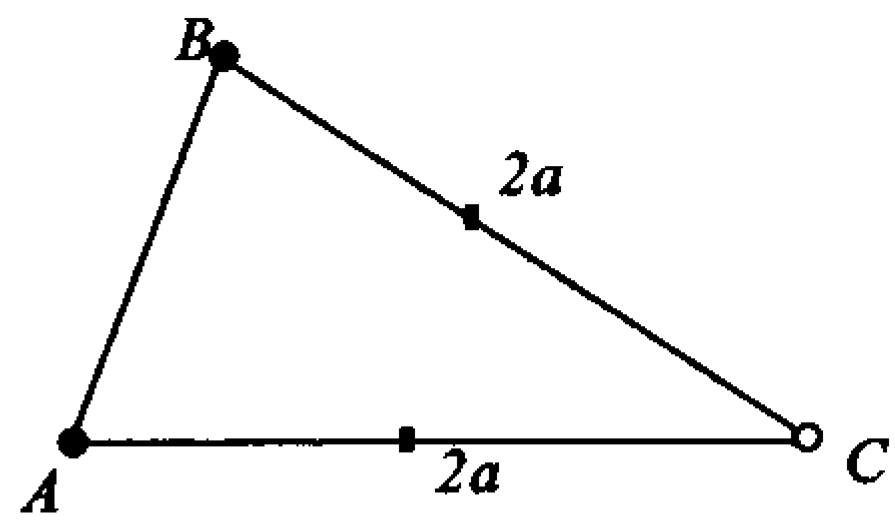


(图8)

例6. 证明　在二染色平面上，一定存在一个边长为 a 或 $\sqrt{3}a$ 的正三角形，它的三个顶点同色。

证明　若在二染色平面上，存在一个边长为 a 的正三角形，它的三个顶点同色。则问题得证。

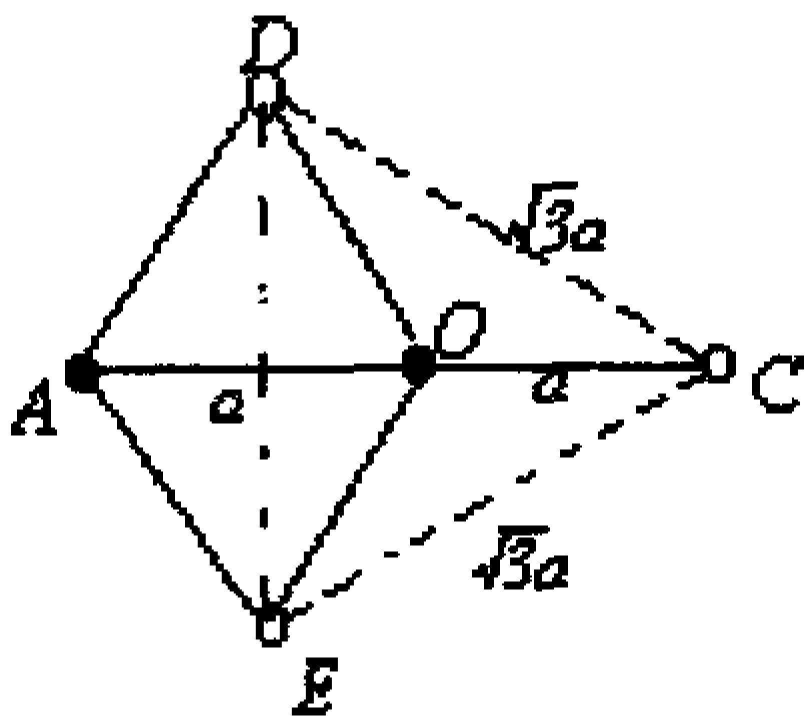
若不存在边长为 a 的正三角形，它的三个顶点同色，则每个边长为 a 的正三角形中一定有两个顶点异色，即存在长为 a 的线段两个端点异色。以 $AB=a$ 为底边，作腰长为 $2a$ 的等腰三角形 ABC，则 A,B 两点中存在一个与 C 异色。为确定起见，如图9，不妨设 A,C 两点异色（A 黑，C 白）。取线段 AC 的中点 O，则 O 必与 A,C 两点之一同色。不妨设 A,O 两点同为黑色。以 $AO=a$ 为一边作正三角形 AOD 与 AOE，由于假设不存在边长为 a 的正三角形，它的三个顶点同色，所以 D,E 都应是白色。这时 C,D,E 三点均为白色。容易计算 $CD=DE=EC=\sqrt{3}a$（图10），所以三角形 CDE 就是一个边长为 $\sqrt{3}a$ 的三个顶点同色的正三角形。



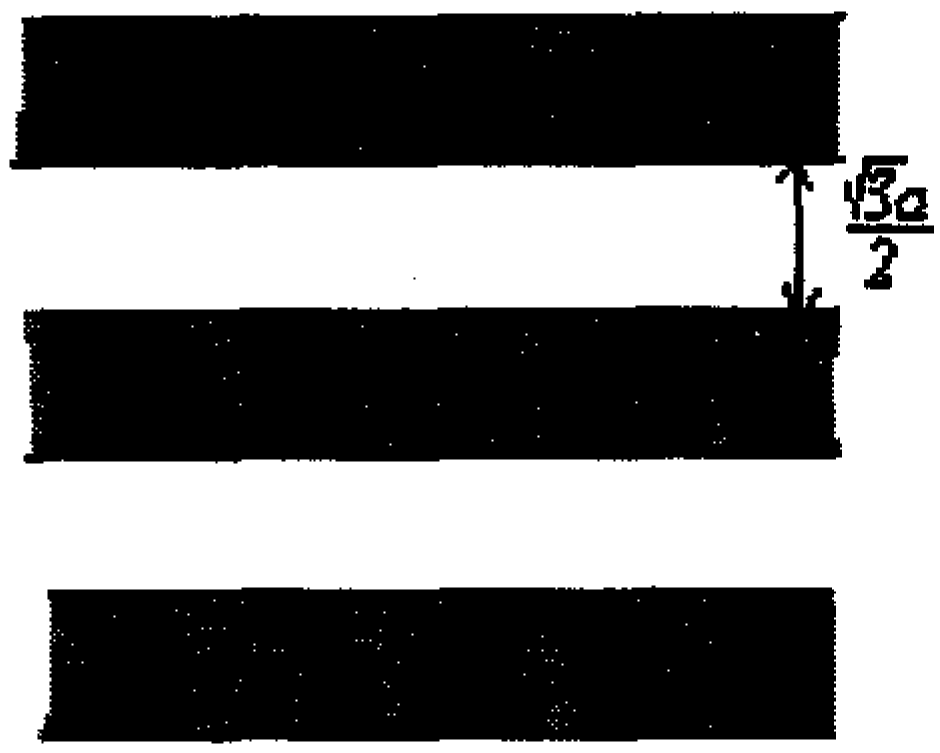
(图9)

说明　"在二染色平面上，不存在边长为 a 的正三角形，它的三个顶点同色"的情形是会发生的。事实上，用无穷条平行的直线可将平面分成宽为 $\frac{\sqrt{3}a}{2}$ 的水平带形区域，每个区域包含下边界线不含上边界线。将区域相间黑白染色。则在这个二染色平面上，不存在边长为 a 的正三角形，它的三个顶点同色。

例7.　证明：在二染色平面上，一定存在两个内角分别为



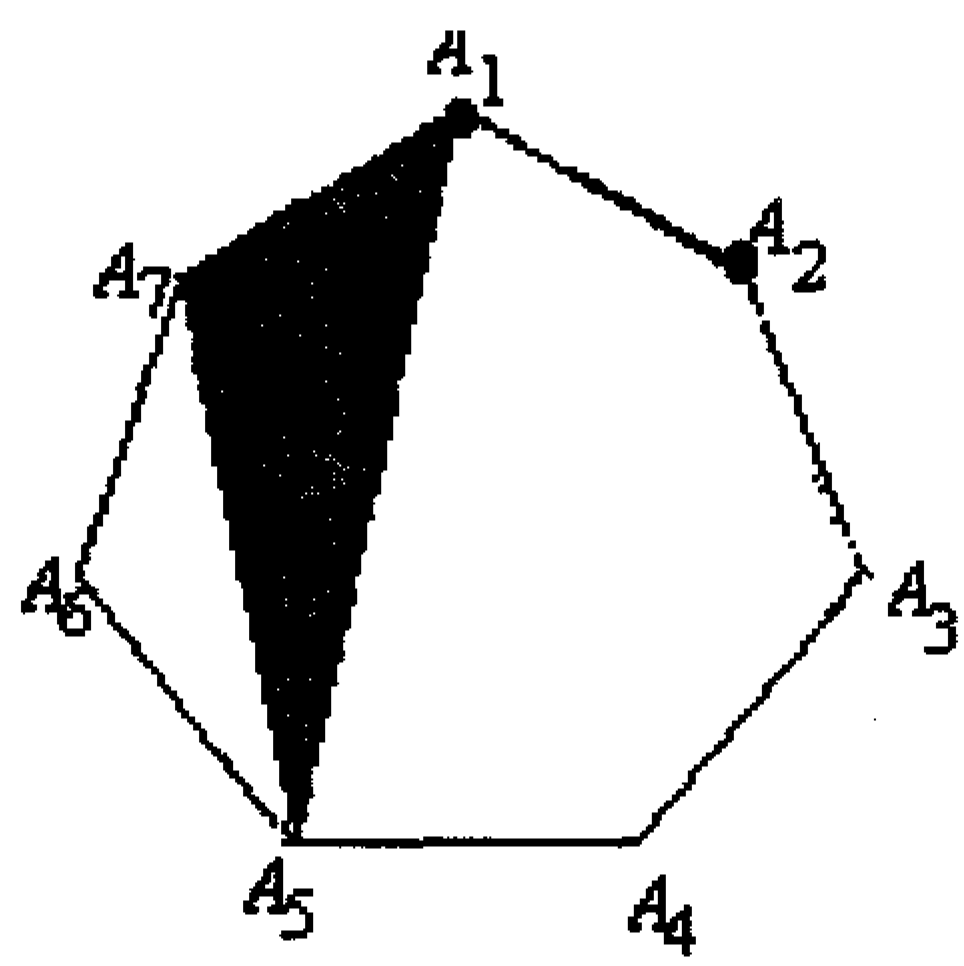
(图 10)



(图 11)

$51\frac{3}{7}^{\circ}$，$102\frac{6}{7}^{\circ}$且夹边长为 a 的三角形，它的三个顶点同色。

分析 三角形内角和为 180°，它的$\frac{1}{7}$为 $25\frac{5}{7}^{\circ}$，它的$\frac{2}{7}$为 $51\frac{3}{7}^{\circ}$，它的$\frac{4}{7}$为 $102\frac{6}{7}^{\circ}$. 容易想到与正七边形有密切关系。



(图 12)

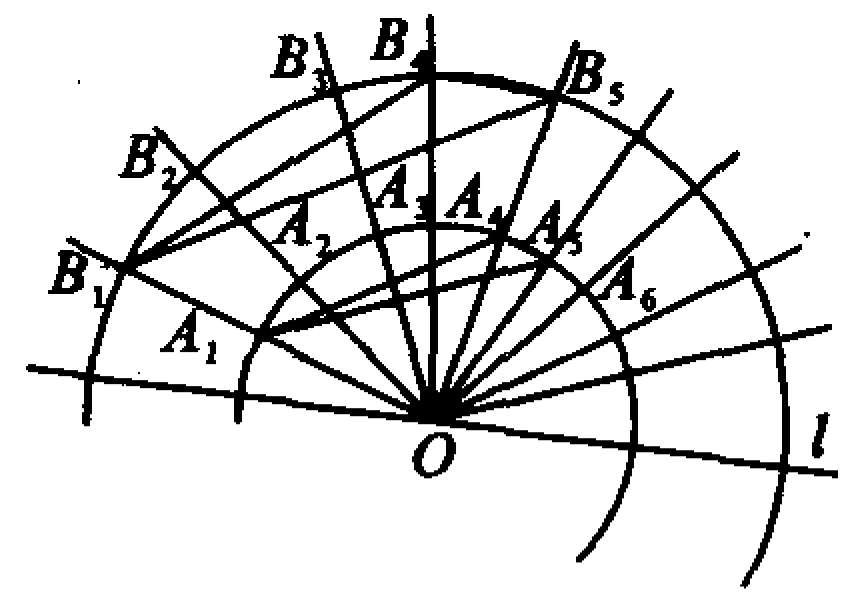
证明 以 a 为边长作正七边形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$，这七个顶点染两种颜色，必有 4 个点同色。其中一定有两个同色点是相邻的。为确定起见，不妨设 A_1，A_2 就是两个相邻的同(黑)色的顶点。若 A_3，A_7 中有一个黑点，比如 A_7 是黑点，这时其余四个点中无论哪个是黑点则三角形 $A_1A_2A_7$ 就合于题设条件的要求。若 A_3，A_7 都是白点，则 A_4，A_5，A_6 中有两个黑点，可以断言 A_4，A_6 中至少有一个黑点，不妨设 A_4 为黑点，则三角形 $A_1A_2A_4$ 就合于题设条件的要求。

例 8. 证明：在二染色平面上，一定存在两个相似的三角形，它们的相似比为 2，并且每个三角形的三个顶点都同色。

由于染色的实质就是分类，我们给出本题的一种简捷的构造性证法.

证明 以 O 为顶点在过 O 的某直线 l 的同侧引九条射线，以

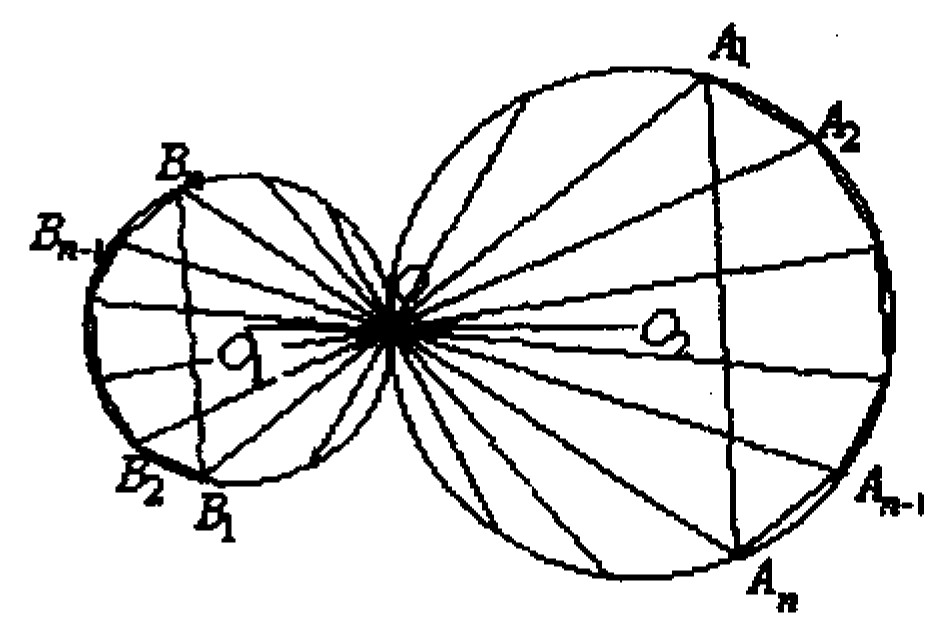
O 为圆心,1 为半径画弧,交这九条射线于 9 个点,由于这九点染有两种颜色,根据抽屉原则,至少有五点同色,设这五个点为 A_1,A_2,A_3,A_4,A_5(图 13)。再以 O 为圆心,2 为半径画弧,交射线 OA_1,OA_2,OA_3,OA_4,OA_5,依次于 B_1,B_2,B_3,B_4,B_5 点。再根据抽屉原则,其中必有三点同色。为确定起见不妨设 B_1,B_4,B_5 同色。连接 B_1B_4,B_4B_5,B_5B_1,及 A_1A_4,A_4A_5,A_5A_1。则 $\triangle B_1B_4B_5 \backsim \triangle A_1A_4A_5$,相似比为 2,并且 $\triangle A_1A_4A_5$ 与 $\triangle B_1B_4B_5$ 每一个的三个顶点都同色。



(图 13)

例 9.　在二染色平面上,存在相似比为 p 的两个相似的凸 n 边形,并且每个 n 边形都是单色顶点的 n 边形。

证明　在二染色平面上作 $\odot(O_1,1)$ 及 $\odot(O_2,p)$,使二圆外切于 O 点如图 14 所示,在 $\odot(O_2,p)$ 上任取 $4n-3$ 个点,这些点中至少有 $2n-1$ 个点同色。设这同色的 $2n-1$ 个点记为 $A_1,A_2,\cdots,A_{2n-1}$,连接 $A_1O,A_2O,\cdots$,$A_{2n-1}O$ 交 $\odot(O_1,1)$ 分别于 $B_1,B_2,\cdots$,B_{2n-1}. 在 $B_1,B_2,\cdots,B_{2n-1}$ 中至少有 n 个点同色,不失一般性,就设 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 这 n 个点同色,其对应的 A_i 为 $A_1,A_2,\cdots,A_n$. 只要依顺时针顺序依次连接 $A_1A_2,A_2A_3,A_3A_4,\cdots A_{n-1}A_n,A_nA_1$ 及 B_1B_2,B_2B_3,$B_3B_4,\cdots B_{n-1}B_n,B_nB_1$ 就得到两个分别是顶点单色的凸 n 边形 $A_1A_2A_3\cdots A_{n-1}A_n$ 和 $B_1B_2B_3\cdots B_{n-1}B_n$ 相似,且相似比为 p.



(图 14)

易知,当 $n=3,p=2$ 时又给出例 8 中的一个证明。

研究练习题 3－1

1. 将正五边形的顶点二染色,证明:存在三个同色的顶点,恰

为某一个等腰三角形的三个顶点。

2. 证明:在二染色平面上一定存在等腰直角三角形,它的三个顶点同色。

3. 证明:在二染色平面上一定存在全等的两个凸 n 边形,每个凸 n 边形的顶点都是同色的。

§3.2　简单的统筹规划例谈

我国著名数学家华罗庚教授生前十分重视数学的应用,并亲自带领小分队推广优选法、统筹法,取得了可喜可贺的成绩,使数学直接为国民经济发展服务。华老逝世以后,经批准举办的华罗庚金杯少年数学邀请赛,正是为了弘扬华老的精神,进一步振兴我国的数学事业。华罗庚金杯少年数学邀请赛的试题中渗透的数学应用意识,别开生面。其中有些问题正体现了简单的统筹规划思想。我们通过选自历届华杯赛的试题为例题,和大家一起学习统筹规划的思想方法。

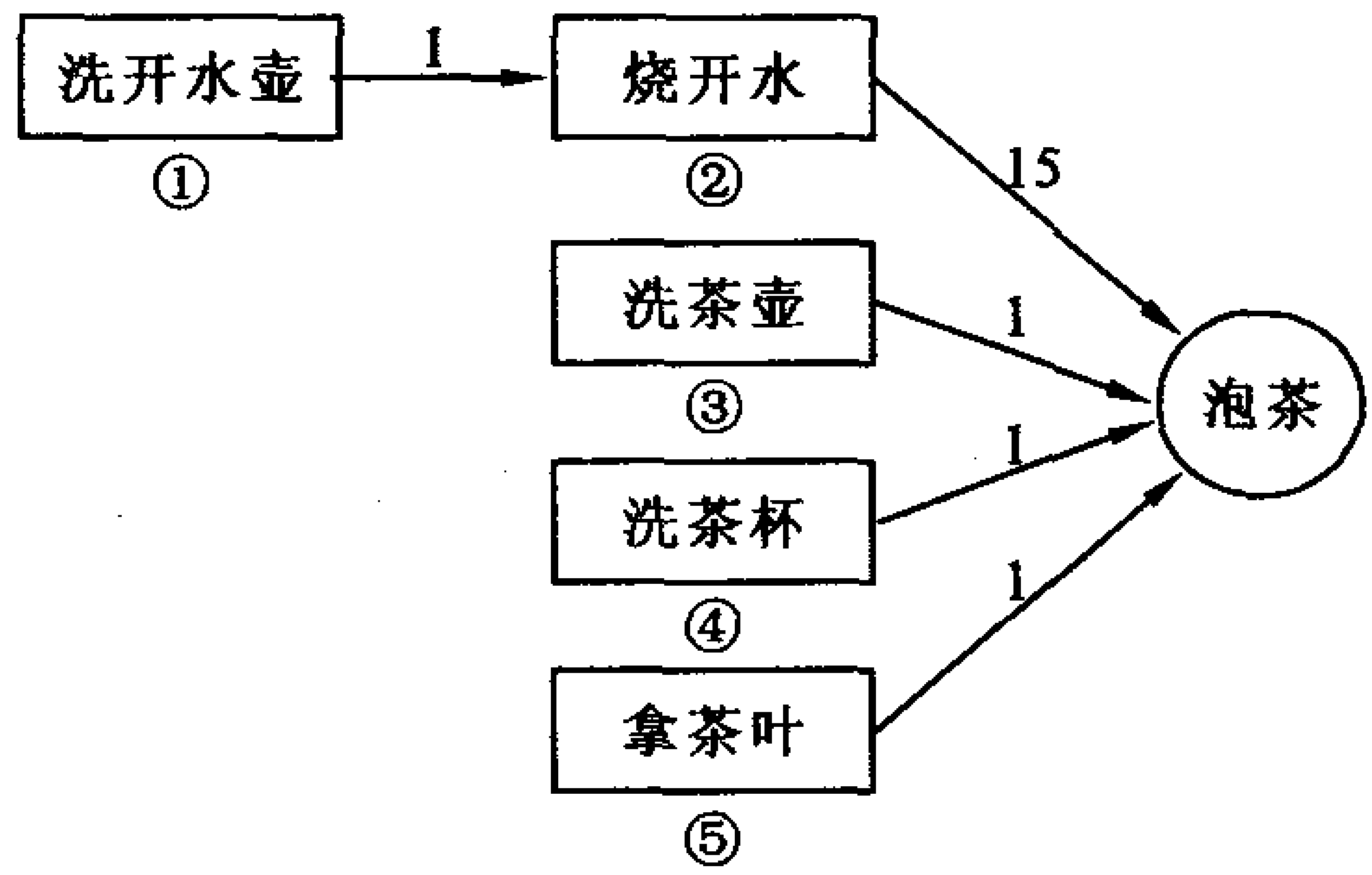
例 1.　妈妈让小明给客人烧水沏茶。洗开水壶要 1 分钟,烧开水要用 15 分钟,洗茶杯要用 1 分钟,拿茶叶要用 2 分钟。小明估算了一下,完成这些工作要花 20 分钟。为了使客人早点喝上茶,按你认为最合适的安排,多少分钟就能沏茶了?

解　小明估算的 20 分钟是累加 $1+15+1+1+2=20$ 的结果。小明是按如下程序进行的:

$$\underset{①}{\boxed{\text{洗开水壶}}} \xrightarrow{1} \underset{②}{\boxed{\text{烧开水}}} \xrightarrow{15} \underset{③}{\boxed{\text{洗茶壶}}} \xrightarrow{1} \underset{④}{\boxed{\text{洗茶杯}}} \xrightarrow{1} \underset{⑤}{\boxed{\text{拿茶叶}}} \xrightarrow{2} \boxed{\text{沏茶}}$$

然而,小明忽略了工序③、④、⑤可以与②同时并行来做,这样就可以节省时间。因此,最合理的安排是

箭杆上的数字表示这一行动所需时间,例如 $\xrightarrow{\quad 15 \quad}$ 表示烧开水要 15 分钟。该图表示,开水壶不洗,不能烧开水,因而洗开水壶是烧开水的先决问题。没开水、没茶叶,不洗茶杯,我们不能泡



茶,因而这些又是泡茶的先决问题。但在等待水开的15分钟内可以从容地完成洗茶壶、洗茶杯、拿茶叶这些工作,这样水开了就可泡茶,一共只用16分钟。因为烧开水的15分钟是不能少的,烧开水前1分钟洗壶也是不能少的,所以这16分钟是必须的,按最合理的安排,16分钟就能沏茶了。

说明 要合理安排工作,使时间最省,可以用箭头来表示先后次序,画出各项任务相互关系的流程图,从中找出关键路线,其余能并行安排的应并行安排。要画出关键路线要掌握:①起始工序和时间;②用时最长的工序;③可同时进行的工序。这样画出流程图,关键路线上的时间总和一般就是最省时间的安排。如本例中工序

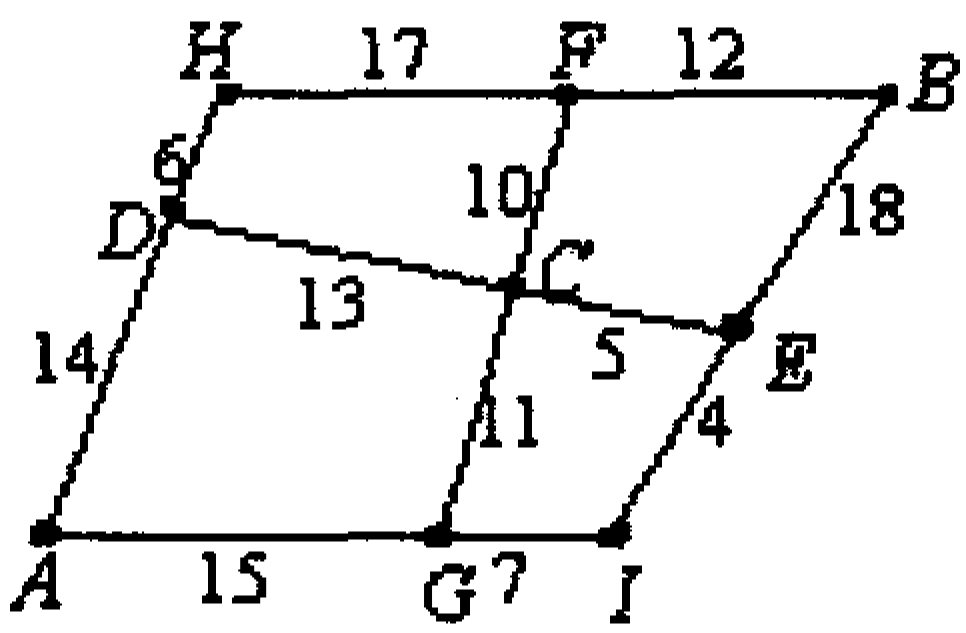
$① \xrightarrow{1} ② \xrightarrow{\quad 15 \quad}$就是关键路线。

例2. 如右图是一张道路图,每段路上的数字是小王走这段路所需的分钟数。请问小王从 A 出发走到 B,最快需要几分钟?

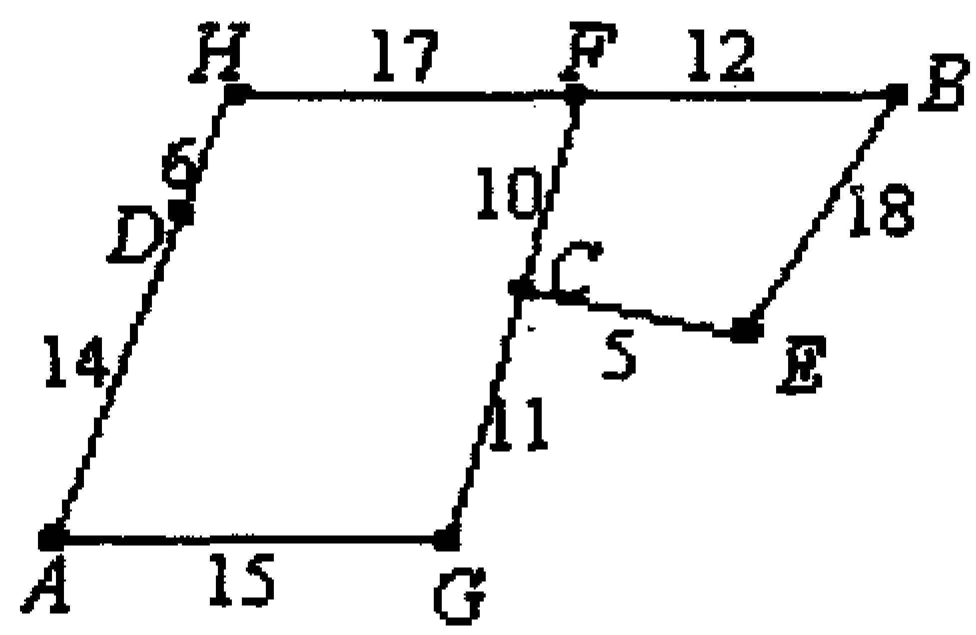
分析 为方便起见,我们把每个路口都标上字母。如图1所示。

首先,我们将道路逐步简化,从 A 出发经过 C 到 B 的路线都要经过 DC 和 GC,而从 A 到 C 有两条路线可走:ADC 需要 $14+13=27$ 分钟,AGC 需要 $15+11=26$ 分钟,我们不会走前一条路线,所以可将 DC 抹去,但 AD 不能抹去。因为从 A 到 B 还有别的路

线(例如 AHB)经过 AD,需要进一步分析。到 E 也有两条路线可



(图1)

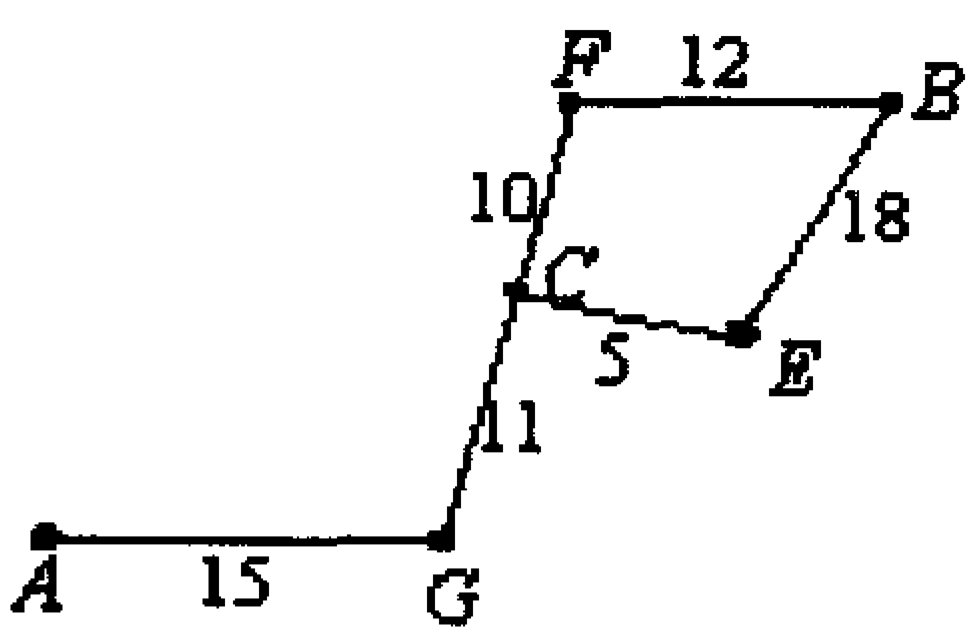


(图2)

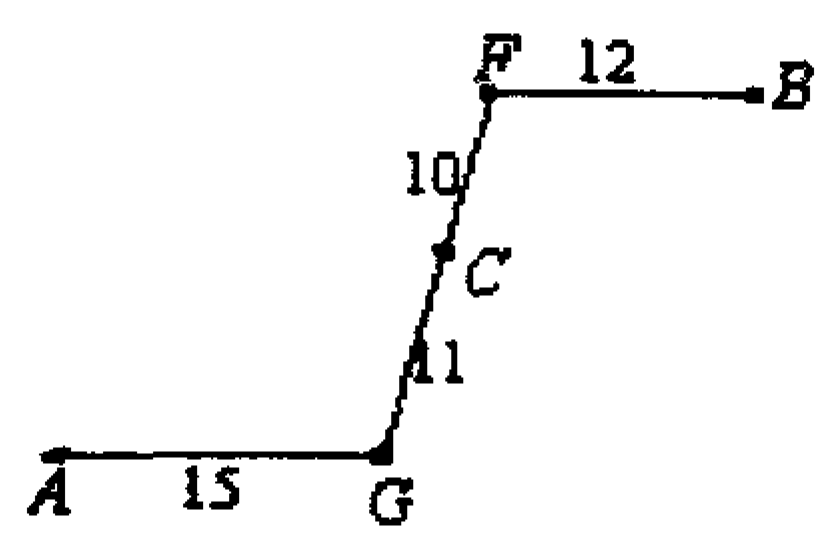
走:GCE 需要 $11+5=16$ 分钟,GIE 需要 $7+9=16$ 分钟,由 G 我们可从中任择其一,例如选 GCE,这样抹去 GIE,简化成图2所示(也可选后一条而抹去 CE,但不能抹去 GC,因为还有别的路线经过它,比如 $AGCFB$).

在图2中,从 A 到 F 有两条路线,经过 H 的一条需要 $14+6+17=37$ 分钟;经过 G 的一条需要 $15+11+10=36$ 分钟。我们又可以抹去前一条路线,成图3所示。

在图3中,从 C 到 B 也有两条路线,比较它们所需要的时间,又可将经过 E 的一条路线抹掉,最后剩下一条最省时间的路线,如图4所示,共需 $15+11+10+12=48$ 分钟。



(图3)



(图4)

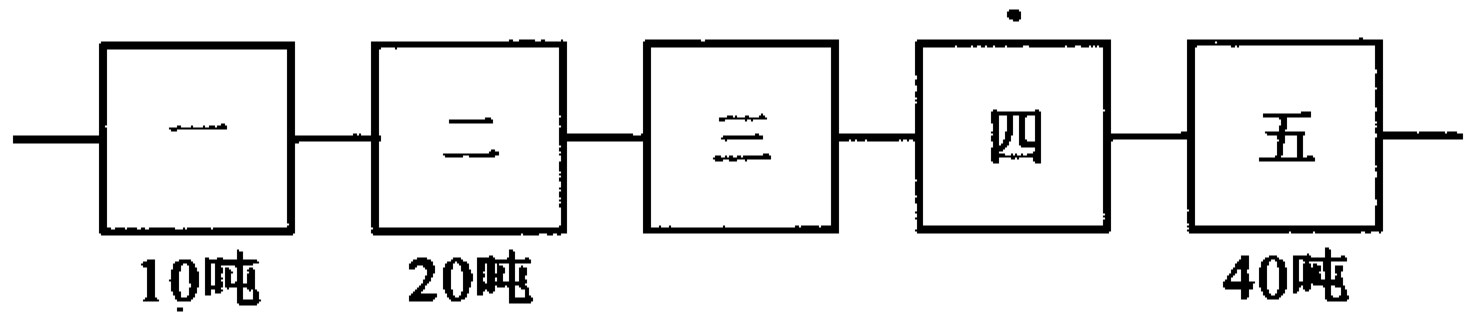
解 通过上面的分析,可见 C 点是关键。从 A 到 B 的道路如果经过 C 点,那么从 A 到 C 的道路中选一条最省时间的,即 AGC,从 C 到 B 的道路中也选一条最省时间的,即 CFB. 因而从 A 经过 C 到 B 的所有道路中最省时间的就是这两条道路接起来的

$AGCFB$,它的总时间是 48 分钟,剩下只须比较从 A 到 B 而不经过 C 点的道路与道路 $AGCFB$,看哪个更省时间。

不经过 C 点的道路只有两条,①$ADHFB$ 共需 $14+6+17+12=49$ 分钟;②$AGIEB$ 共需 $15+7+9+18=49$ 分钟。所以从 A 到 B 走 $AGCFB$ 路线最快,共需 48 分钟。

说明　有限多条路线比较所用时间最少,可以逐段地淘汰,分类筛选,最后比较出结果。这是常用的思想方法。

例 3.　在一条公路上每隔 100 公里有一个仓库(如图),共有五个仓库。一号仓库存有 10 吨货物,二号仓库存有 20 吨货物,五号仓库存有 40 吨货物。其余两个仓库是空的。现在想把所有货物集中存放在一个仓库里,如果每吨货物运输一公里需要 0.5 元运输费,那么最少要多少运费才行?



解　一号仓库中的 10 吨货物往二号仓库存放需运费 $10\times 100\times 0.5=500$(元)

若二号仓库中 20 吨货物往一号仓库存放需运费 $20\times 100\times 0.5=1000$(元)

二者比较,就知道一号仓库的货物应往二号仓库集中,这是因为二号仓库中货物更多。

现在可以认为二号仓库中有 30 吨货物,而五号仓库有 40 吨货物。因此,根据同样的道理,二号仓库的货物应往五号仓库中集中存放。这样共需运费最省,所需运费是 $(10\times 400+20\times 300)\times 0.5=5000$(元).

说明　在日常生活中,如果有几堆东西要往一处集中,数量少的东西往数量多的地方集中,总要省劲些。这是朴素的生活中的道理,我们通过计算可以证实,通俗地叫它"小往大处靠"。事

实上，在决定货物往何处集中时，起作用的是货物的重量，至于距离仅仅是为了计算运费。因此，若在重量不变的情况下改变各仓库间的距离，结果货物仍向五号仓库集中。然而如果仓库货物重量发生了变化，所集中的仓库可能会发生变化。比如一号仓库存有 10 吨货物，二号仓库存有 20 吨货物，五号仓库存有 25 吨货物时，这时，大家把货物都要集中到二号仓库运费会更省些。

例 4. 北京和上海同时制成了电子计算机若干台，除本地应用外，北京可以支援外地 10 台，上海可以支援外地 4 台。现在决定给重庆 8 台，汉口 6 台，若每台计算机的运费如下表：

（单位：百元）

起点＼终点	汉口	重庆
北京	4	8
上海	3	5

上海和北京制造的机器完全相同，应该怎样调运，才能使总的运费最省？

解 设由上海调运汉口 x 台（$x\leqslant 4$），运费为 $3x$ 百元，北京应再调往汉口 $6-x$ 台，运费为 $4\times(6-x)$ 百元。上海所余 $4-x$ 台应运往重庆，运费为 $5\times(4-x)$ 百元，北京所余 $10-(6-x)=4+x$ 台也应全部运往重庆，运费为 $8\times(4+x)$ 百元。

这样，北京、上海两地发出 14 台，汉口、重庆两地共接收 14 台。设总运费为 W，则有

$$W=3x+4\times(6-x)+5\times(4-x)+8\times(4+x)$$
$$=3x+24-4x+20-5x+32+8x=76+2x$$

要使运费最省，只须 $x=0$，这时 $W=76$（百元）.

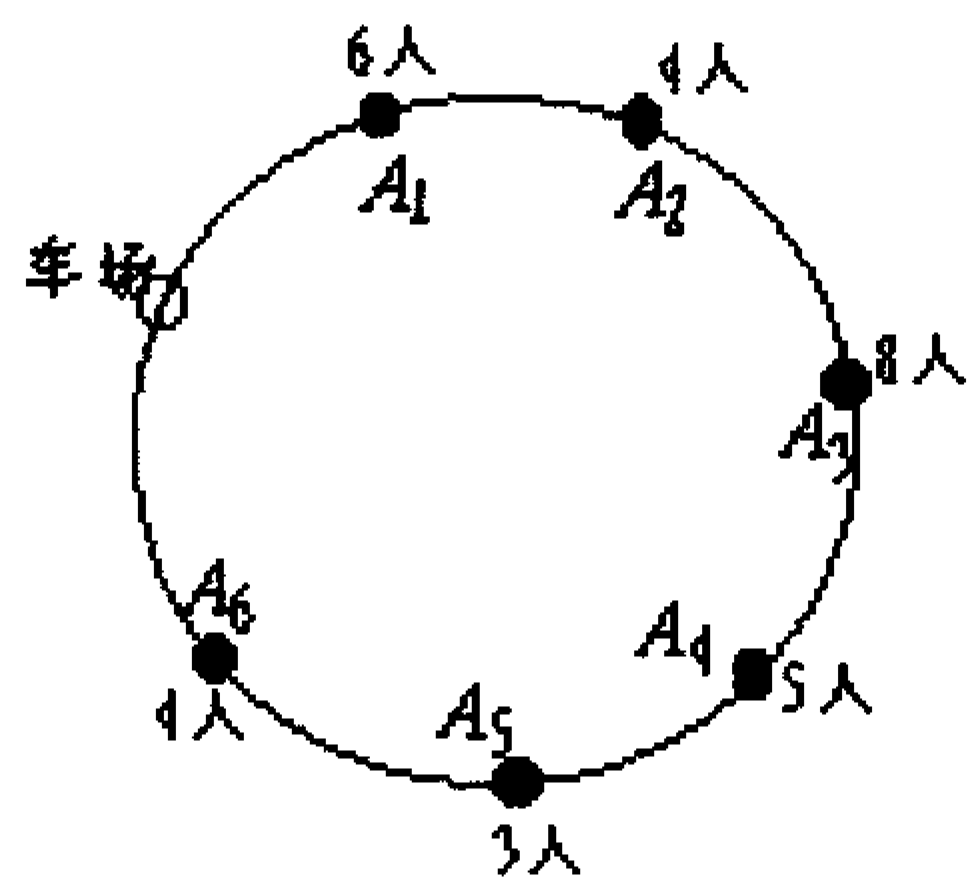
这时，北京调运汉口 6 台，运费为 24 百元；北京调运重庆 4 台，运费为 32 百元；上海的 4 台全调运到重庆，运费为 20 百元。

说明　本题是最简单的线性规划问题，我们用调整比较法也不难找到答案。

假设上海的 4 台全发运汉口，北京的 10 台发重庆 8 台，发汉口 2 台。此时，总运费 $W=8\times8+2\times4+4\times3=84$（百元）。

这时我们设想，北京发重庆的一台改发汉口将省运费 4 百元，上海发汉口的一台改发重庆将增运费 2 百元，合计省运费 2 百元。于是将 4 台上海发汉口的改发重庆，北京发重庆的调 4 台改发汉口，一共可省运费 $2\times4=8$ 百元。即总运费为
$84-8=76$（百元），与上面计算结果完全一致。

例 5.　某车场每天有 4 辆汽车经过 A_1,A_2,A_3,A_4,A_5,A_6 六个点组织循环运输。在 A_1 点装货需 6 个工人；在 A_2 点卸货需 4 个工人；在 A_3 点卸货需 8 个工人；在 A_4 点卸货需 5 个工人；在 A_5 点卸货需 3 个工人；在 A_6 点卸货需 4 个工人。若每点固定工人太多，会造成人力浪费，我们可以让装卸工人跟车走，这样有人跟车，有人固定。问最少要安排多少名装卸工人？



解　假定人数如图所示固定在每一站。

我们从每一站抽出一名装卸工，每辆车上安排一名，这样就可节约两人。如此抽取 3 次，每点的固定装卸工人数变为 A_1（3 人），A_2（1 人），A_3（5 人），A_4（2 人），A_5（0 人），A_6（1 人）．此时再从 A_1,A_2,A_3,A_4,A_6 这 5 个点中各抽 1 人，每车跟 1 人，这样又可节约 1 人。这时每辆车跟车 4 人共 16 人，A_1 点固定 2 人，A_3 点固定 4 人，A_4 点固定 1 人，总计需装卸工 $4\times4+2+4+1=23$（人）．

上述抽人调整的方案，只要站点数多于 4 时，就要进行。如抽 3 次后，A_3 站人数为 0，但其余 5 个站仍可各抽 1 人，分别每辆车多跟一名装卸工，仍可节约 1 人。直到人数不等于 0 的站点数

不大于(车辆数)4 时,才停止这种调整。

事实上可以验证,我们的方案是最优的。如果每辆车跟车 5 个人,4 辆车共跟车 20 人。A_1 点要派 1 名固定工,A_3 点要派 3 名固定工,总计共需要 24 名装卸工。如果每辆车跟车 3 个人,4 辆车共跟车 12 人。这时 A_1 点要固定工 3 人,A_2 点要固定工 1 人,A_3 点要固定工 5 人,A_4 点要固定工 2 人,A_6 点要固定工 1 人,总计需装卸工人 $12+3+1+5+2+1=24$(人). 因此,每辆车派 4 人跟车,其余固定到点,是最节省装卸工人的方案。

例 6. 某人从金坛市出发到扬州、常州、苏州、杭州各一次,最后返回金坛。已知各市之间的路费如表所示。请为他设计一条路费最省的路线。

(单位:元)

	金坛	常州	扬州	苏州	杭州
金坛	0	30	40	50	60
常州	30	0	15	25	30
扬州	40	15	0	25	30
苏州	50	25	15	0	15
杭州	60	30	25	15	0

解 路费最省的路线为:金坛→常州→杭州→苏州→扬州→金坛,或金坛→扬州→苏州→杭州→常州.

理由分析如下:

先画出一个示意图,便于我们直观分析

将两个城市之间的旅费标在这两个城市间的连线上。可以看到有三对城市之间的路费最低。都是 15 元。因此,常州→扬州→苏州→杭州共用 45 元,这时我们组成方案(Ⅰ)

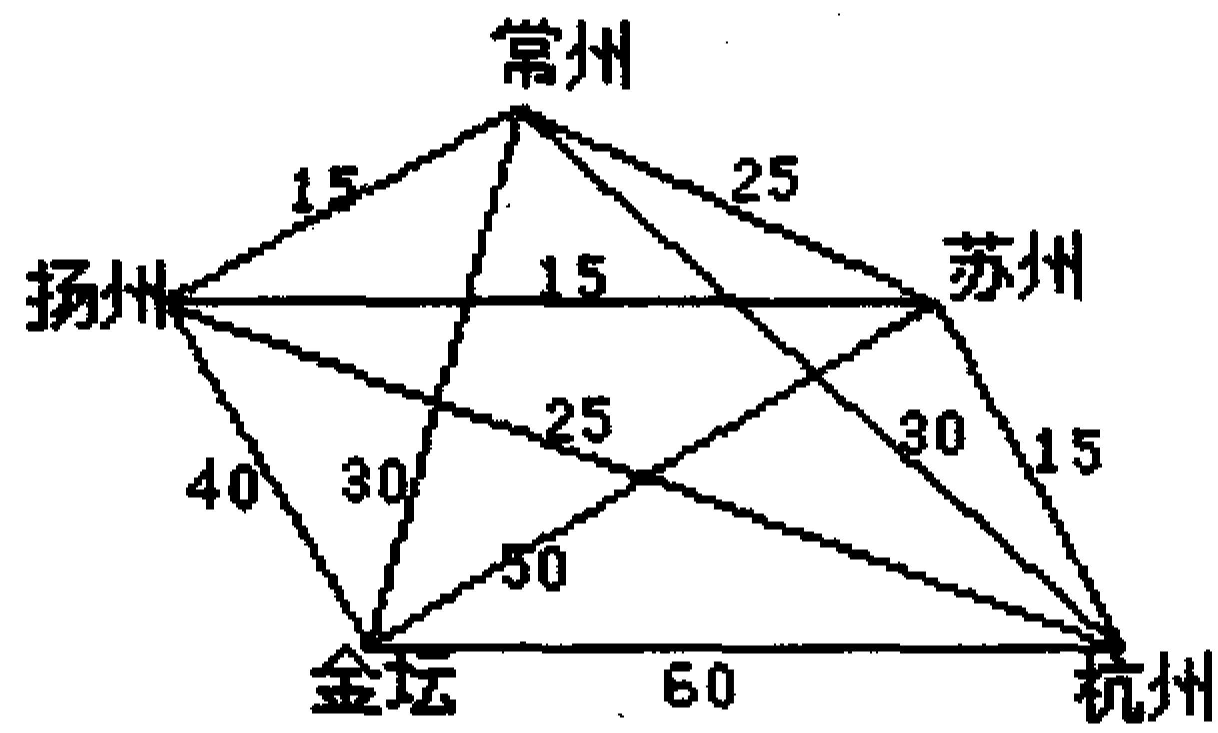
金坛 $\xrightarrow{30}$ 常州 $\xrightarrow{15}$ 扬州 $\xrightarrow{15}$ 苏州 $\xrightarrow{15}$ 杭州 $\xrightarrow{60}$ 金坛

方案(Ⅰ)共需路费 135 元。

我们再考虑方案(Ⅱ)

金坛 $\xrightarrow{30}$ 常州 $\xrightarrow{30}$ 杭州 $\xrightarrow{15}$ 苏州 $\xrightarrow{15}$ 扬州 $\xrightarrow{40}$ 金坛

方案(Ⅱ)共需路费 130 元。



(示意图)

因此,要路费最省,15 元的路段至多只能用两条。

当有两条 15 元路段时,25 元的路段至多有一个,因此五段路费不少于 $15+15+25+30+40=125$(元).

下面我们说明,总路费最小 125 元是不能达到的。

事实上,由金坛一进一出的 $30+40=70$ 元不能变动。如若变动,总路费至少增加 10 元,不会取得最小值。这样,在选定金坛 $\xrightarrow{30}$ 常州,金坛 $\xrightarrow{40}$ 扬州的前提下,两个 15 元的路段不能取扬州 $\xrightarrow{15}$ 常州,而只能取扬州 $\xrightarrow{15}$ 苏州,苏州 $\xrightarrow{15}$ 杭州,这时无论再选扬州 $\xrightarrow{25}$ 杭州或苏州 $\xrightarrow{25}$ 常州的哪一条,都不能形成起于金坛最后又止于金坛的经过其余每个城市各一次的回路。所以总路费最小 125 元实际上是不能实现的。由于路费的差价至少是 5 元,所以方案(Ⅱ)的总路费 130 元是最省的。当然方案(Ⅱ)也可以反向进行,所以有上面的两组答案。

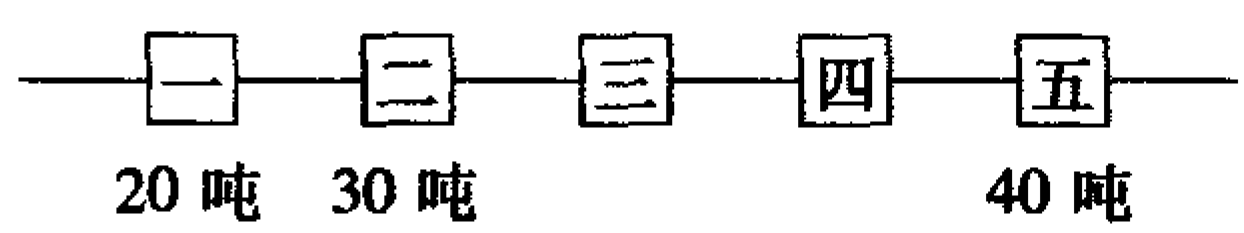
研究练习题　3-2

1. 在火炉上烤饼,饼的两面都要烤。每烤完一面需要 3 分钟,炉上只能同时放两个饼。现在需要烤 3 个饼,最少需要多少

分钟？

2. 某仓库有157吨货物要运到某地，大卡车的载重量是5吨，小卡车的载重量是2吨。它们把货物运到目的地的耗油量分别是10公升和5公升。车辆足够安排调运使用，问：用大小卡车各多少辆参加运输，耗油量最少？

3. 在一条公路上每隔100公里有一个仓库（如图），共有五个仓库。一号仓库有20吨货物，二号仓库有30吨货物，五号仓库有40吨货物，其余两个仓库是空的。现在想把所有货物集中存放在一个仓库里，如果每吨货物运输一公里需要0.5元运输费，那么最少要多少运费才行？



4. 今烧一道“香葱炒蛋”菜，需要七道工序。每道手续所需时间如下：敲蛋1分钟，洗葱切葱花2分钟，打蛋3分钟，洗锅2分钟，烧热锅2分钟，烧热油4分钟，炒4分钟。那么你认为烧好这道菜所需最短时间是多少分钟？

5. 甲、乙、丙、丁四名同学分别用20、15、10、5公斤的水桶，在同一水龙头下打水。假设每分钟水的流量是1公斤，问：按怎样的顺序排列使他们所花的总时间最少？最少时间是多少？

6. 甲城和乙城有同型号的某种机器可支援丙城和丁城。甲城可外调8台，乙城可外调4台，而丙城、丁城分别需要该机器5台和7台。由于各城间的距离不同，每台机器的运价如下表所列：

运费（单位：元） 收点 / 发点	丙城	丁城
甲城	500	1200
乙城	300	800

问:怎样调运才能使运费最省?

§3.3　能与不能的判定问题

现实世界有许多问题,涉及到存在性、可行性的判定问题。如果事先能够证明所期望的事物的存在性或可行性,我们就可以科学地决策。数学竞赛中许多能与不能的判定问题,可以从小培养学生科学决策的意识与智慧。

例 1.　你能在 3×3 的方格表中每个格子里都填一个自然数,使得每行、每列及两条对角线上的三数之和都等于 1997 吗?若能,请填出一例,若不能,请说明理由。

分析与解　若能填入九个自然数 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_8,a_9$,满足题设条件,则

$$a_1+a_5+a_9=1997$$
$$a_2+a_5+a_8=1997$$
$$a_3+a_5+a_7=1997$$
$$a_4+a_5+a_6=1997$$

a_1	a_2	a_3
a_4	a_5	a_6
a_7	a_8	a_9

相加得$(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8+a_9)+3a_5=4\times1997$

而 $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8+a_9=3\times1997$

所以 $3a_5=1997\Rightarrow a_5=\dfrac{1997}{3}$,与 a_5 是自然数矛盾。

因此题设要求的填数法不存在。

例 2.　有一长为 $11cm$,宽为 $9cm$,高为 $7cm$ 的长方体木块,能否切割成 77 块长、宽都是 $3cm$,高是 $1cm$ 的长方体形状的积木块?说明理由。

分析与解　不能切割。

理由如下　木块体积为 $11\times9\times7=693$ 立方厘米。77 块 $3\times$

3×1 立方厘米的积木也恰为 693 立方厘米。

如果能将 $11\times9\times7$ 立方厘米的木块切割为 77 块 $3\times3\times1$ 立方厘米的积木,那么,11×7 的侧面将被小积木的侧面盖满。而小积木侧面面积要么是 3 平方厘米,要么是 9 平方厘米。

由 $11\times7=3m+9n$,可知 $3\mid11\times7$,得出矛盾。

所以,长为 11cm,宽为 9cm,高为 7cm 的长方体木块不能切割成 77 块 $3\times3\times1$ 立方厘米的长方体积木。

例 3. 能将 1,2,3,4,5,6,7,8,9 填在 3×3 的方格表中,使得横向与竖向任意相邻两数之和都是质数吗?如果能,请给出一种填法;如果不能,请你说明理由。

分析与解 不能办到。

理由如下 奇数 1,3,5,7,9 中任两个之和都是大于 2 的偶数,因而是合数。所以在填入 3×3 的表格时它们中任两个横向、竖向都不能相邻。如果满足题设条件的 3×3 表格的填法存在,那么奇数 1,3,5,7,9 只能填在表的四角格和中心格。而偶数 2,4,6,8 填在★处。于是中间所填的奇数要与 2,4,6,8 横向或竖向相邻,即中间所填的奇数与 2,4,6,8 之和都要是质数。

	★	
★		★
	★	

然而,这是不可能的。原因是:

$1+8=9$ 是个合数,

$3+6=9$ 是个合数,

$5+4=9$ 是个合数,

$7+2=9$ 是个合数,

$9+6=15$ 是个合数。

这表明,1,3,5,7,9 都不能填在中心格,与 1,3,5,7,9 中必有一个数填在中心格矛盾。

所以在 3×3 的表格中满足题设要求的填数法是不存在的。

例4.　能否将 1~16 这 16 个自然数填入 4×4 的方格表中(每个小方格只填一个数),使得各行之和及各列之和恰好是 8 个连续的自然数?如果能填,请给出一种填法;如果不能填,请说明理由。

分析与解　不能。

理由如下

将所有的行和与列和相加,所得之和为 4×4 的方格表中所有数之和的 2 倍。即为 $(1+2+3+\cdots\cdots+15+16)\times2=16\times17$.

而 8 个连续的自然数之和设为

$k+(k+1)+(k+2)+(k+3)+(k+4)+(k+5)+(k+6)+(k+7)$

$=8k+28$

若 4×4 的方格表中各行之和及各列之和恰好是 8 个连续的自然数,应有

$8k+28=16\times17$

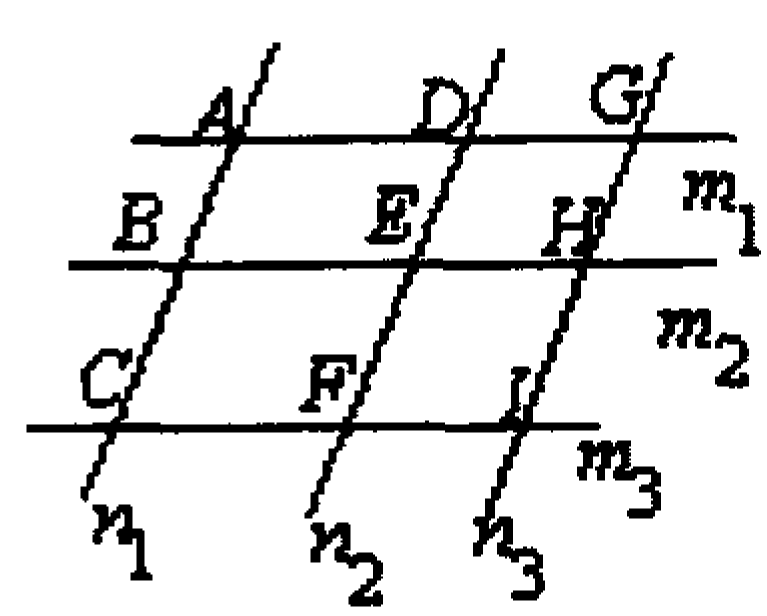
即　$2k+7=4\times17\cdots\cdots(*)$

显然$(*)$式左端为奇数,右端为偶数,得出矛盾。

所以不能实现题设要求的填数法。

例5.　(1)请你在平面上画出 6 条直线(没有三条共点),使得它们中的每条直线都恰与另三条直线相交,并简单说明画法。

(2)能否在平面上画出 7 条直线(任意三条都不共点),使得它们中的每条直线都恰与另 3 条直线相交?如果能请画出一例,如果不能请说明理由。



解　(1)如图所示的两组平行线:$m_1//m_2//m_3$,$n_1//n_2//n_3$,这 6 条直线没有三条共点,它们中的每条直线都恰与另三条直线相交。

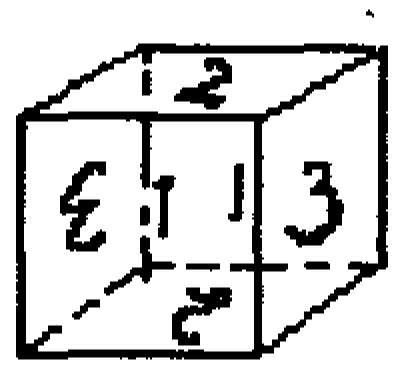
(2)在平面上不能画出没有 3 线共

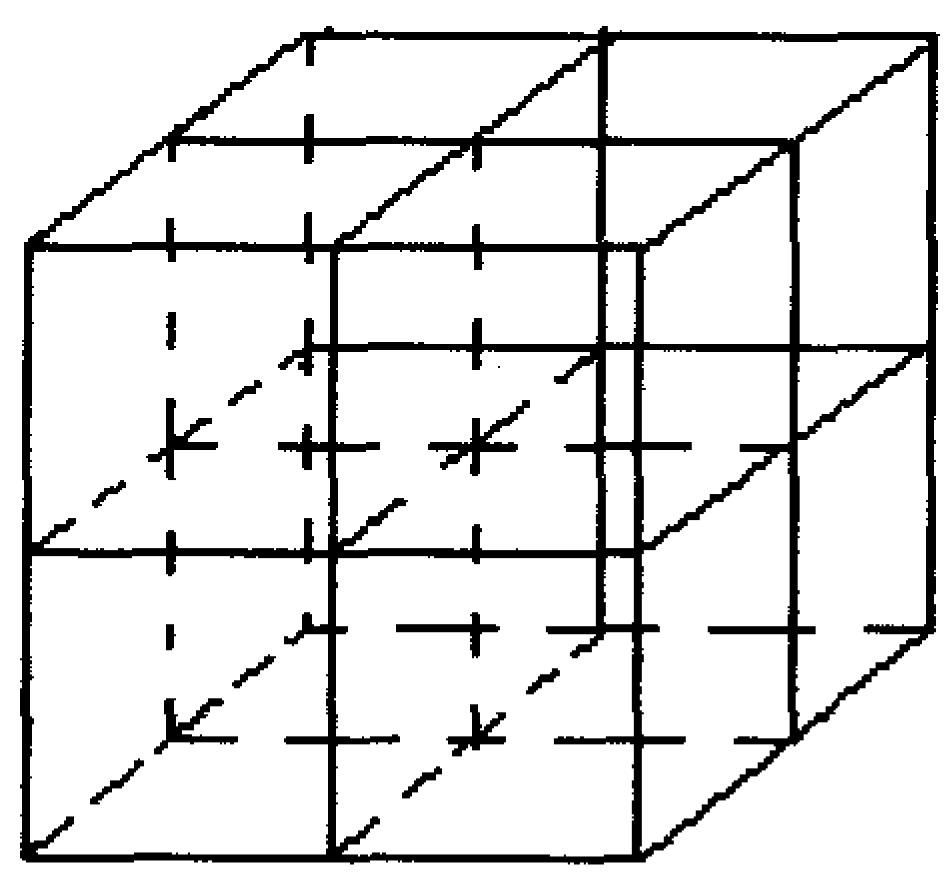
点的 7 条直线，使得每条直线都恰与另 3 条直线相交。

理由如下

假设平面上可以画出 7 条直线，其中的每条直线都恰与另 3 条直线相交，因两条直线相交只有一个交点，又没有三条直线共点，所以每条直线上恰有与另 3 条直线交得的 3 个不同的交点。我们按直线去计数这些交点，共有 $3\times7=21$ 个交点，但每个交点分属两条直线，被重复计数一次，所以这 7 条直线交点数为 $\frac{21}{2}=10.5$ 个，因为交点个数应为整数，矛盾！所以，满足题设条件的 7 条直线是画不出来的。

例 6. 有 8 个完全相同的棱长为 1 的单位立方体，每一个单位立方体的三对相对的面上有一对写了数字 1，有一对写了数字 2，另外一对写了数字 3. 将这 8 个单位立方体拼成 $2\times2\times2$ 的大立方体（如图）。





如果规定大立方体的每一个面的 4 个数字之和为这个面的“特征数”，请你判断，是否有一种组合方式，使得大立方体的六个面上的“特征数”是 6 个连续的正整数？

解 每面上的“特征数”最小是 4，最大是 12. 设最小的“特征数”为 a，则连续的 6 个“特征数”的和是

$a+(a+1)+(a+2)+(a+3)+(a+4)+(a+5)=6a+15$，是个奇数。

另一方面，$2\times2\times2$ 的大立方体有 8 个顶点，每个顶点是一个

小立方体分别写有1,2,3的三个面,这三个面上的数之和等于$1+2+3=6$,8个顶点所邻24个面的数字和,也就是$2\times2\times2$的大立方体6个面的“特征数”的和等于$6\times8=48$,是个偶数。矛盾!

所以,不存在题设要求的组合方式,使得大立方体的六个面上的“特征数”是6个连续的正整数。

例7.(1)现有一个19°的“模板”,请你设计一种办法,只用这个“模板”和铅笔在纸上画出19°的角来。

(2)现有一个17°的模板与铅笔,你能否在纸上画出一个1°的角来?

(3)用一个21°的模板与铅笔,你能否在纸上画出一个1°的角来?

对(2)(3)两问,如果能,请你简述画法步骤,如果不能,请你说明理由。

解　(1)由于$19°\times19=361°$,易知可以画出1°的角来。

(2)利用17°的模板,要画出1°的角,关键在于找到整数m,n,使得$17\times m-180\times n=1$,事实上,$17\times53-180\times5=901-900=1$. 所以用一个17°的模板与铅笔,能在纸上画出一个1°的角来。

(3)若用21°的模板能画出一个1°的角,则存在整数m,n,使得

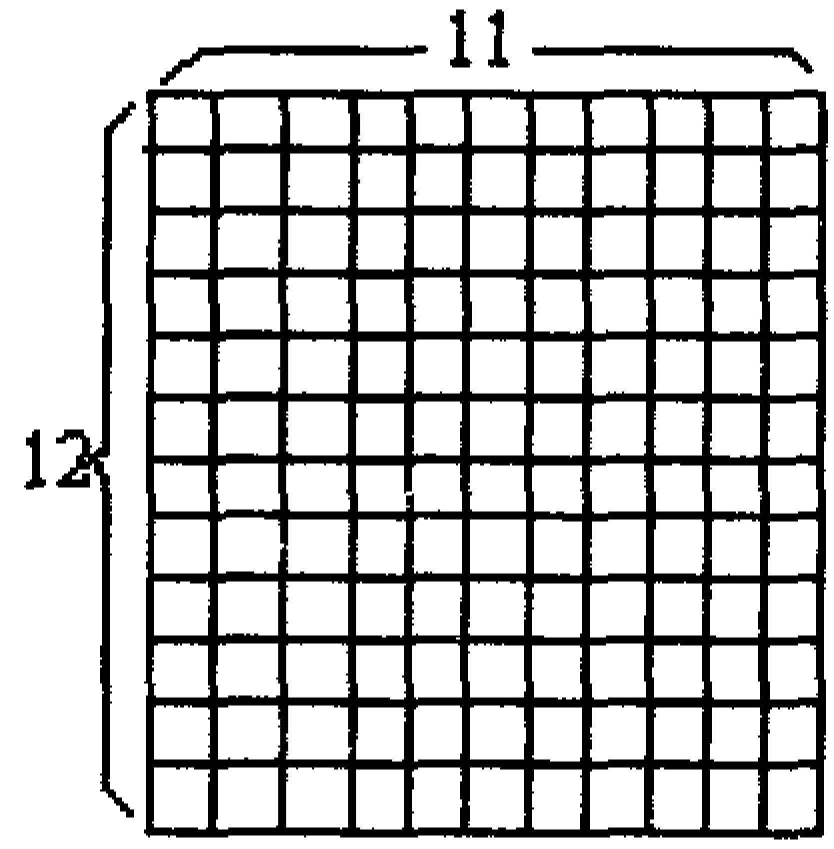
$21°\times m-180°\times n=1°$,此时,我们发现$3\mid21$,$3\mid180$,则推出$3\mid1$,矛盾!

因此,用21°的模板与铅笔不能画出一个1°的角来。

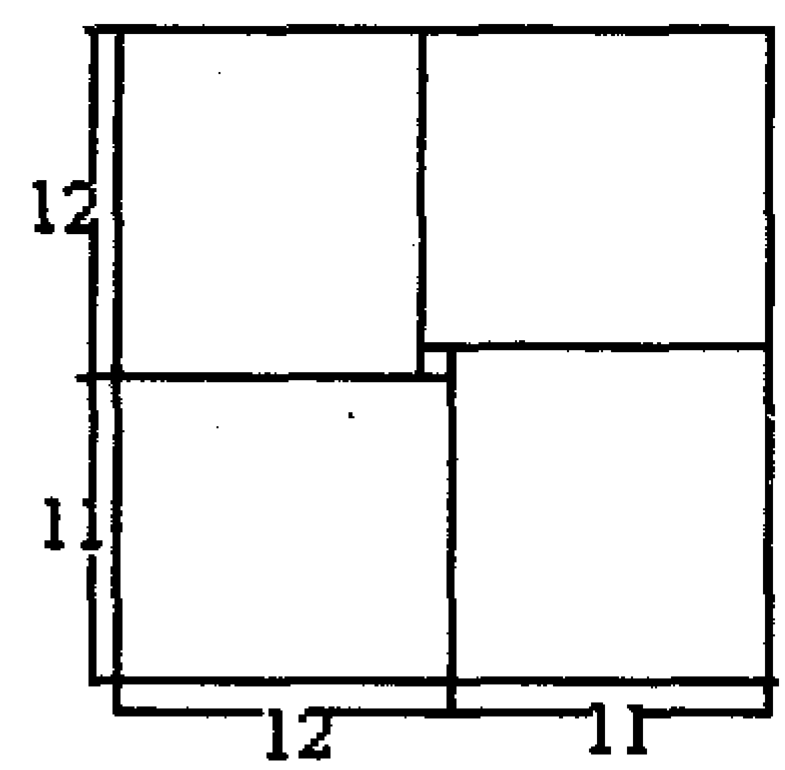
例8.　(1)用1×1,2×2,3×3三种型号的正方形地板砖铺设23×23的正方形地板,请你设计一种铺设方案,使得1×1的地板砖只用一块。

(2)请你证明:只用2×2,3×3两种型号的地板砖,无论如何铺设都不能铺满23×23的正方形地面而不留空隙。

解　(1)如图1,用12块3×3地板砖与6块2×2地板砖能铺成12×11的长方形地面。如图2的铺设方案,用4个12×11



(图 1)

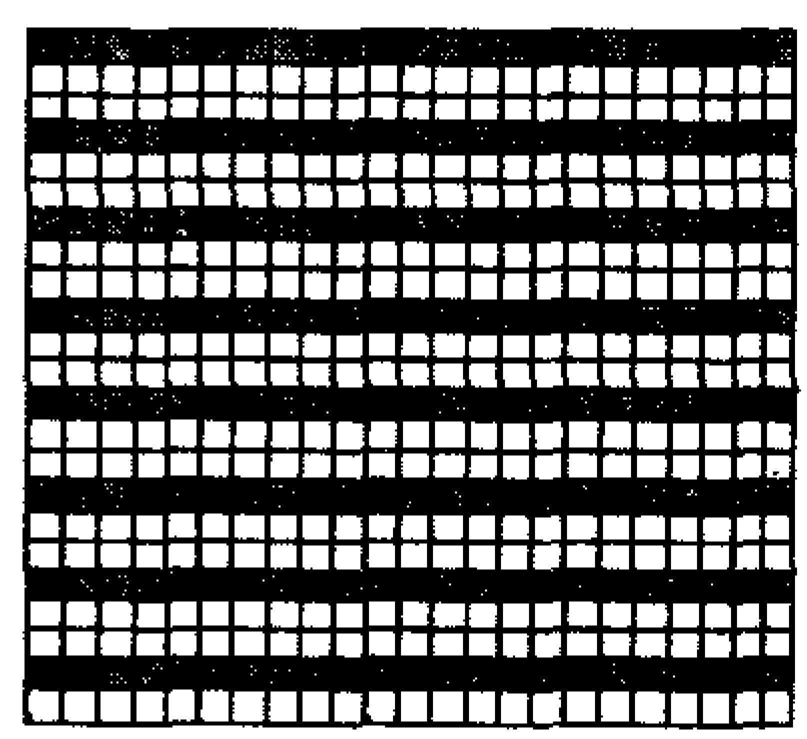


(图 2)

的图 1 所示的板块,恰用 1 个 1×1 的地板砖,可以铺满 23×23 的正方形地面。

(2)我们将 23×23 的大正方形分成 23 行 23 列共计 529 个 1×1 的小方格,再将第 1 行、第 4 行、第 7 行、第 10 行、第 13 行、第 16 行、第 19 行、第 22 行这 8 行染红色,其余 15 行都染白色,如图 3.

任意 2×2 或 3×3 的小正方形无论怎样放置(边线与大正方形格线重合),每块 2×2 或 3×3 的小正方形都将盖住偶数个 1×1 的白色小方格。



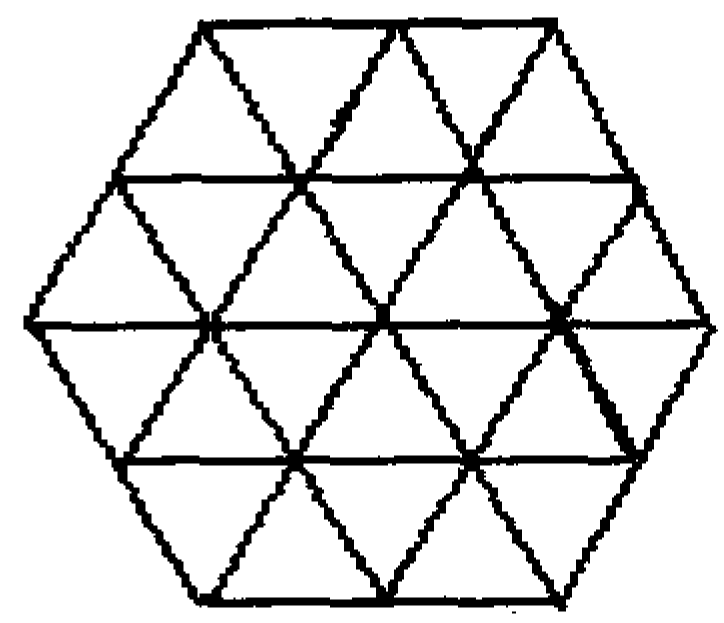
(图 3)

假设用 2×2 及 3×3 的正方形地板砖可以铺满 23×23 的正方形地面,则它们盖住的 1×1 的白色小方格总数为偶数个。然而染色后的 23×23 的正方形地面共有 23×15(奇数)个 1×1 的白色小方格,矛盾!

所以,只用 2×2, 3×3 两种型号的地板砖,无论如何铺设都不能铺满 23×23 的正方形地面而不留空隙。

例 9. 用 24 个面积为 1 单位的正三角形拼成如图所示的正六边形,我们把面积为 4 的正三角形称为“希望形”。

(1)请你回答,图中共可数出多少个不同的“希望形”?



(2)将 1—24 这 24 个自然数填入 24 个小正三角形中(每个里只填一个数),我们依次对所有"希望形"中的四个小正三角形中填的数同时加上一个相同的自然数称为一次操作,问能否经过有限次操作后,使图中 24 个小正三角形中的数都变为相同的自然数? 如果能,请给出一种填法;如果不能,请简述理由。

解　(1)图中可以数出 12 个不同的"希望形"。

(2)不可能! 理由如下:假设经过 m 次操作后,24 个小正三角形中的数都变成了 a,则其总和为 $24a$.

另一方面,设第 i 次操作中每个"希望形"的 4 个小正三角形中的数都增加自然数 n_i,则第 i 次操作共增加值为 $12\times4n_i$,m 次操作后共增加值为 $12\times4(n_1+n_2+\cdots\cdots+n_m)$

这 24 个小正三角形最初填入的 24 个数之和为

$1+2+3+\cdots\cdots+23+24=25\times12$,

所以 m 次操作后 24 个小正三角形填数总和为

$25\times12+12\times4(n_1+n_2+\cdots\cdots+n_m)$

于是应有　$25\times12+12\times4(n_1+n_2+\cdots\cdots+n_m)=24\times a$.

可见　$24\mid25\times12$,即 $2\mid25$. 但这是不可能的。

所以,想经过有限次题设的操作使得图中 24 个小正三角形中的数都变为相同的自然数是不可能实现的!

研究练习题 3－3

1. 有如图所示的 12 张扑克牌,2 点,6 点,10 点各四张:

2 方块	2 红桃	2 黑桃	2 黑桃	6 方块	6 红桃
6 黑桃	6 草花	10 方块	10 红桃	10 黑桃	10 草花

你能从中选出七张牌,使其上面点数之和恰等于 52 吗? 请说明理由。

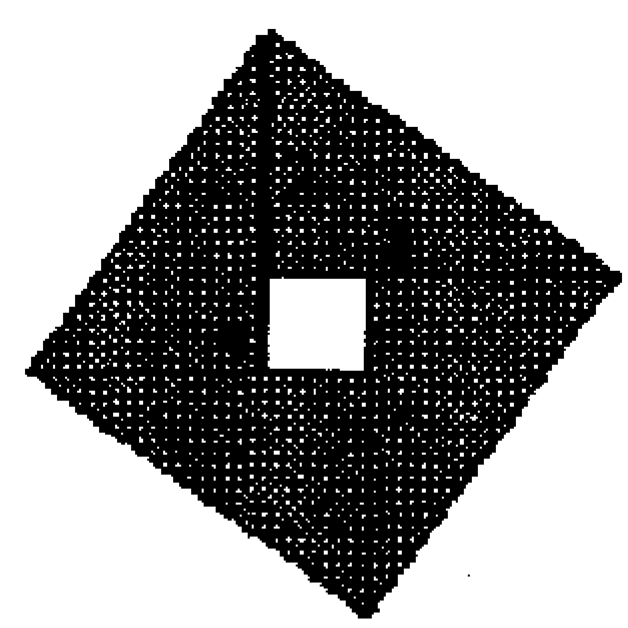
2. 二十七名小运动员所穿运动服的号码恰是 1,2,3,……,26,27 这二十七个自然数。问:这些小运动员能否站成一个圆圈,使得任意相邻两个运动员号码数之和都是质数? 请说明理由。

3. 在 3×3 的方格表中已知如图填入了九个质数。如果将表中同一行或同一列的三个数加上相同的自然数称为一次操作。问:你能通过若干次操作使得表中九个数都变为相同的数吗? 为什么?

2	3	5
13	11	7
17	19	23

§3.4 利用弦图帮我们解题

2001 年 3 月 10 日由中央电视台播出的"第八届华罗庚金杯少年数学邀请赛"初赛第一道试题是:"2002 年将在北京召开国际数学家大会。如图 1 所示,这是大会的会标图案。它由四个相同的直角三角形拼成。已知直角边的长为 2 和 3,求大正方形的面积。"



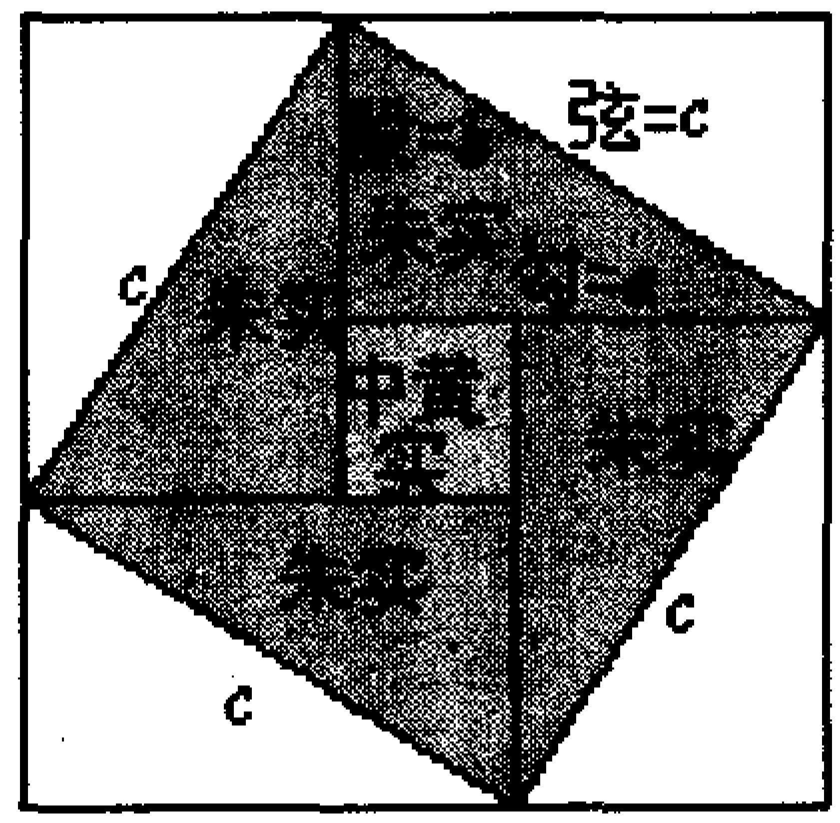
(图 1)

显见,大正方形面积等于四个直角三角形与中间小正方形面积之和。每个直角三角形面积是 3,四个直角三角形面积是 12,中间小正方形的边长为 3 - 2 = 1,面积是 1. 所以大正方形的面积是 3×4+1=13.

这道试题向广大青少年传播了 2002 年将在北京召开国际数学家大会的信息,并利用这道赛题向大家介绍了大会会标的图案。

其实,许多同学对这个图形并不陌生。这个图来源于我国古

代的"弦图"。大家知道，中华民族是擅长数学的民族，我国也是最早发现勾股定理的国家之一，我国古代就是利用弦图来证明勾股定理的。图 2 就是中国古算书中的"弦图"，"案弦图又可以勾股相乘为朱实二，倍之为朱实四，以勾股之差自相乘为中黄实，加差实亦成弦实。"

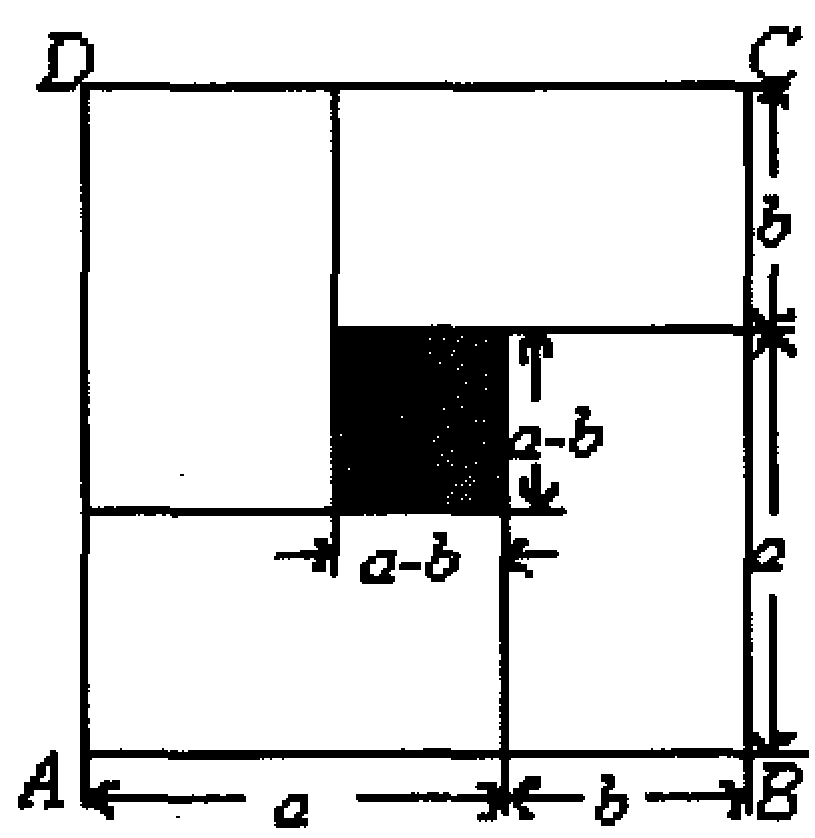


（图 2）

设直角三角形的勾为 a，股为 b，弦为 c，ab 为两个红色直角三角形的面积，$2ab$ 为四个红色直角三角形的面积。中黄实的面积为 $(a-b)^2$，大正方形的面积为 c^2.

所以 $c^2=2ab+(a-b)^2=2ab+a^2-2ab+b^2=a^2+b^2$.

我国古代三国时期的数学家赵爽，就是利用这个弦图证明了著名的勾股定理。因此，选择弦图中间部分作为 2002 年在北京召开的国际数学家大会的会标，是很有中国特色的设计。弦图中包含这样一个如图 3 所示的基本构图：它是将四个长为 a、宽为 b 的长方形，围拼在一起形成的一个特殊的构形。这个构形的特点是：$ABCD$ 是一个边长为 $a+b$ 的正方形，中间空的阴影部分是边长为 $a-b$ 的正方形。



（图 3）

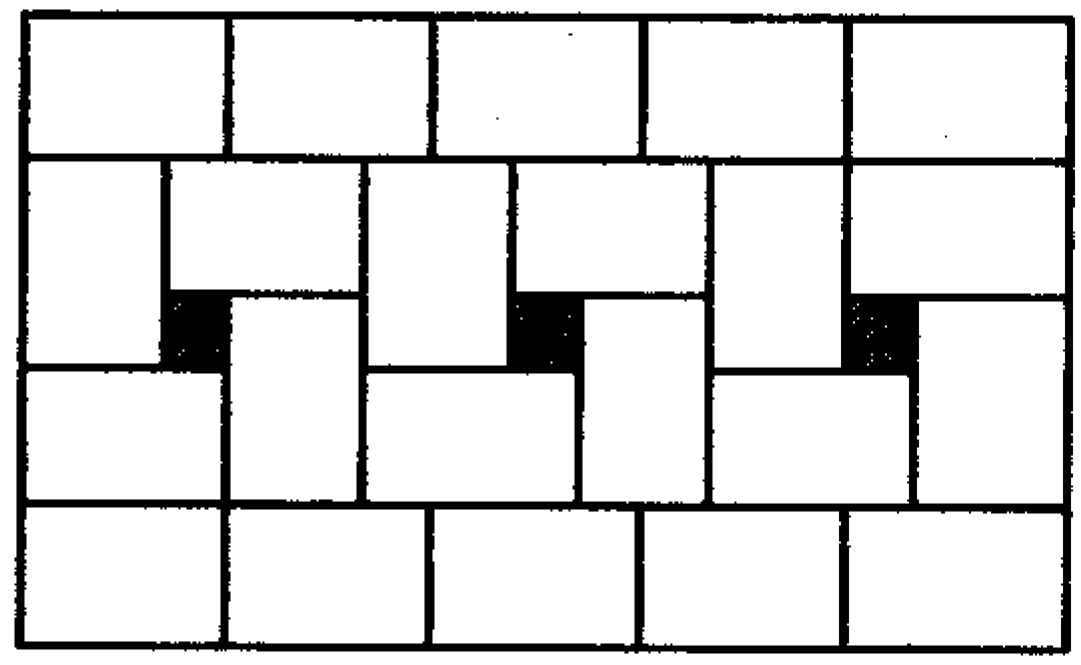
图 3 表明了大家非常熟悉的代数恒等式 $(a+b)^2=(a-b)^2+4ab$ 的几何解释。

图 2 与图 3 是非常有用的基本构图。利用它们可以直观巧妙地启发我们的解题思路。所以"华杯赛"中有许多这样的赛题供同学们思考练习。

例 1.　同样大小的长方形小纸片摆成如图 4 所示的图形，已

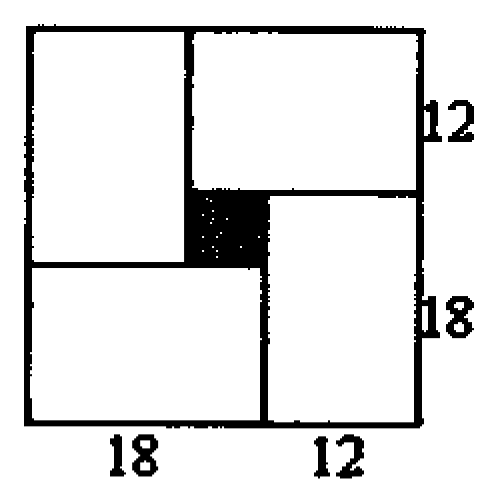
知小纸片的宽是 12 厘米，求阴影部分的总面积。

分析与解 有经验的同学一眼就会看到中间藏着三个“弦图”，阴影部分正是弦图中心的小正方形。现在已知小纸片宽是 12 厘米，长未直接告之。能否求出小纸片的长呢？从图 4 中的第一行与第二行（或第三行与第四行）表明了小长方形的 5 个“长”等于 3 个“长”与 3 个“宽”之和，因此，小长方形的 2 个“长”等于它的 3 个“宽”。这就隐含地告诉我们，小长方形的“长”等于$\frac{3}{2}$个“宽”。也就是小长方形的“长”等于$\frac{3}{2}\times 12=18$ 厘米。



（图 4）

于是问题变为“四个长为 18 厘米、宽为 12 厘米的小长方形（如图 5），围成一个大正方形。求中间阴影小正方形的面积”这是大家都很熟悉的问题了。从图 5 中容易看出一个阴影部分小正方形的边长为 $18-12=6$（厘米），因此一个阴影小正方形面积是 36 平方厘米。



（图 5）

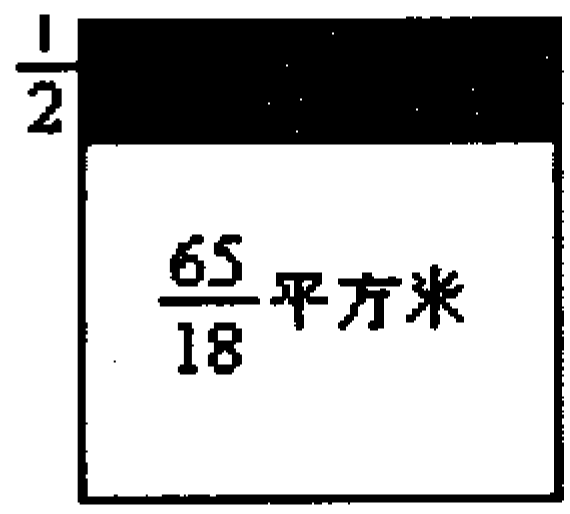
图 4 中 3 个阴影小正方形面积是 $36\times 3=108$（平方厘米）。

例 2. 从一块正方形木板锯下宽为$\frac{1}{2}$米的一个木条以后，剩下的面积是$\frac{65}{18}$平方米。

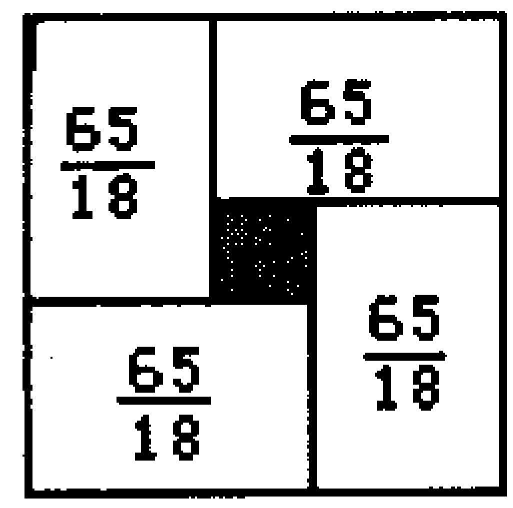
问锯下的木条面积是多少平方米？

分析与解 从一块正方形木板锯下宽为$\frac{1}{2}$米的一个木条以

后，剩下的木板是个长方形。它的长是原正方形木板的边长，宽比长短 $\frac{1}{2}$ 米（图 6a）。四块这样的长方形木板可以如（图 6b）那样拼成一个大正方形。但中间有一个小正方形空洞。



（图 6a）



（图 6b）

仔细观察（图 6b），发现这个小正方形边长正好是长方形木板的长与宽之差，即是$\frac{1}{2}$米，因此小空洞正方形面积是$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$（平方米）.

整个大正方形面积是$\frac{1}{4}+4\times\frac{65}{18}=\frac{529}{36}$（平方米）.

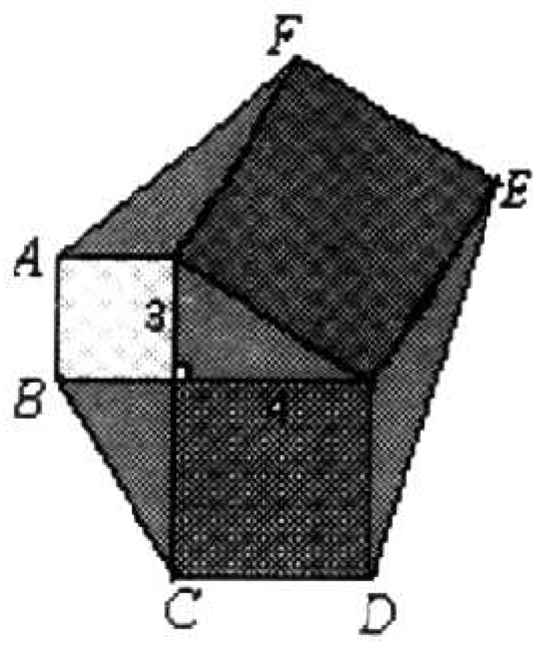
因为 $529=23^2,36=6^2$. 所以大正方形的边长是$\frac{23}{6}$（米）.

再观察（图 6b），可以看出，大正方形的边长等于长方形的长与宽之和，所以长方形木板的长与宽之和是$\frac{23}{6}$，前面已经看到长与宽之差是$\frac{1}{2}$（米），因此$\frac{23}{6}+\frac{1}{2}=\frac{13}{3}$就是长方形的长的 2 倍，所以长方形的长是$\frac{13}{6}$（米），容易看到，$\frac{13}{6}$米也就是正方形的边长. 所以锯下的面积是$\frac{1}{2}\times\frac{13}{6}=\frac{13}{12}$（平方米）.

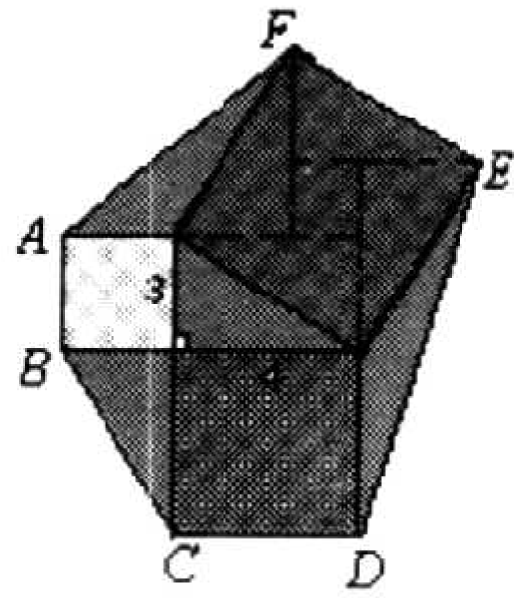
例 3.　在直角边为 3 与 4 的直角三角形各边上向形外分别作正方形。将三个正方形顶点顺次连结形成如图 7 所示的六边形 $ABCDEF$。

试求六边形 $ABCDEF$ 的面积。

解　将四个直角边为 3 与 4 的直角三角形，如图 8 所示拼在以斜边为边的大正方形中，有如图 1“会标”的结构。中间形成的



（图 7）

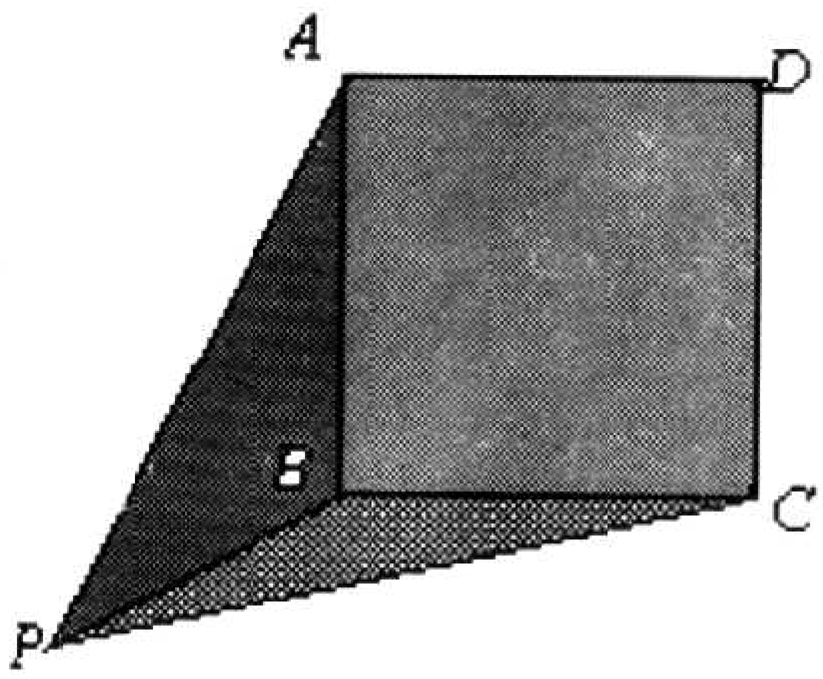


（图 8）

小正方形的面积是$(4-3)^2=1$. 从图 8 中可见,外围三个三角形面积都等于已知的直角三角形的面积,这样一来,六边形 $ABCDEF$ 的面积可以计算。所以

$$六边形 ABCDEF 的面积 =8\times\frac{1}{2}\times3\times4+3^2+4^2+1^2=74.$$

例 4. P 是正方形 $ABCD$ 外面一点,$PB=12$ 厘米。$\triangle APB$ 的面积是 90 平方厘米,$\triangle CPB$ 的面积是 48 平方厘米。



（图 9）

请你回答:正方形 $ABCD$ 的面积是少平方厘米?

答 正方形 $ABCD$ 的面积是 89 平方厘米。

理由 如图 10,自 A、C 分别作 PB 的垂线,交 PB 延长线于 E、F。则由$\triangle APB$ 的面积为 90 平方厘米,可得

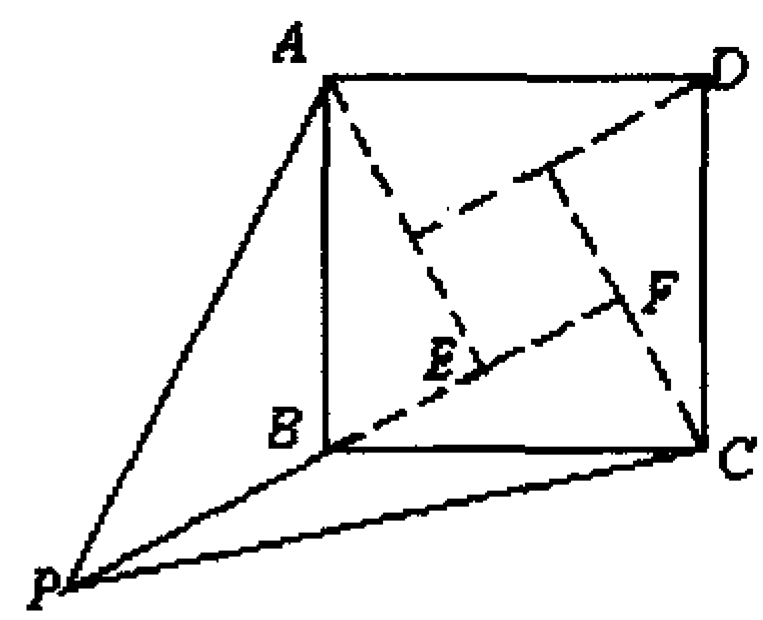
$PB\times AE\div2=90$,求得 $AE=15$ 厘米。

由$\triangle CPB$ 的面积为 8 平方厘米,可得

$PB\times CF\div2=48$,求得 $CF=8$ 厘米。

注意到直角$\triangle ABE$ 逆时针旋转与直角$\triangle BCF$ 重合。所以$\triangle ABE$ 与$\triangle BCF$ 全等。同样。继续旋转两次。在正方形 $ABCD$ 内部形成弦图的基本构图。

$BE=CF=8$ 厘米。所以 $\triangle ABE$ 面积为 $\frac{1}{2}\times 15\times 8=60$ 平方厘米。中间小正方形边长为 $15-8=7$ 厘米，面积为 49 平方厘米。所以正方形 $ABCD$ 的面积是四个 $\triangle ABE$ 面积与这个小正方形面积之和，等于 $60\times 4+49=289$ 平方厘米。



（图 10）

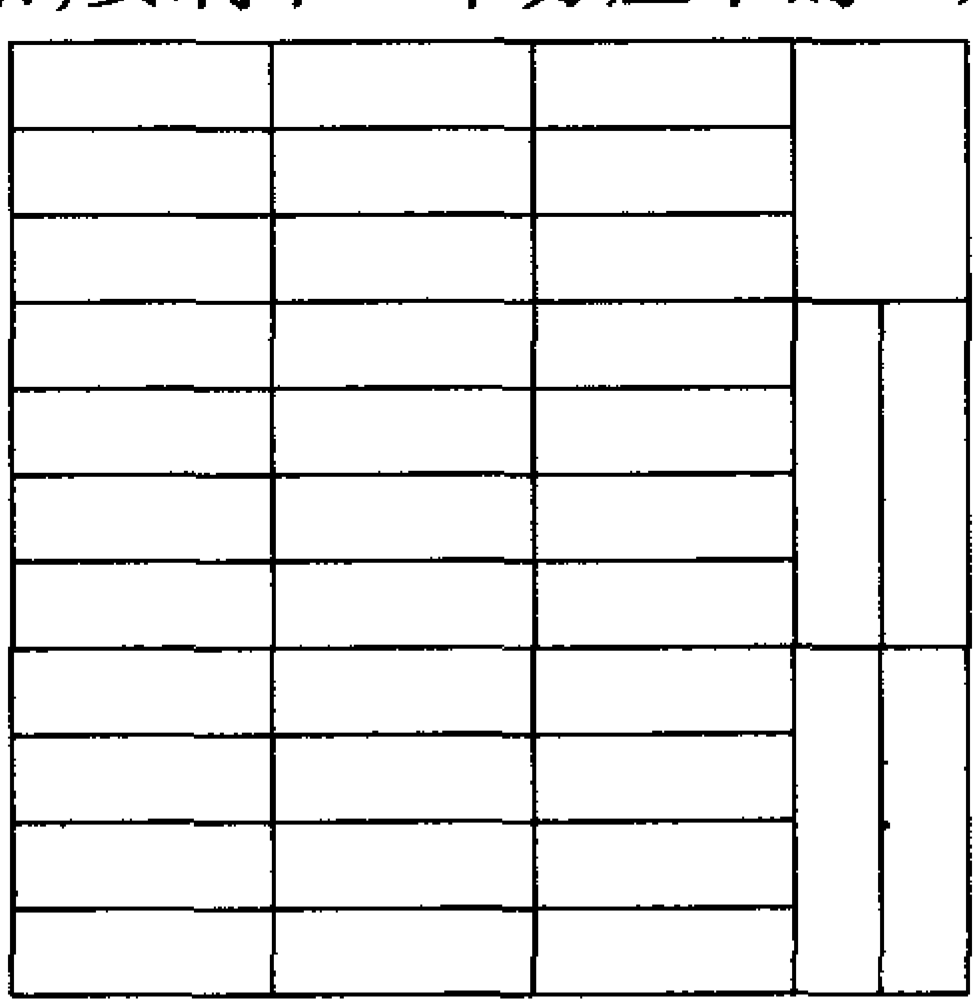
说明　以上构图心算，都需要凭直觉瞬间完成。其实当直角 $\triangle ABE$ 逆时针旋转与直角 $\triangle BCF$ 重合。即得 $BE=CF=8$ 厘。再由勾股定理。得

$$AB^2=AE^2+BE^2=15^2+8^2=225+64=289$$

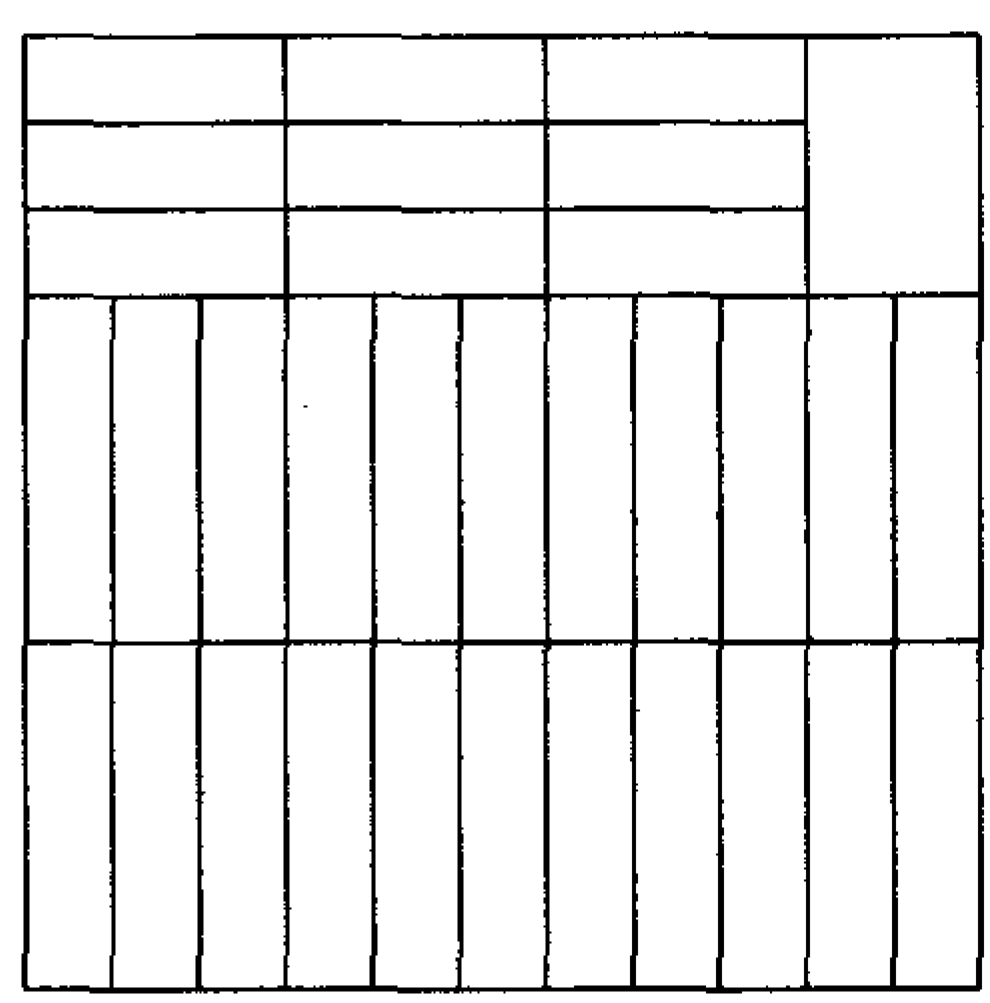
即正方形 $ABCD$ 的面积是 289 平方厘米。

例 5.　一张长 14 厘米、宽 11 厘米的长方形纸片最多能裁出多少个长 4 厘米、宽 1 厘米的纸条？怎样裁？请画图说明。

分析与解　长方形纸片的面积是 $14\times 11=154$（平方厘米），所裁纸条的面积是 $4\times 1=4$（平方厘米）。因为 $154\div 4=38.5$，所以不可能裁出 39 个或更多的纸条，也就是说裁出的纸条最多可能是 38 个。按照下面图 11a 或图 11b 的办法都只能裁出 37 个纸条，要剩下 6 平方厘米的一片纸。



（图 11a）

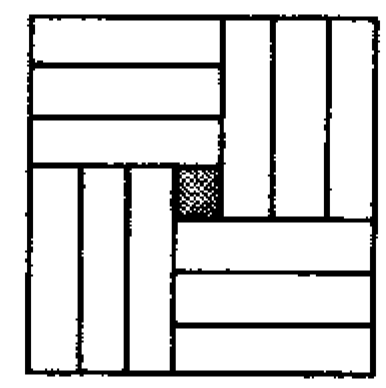


（图 11b）

能否将 6 平方厘米中分出一个 4 平方厘米的小纸条呢？关键是要分出两个 1 平方厘米小正方形，能否办到？弦图的构形可

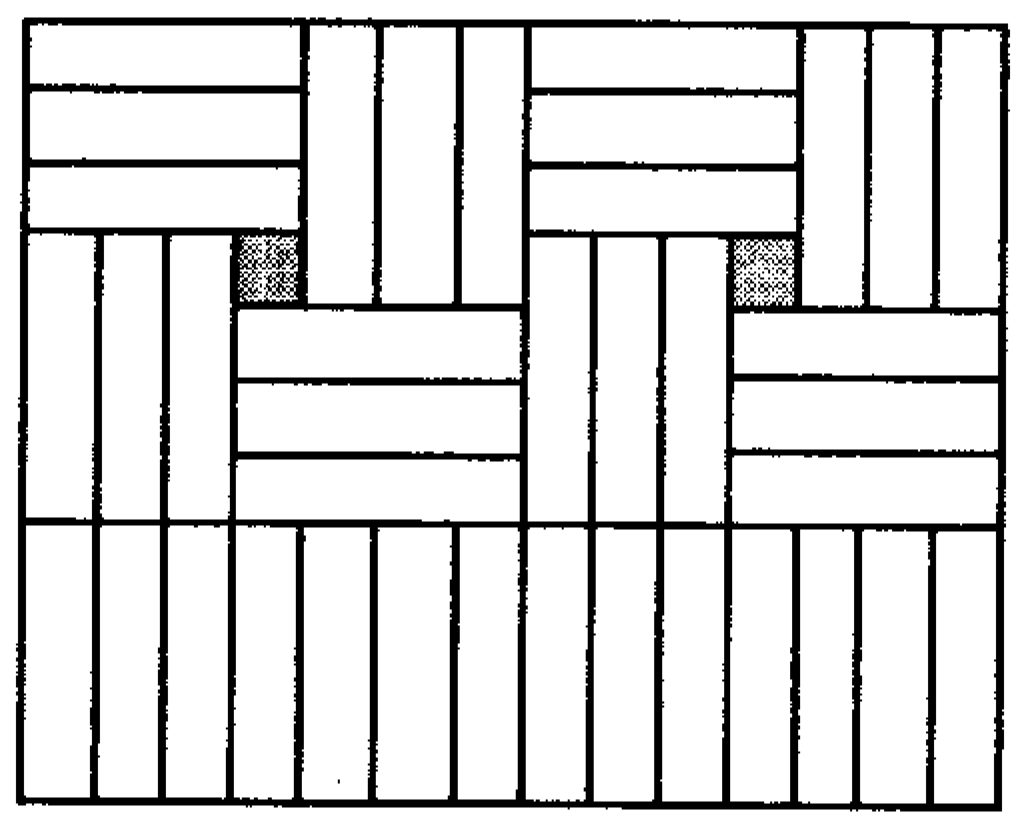
以给我们以启示：用 3 个 1×4 的长方形纸条就可以拼成一个长为 4 厘米，宽为 3 厘米的长方形，4 个这样的长方形可以如图 11c 拼成一个边长为 7 厘米的正方形，中间的空洞就是面积为 1 平方厘米的小正方形。

下面我们设计在 14×11 的长方形中，安排出两个如图 11c 所示的构形，而其余部分都被长为 4 厘米、宽为 1 厘米的纸片铺满就可以了。这时很容易找到如图 11d 的裁法。



（图 11c）

这样确实可以从一张宽 11 厘米、长 14 厘米的长方形纸片上裁出 38 个长 4 厘米、宽 1 厘米的纸条。图 11d 就是一种裁法。本题属开放型问题，当然也可以有其它方式剪裁出 38 个 4×1 的纸条。



（图 11d）

例 5 表面看是“思维体操”式的问题。实际上是一种铁板下料的数学模型。“一块长 14 米、宽 11 米的长方形铁板，分成长为 4 米宽为 1 米的板材，问如何下料板材的利用率最高？”就是很富实际意义的应用问题了。本题的解法中“弦图”的基本构形给我们以有益的启示。

“弦图”是中国古代先贤的杰作。重新温习，可以得出很多解题的妙法。这真可谓温故而知新了。可见，学习弦图，大有收益，弦图之用，奇妙无穷！

研究练习题 3－4

1. 一个直角三角形两个直角边的平方和等于 250 平方厘米，

两个直角边的差等于 4 厘米。求这个直角三角形的面积。

2. 一个长方形的面积为 2052 平方厘米，长与宽的和等于 92 厘米。求这个长方形的长与宽。

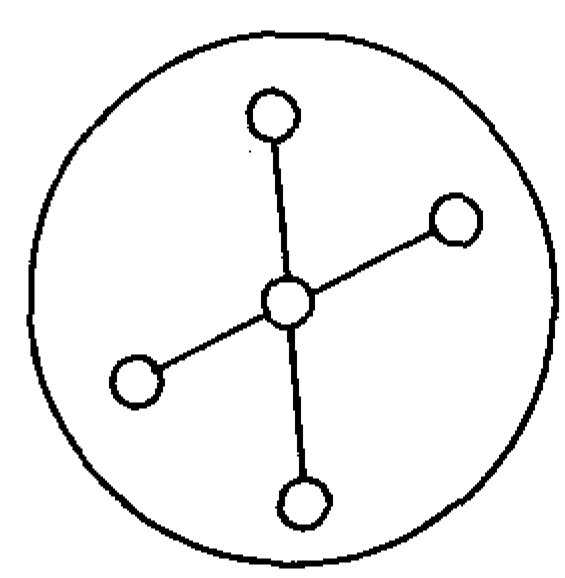
3. 长方形 $ABCD$ 的周长为 16 厘米，在它的每条边上各画一个以该边为边的正方形，已知这四个正方形的面积和是 68 平方厘米，求长方形 $ABCD$ 的面积。

§3.5　二人对策模型浅谈

在 R. 柯朗，H. 罗宾合著的《数学是什么?》一书附录第 75 题是一道摆放硬币的问题。1964 年福州市中学生数学竞赛，将它改编成如下的数学竞赛问题，此后广为流传。

两人轮流在桌面(矩形或圆形)上摆硬币，每次摆一个，各个不能互相重叠，也不能有一部分在桌面的边缘以外，这样经过充分多次以后，谁先摆不下硬币就算输。试证：先摆的人有办法使对方一定输。

这是一个两人竞争比赛，寻找取胜办法的问题。设甲先摆，乙后摆。甲可以把第一个硬币摆在桌子中心，由于桌子为中心对称图形，以后不管乙把硬币摆在哪里，甲总可以把硬币摆在与乙所摆硬币(关于中心)对称的地方。这样，只要乙有地方摆得下，甲也总可以有地方摆得下。这样的摆法就能使后摆的人一定输。



(图 1)

在有竞争的社会中，总要提出在竞争中如何取胜的问题，当然就应该研究在竞争中取胜的办法。

我国古代有一个“齐王与田忌赛马”的故事，也属于这一类竞争问题。

战国时候，一天齐王与大将田忌约定，各自从自己的马中选上等马、中等马和下等马各一匹进行比赛，每胜一匹马就得一千

金，每输一匹马就要付出一千金。当时，同等级的马中，齐王的马均强于田忌的马，看上去田忌非输三千金不可了。然而田忌的谋士认真研究找到了一个“办法”，让田忌的下等马对齐王的上等马，田忌的上等马对齐王的中等马，田忌的中等马对齐王的下等马。结果田忌的下等马输了，上等马与中等马都赢了。田忌不仅没输，反而赢了一千金。

这是一类比赛问题，要比赛就要有对立双方，齐王与田忌互为对手。我们把介入竞争的对立面称为局中人。局中人在竞争中都希望自己取胜，至少不要输得太惨。为了取胜而制定的方案，就称为对策。如田忌的谋士想的“办法”就是一个对策。一次比赛中可制定多种方案，效果最好的方案称为最优策略！作为竞赛的结局或胜或负，或得或失。像“齐王与田忌赛马”的问题只是双方的竞争，我们称为“二人对策”。这种局中人只有甲乙双方的寻求必胜策略的问题，叫做二人对策模型。

在中学数学竞赛中，常以智力游戏相结合编拟一些简单的二人对策问题，其内容涉及数和形的基础知识，灵活而且生动，对锻炼思维十分有益。

例 1. 甲、乙二人从 1 开始轮流按次序报出正整数。每人每次可以报出一个、两个或三个正整数。谁先报到 30 谁就为胜者。试分析：先报者存在必胜的策略。

分析 设甲为先报数者，甲要取胜，必须报到 30 才行，这只有在乙报数后留下 1 ~ 3 个数，是(30)，(29，30)或(28，29，30)时才能实现。而这种情况只有在乙面临 27，28，29，30 四个数时才能出现。为此，甲应占据数“26”才行。依此理向前推去，甲要抢报“26”，必须先抢报“22”，要抢报“22”，必须先抢报“18”，以下依次必须抢报“14”，“10”，“6”，“2”. 到此真相大白。于是可以写出甲先报必胜的策略。

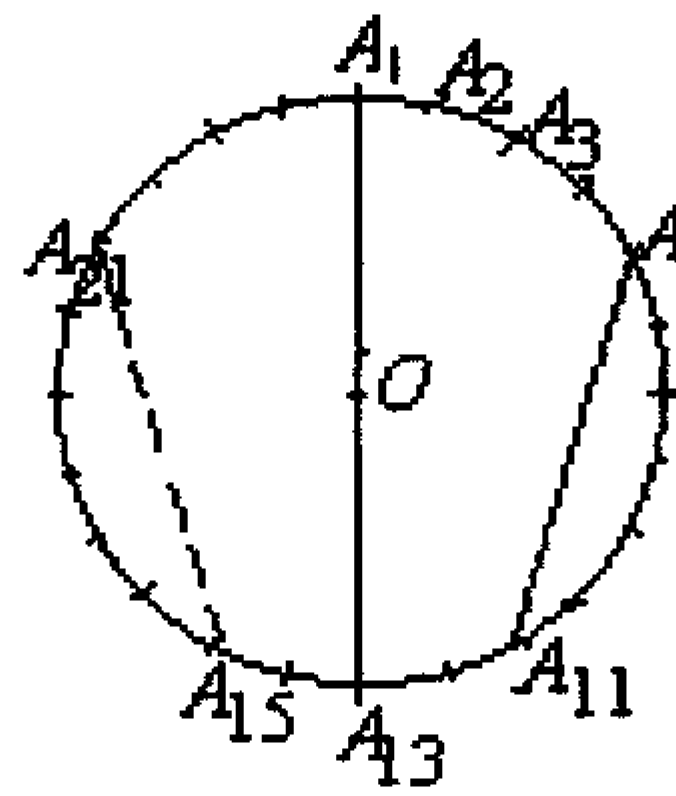
解 甲先报“2”，此后由 3 ~ 30 共 28 个数可按连续四个数为一组分成七组，比如在 3，4，5，6 中，乙报 3，则甲报 4，5，6；乙报 3，

4,则甲报 5,6;乙报 3,4,5,则甲报 6. 即甲能由"2"抢报到"6". 在以下每组的数中,乙报前 k 个数($k=1,2,3$ 个),甲就相应的报后 $4-k$ 个数. 依此规则甲能抢到"6"→"10"→"14"→"18"→"22"→"26". 这时只剩下 27,28,29,30 四个数了。轮到乙先报,若乙报 27,甲就报 28,29,30;若乙报 27,28,甲就报 29,30;若乙报 27,28,29,则甲恰报 30. 所以 30 这个数最后被甲报出,甲必取胜。

说明　通过分析,找到连续四个正整数,乙先报的模式,甲必能报出这四个数的最后一个数。这个模式我们称为"必胜模式"。当甲先取 2 时,就转入了"必胜模式",从而胜券在握了! 通过分析寻找"必胜模式"是解题的关键!

例 2.　一个女孩与一个男孩依次在给定的一个正 24 边形中画对角线。规定所画的对角线互不相交,谁画下最后一条这样的对角线谁就胜。女孩先画,问这个女孩应当如何画才能取胜?

解　注意到正 24 边形是轴对称图形,也是中心对称图形。女孩先画一条过中心 O 的对角线(比如画 A_1A_{13}),将正 24 边形分成关于 A_1A_{13} 对称的左右两部分,形成该男孩先画、女孩后画的局面。由于所画的对角线均不能与 A_1A_{13} 相交,所以每次只能在左、右一部分图形中画对角线。比如男孩画对角线 $A_{15}A_{21}$,女孩子接着可画对角线 A_5A_{11}(如图 2 所示),这样下去,只要男孩子能在右(左)部分中画一条对角线,女孩子就能在左(右)部分中画一条关于 A_1A_{13} 对称的对角线。直到男孩子不能画了,女孩子成为画最后一条这样的对角线者而获胜。



(图 2)

说明　请同学们分析,当女孩先画过中心 O 的一条对角线后,形成怎样的"必胜模式"。

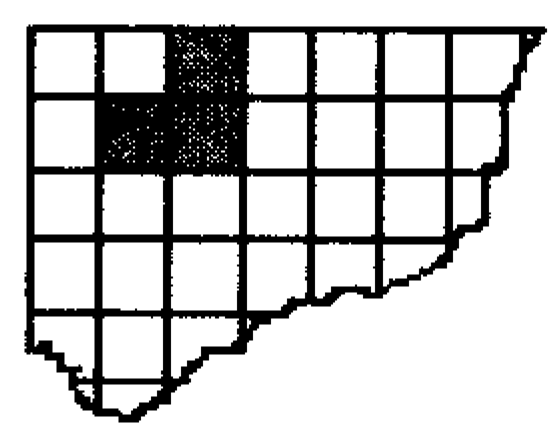
例 3.　给定 100×100 的空白方格板。甲乙两人轮流将格子涂黑色,甲每次总是涂 2×2 的田字形的四个格,而乙每次总是涂

"角形"的三个格。规定已被涂过色的格子不能重复涂色。轮到谁无法按约定要求涂格子时谁就输。请你分析，在正确的策略下，是甲必取胜还是乙必取胜？

分析 我们看到没有涂色的地方，甲能涂色的四个格必包含有形在内，但在的三个格中却不能包含"田字"四个格。所以只要剩下的部分至少有一个形而无"田字"格时，乙必可取胜！

解 由于 100×100 的方格板有四个角，乙无论先涂或后涂，总能在乙第一次涂时选择到一个角落的 2×3 的长方形，如图所示涂黑三个格，而剩下的三个格将成为甲的"禁区"。

在随后涂格的过程中，只要有形的位置，乙即可涂上色。如果恰轮到乙，除了"禁区"外其它地方均无法按约定涂色了，这时甲也必无法按约定涂色了。那么乙就涂"禁区"的三个格，造成甲无法涂色的局面。这样甲必输无疑。从而不管甲、乙谁先涂色，乙依这一策略必胜。



（图3）

例4. 在黑板上依次写下 $1,2,3,\cdots,98,99$ 这九十九个自然数，中间用九十八个逗号分隔开。甲先乙后二人轮流擦一个逗号改写上一个"+"或"×"号，直到所有逗号都改写完为止。这时所得的算式的结果若是奇数，则甲胜；若是偶数，则乙胜。问：在正确的策略下谁必取胜？

分析 考虑到 $1\sim99$ 这九十九个自然数，"50"看成"中数"，左侧 $1\sim49$，右侧 $51\sim99$ 各有 49 个数，且 1 与 99 同奇，2 与 98 同偶，…，49 与 51 同奇，很有规律。而且这些逗号都改写"+"号或都改写"×"号，所得算式结果均为偶数。由此猜测乙总存在必胜策略。

解 乙必能取胜，办法如下：乙采用在与甲填号关于"50"对称位置同样的办法。比如甲在 4，5 之间填"+"号，乙就在 95，96 之间填"+"号。一般地，如果甲在数 k 与 $k+1$ 之间填怎样的符

号，乙便在 $99-k$ 与 $100-k$ 之间填上相同的符号。游戏结束时，所得的表达式将含有若干个乘积的加项，并且含有 50 的加项必是偶数。而其余关于“50”对称的加项具有相同的奇偶性，因此，游戏结束时所得的表达式的值必为偶数，乙胜。

例 5.　有一个 3×3 的棋盘方格，甲乙两人轮流在这九个格子中填写 1,2,3,4,5,6,7,8,9. 每个格中只填一个数，不得重复。填好之后，对甲计算上、下两行六个数之和；对乙计算左、右两列六个数之和。和数大者为胜。试说明，甲先填数，甲存在必胜的策略。

分析　为说话方便，如图所示在小方格中标记上字母。由计算规则知，图中 a,b,c,d 四个位置填什么数，对甲、乙计算总和都是共同的加项，不影响结果。

a	x_1	b
y_1		y_2
c	x_2	d

（图 4）

实际影响甲、乙总和结果的是图中的 x_1,x_2,y_1,y_2 四个位置的数。甲先填数要取胜，关键在于使 $x_1+x_2>y_1+y_2$，所以甲应设法将最大的数放在 x_1 和 x_2 处，或把最小的数放在 y_1 或 y_2 处。由于竞争，乙应把最小的数放在 x_1 或 x_2 处，而把最大的数放在 y_1 或 y_2 处。由此，我们得到甲先放数取胜的策略。

解　甲先放，把最大的数 9 填在 x_1 处。这时乙有两种可能的办法：

(1)当乙放最大数 8 于 y_1 处时，甲再放 7 到 x_2 处，则无论再怎么放数，都会有 $x_1+x_2=9+7>8+6=y_1+y_2$，因此甲胜。

(2)若乙放最小数 1 于 x_2 处，这时甲放 8 于 a 处，此时 $x_1+x_2=1+9=10$，而当甲放 8 于 a 处以后，y_1+y_2 的最大值只能到 $2+7=9$（即乙放一个 7 甲接着放一个 2），所以无论乙再如何放数，都有 $x_1+x_2>y_1+y_2$，也是甲胜。

总之，只要甲先放，甲就存在必胜策略。

例 6.　甲、乙两人轮流在黑板上写下不超过 10 的正整数。规定禁止在黑板上写已写过数的约数。当谁先不能写数时就为

失败者,试问:先写者还是后写者存在必胜的策略?

分析 若甲要取胜,则当甲写好某一个数后,乙应无法再写。于是乙写倒数第二个数,甲写倒数第三个数,如此等等。也就是说,甲要取胜,必须先选择写上一个数,剩下可供乙选择的数是偶数个,而且这些数可以配对,使每对两数的约数个数一样多。这样,若乙写上一个数有两个约数不能写,则甲写与其配对的数,也有两个约数不能写。这样我们通过实验会发现,甲先写 6 可以达到上述要求。

解 甲先写,存在必胜策略。例如甲先写 6,那么乙只能写 4,5,7,8,9,10 中的一个。在甲心目中把这 6 个数分成三对:(4,5),(8,10),(7,9). 如果乙写数对中的某个数,甲就接着写数对中的另一个数。特别地,若乙写 8(不能再写约数 4),这时甲写 10(也不能再写约数 5),最后甲必取胜。

例 7. 在黑板上写有下面的缺系数的方程:

$$x^4+\square x^3+\square x^2+\square x+\square=0.$$

两个学生轮流在□中填数,第一个学生(先填数者)填数为的是使填完数后的方程没有整数解;第二个学生(后填数者)填数为的是使填完数后的方程必有整数解。试说明:在正确的游戏操作中,第二个学生存在取胜的策略。

解 第二个学生存在必胜策略。

因为方程 $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$,当有整数根 $x=1$ 时,必须且只须

$1+a+b+c+d=0$,必须且只须使填的 4 个数 a,b,c,d 满足

$a+b+c+d=-1$. 当任意填了 3 个系数比如 a,c,d 以后,最后轮到第二个学生填数,总可以找到第 4 个数 b,使得 $b=-1-a-c-d$ 也就是 $a+b+c+d=-1$. 即 $1+a+b+c+d=0$. 因此第二个学生在正确的游戏操作中必能取胜。

以上例题都是在初中数学知识范围内可以解决的二人对策问题。在寻求对策中,关键在于发现"必胜模式"。请大家通过例

题细心体会,以后随着数学知识的深入学习,会遇到许多更复杂的有趣的二人对策问题,我们再进一步深入探讨。

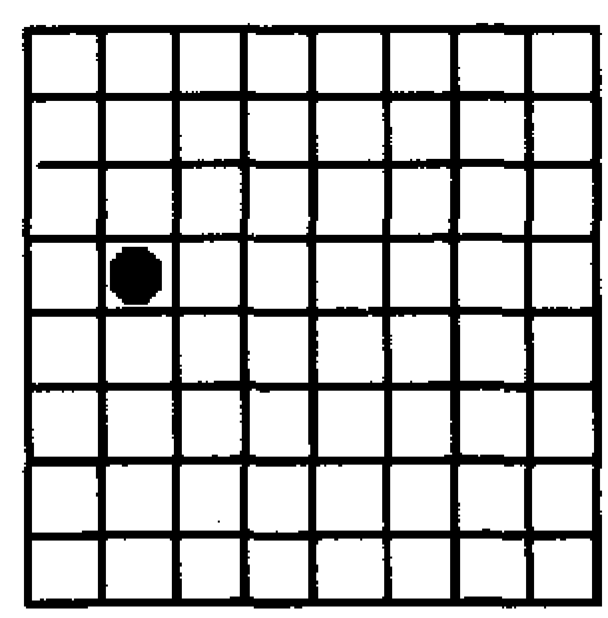
研究练习题 3－5

1. 将 1990 个空格排成一行,预先在左边第一格放 1 枚棋子,然后由甲、乙二人轮流地走,先甲后乙。每人走时,可以将棋子向右移动 1 格、2 格、3 格、4 格。规定先走到最后一格的人为胜利者。

(1)甲为了必胜,第一步走几格?

(2)甲第一步先走了 1 格,乙如何走法可以取胜?

2. 在 8×8 的方格棋盘中,任意放入一个棋子。甲乙二人轮流移动这个棋子,每次只能向棋子的邻格移动一格,但不能再移入棋子已经到过的格。甲先走乙后走。轮到谁无法走时,谁就输。问按此规则,谁有必胜的策略?



3. 甲乙两人轮流在 25×25 的棋盘上置棋子,甲置白子,乙置黑子。每个棋子均要置于空格中,但若一个空格的相邻的四个格子已被同色棋子占满,则禁止于其中置此种颜色的棋子。若轮到谁无法置子时,谁就算输。问:按此规则,如果着法无误,谁有必胜策略?

§3.6　两态变化与$(-1)^n$

两态情形是现实世界中最简单最基本的运算状态。电灯的亮与灭是两态,电门的开与关也是两态。人站在操场上有面朝南、面朝北两态,杯子放在桌面上有口朝上与口朝下两态。…,这类具有两态的量都有相反的意义,理所当然地应利用数学中的正

负数来描述,比如杯口朝上的状态记为 +1,杯口朝下的状态记为 -1. 一只杯子改变一次状态的翻转操作(口朝上变为口朝下或口朝下变为口朝上)记为乘以 -1. 则

$(+1)$	$\times\ (-1)$	$=\ (-1)$
杯口朝上的状态	翻转一次	杯口朝下的状态

表示"杯口朝上的状态"经过"一次翻转"变为"杯口朝下的状态"。

(-1)	$\times\ (-1)$	$=\ (+1)$
杯口朝下的状态	翻转一次	杯口朝上的状态

表示"杯口朝下的状态"经过"一次翻转"变为"杯口朝上的状态"。

若连续将一只杯子翻转 n 次,相当于乘以 n 个 -1,即乘以 $(-1)^n$. 当 n 为偶数时,$(-1)^n=+1$,表明翻转偶数次原状态不变;当 n 为奇数时,$(-1)^n=-1$,表明翻转奇数次原状态为相反的状态。这样,我们利用 +1 与 -1 表示两态,以 $(-1)^n$ 表示这两态之间改变状态的 n 次操作。也就是 $(-1)^n$ 成为描述这类两态变化的数学模型。

例 1. 桌面上有七只杯子,其中三只口朝上四只口朝下。每人每次翻转四只杯子。问经过若干人翻动后,能否使这七只杯子杯口全部朝下?

分析 杯子有口朝上及口朝下两种状态。操作只涉及杯口朝上到杯口朝下或杯口朝下到杯口朝上这种状态的改变。所讨论的问题也是三只杯口朝上四只杯口朝下的状态,能否改变为七只杯口都朝下的状态。我们可利用 $(-1)^n$ 模型来分析。

解 杯口朝上状态记为 +1,杯口朝下状态记为 -1.

初始状态:三只杯口朝上四只杯口朝下,其标志量应为 $(+1)^3\times(-1)^4=+1$,

最终状态:七只杯口都朝下,其标志量应为 $(-1)^7=-1$.

每人翻动 4 只杯子的操作相当于乘以 $(-1)^4$.

n 个人翻转的操作,相当于乘以

$$\underbrace{(-1)^4\times(-1)^4\times(-1)^4\times\cdots\cdots\times(-1)^4}_{n个}=(-1)^{4n}$$

于是由初始状态经过 n 个人翻转变为

$$\underbrace{[(+1)^3\times(-1)^4]}_{初始状态}\times\underbrace{(-1)^{4n}}_{n个人翻转}=\underbrace{+1}_{状态的标志量}$$

无论 n 为何值,都不可能变为标志量 -1. 所以永远不能按题设的操作使七只杯子杯口全部朝下。

对若干个 $+1$ 与 -1 可以进行加法运算,也可以进行乘法运算。对这些运算性质的研究在解决两态问题中非常重要。

性质 1　若干个 $+1$ 与若干个 -1 之总和恰等于 0 时,则加数中的 $+1$ 的个数与 -1 的个数必定相等。

性质 2　n 为正整数,若 $(-1)^n=+1$,则 n 为偶数;若 $(-1)^n=-1$,则 n 为奇数。

例 2.　设 $x_1,x_2,x_3,\cdots\cdots,x_n$ 是一组数,它们中每一个都取值 $+1$ 或 -1. 而且　$x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+\cdots\cdots+x_{n-1}x_n+x_nx_1=0$.

求证:$4|n$.

证明　由于 $x_1,x_2,x_3,\cdots\cdots,x_n$ 中每一个都取值 $+1$ 或 -1,所以 $x_1x_2,x_2x_3,x_3x_4,\cdots\cdots,x_{n-1}x_n,x_nx_1$ 每一个的值都是 $+1$ 或 -1, $+1$ 与 -1 的总数共有 n 个,此时 $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+\cdots\cdots+x_{n-1}x_n+x_nx_1=0$,表示以 $+1$ 与 -1 为加项的 n 个数之和为 0,根据性质 1, $+1$ 的个数与 -1 的个数必定相等。设有 k 个 $+1$,则也应有 k 个 -1,即 $n=2k$(k 是正整数).

要证 $4|n$,只须再证 $2|k$ 即可。为此我们考察 $x_1x_2,x_2x_3,x_3x_4,\cdots\cdots,x_{n-1}x_n,x_nx_1$ 这 n 个数的乘积。

一方面

$$(x_1x_2)\times(x_2x_3)\times(x_3x_4)\times\cdots\cdots\times(x_{n-1}x_n)\times(x_nx_1)$$
$$=(x_1x_2x_3\cdots\cdots x_{n-1}x_n)^2=+1.$$

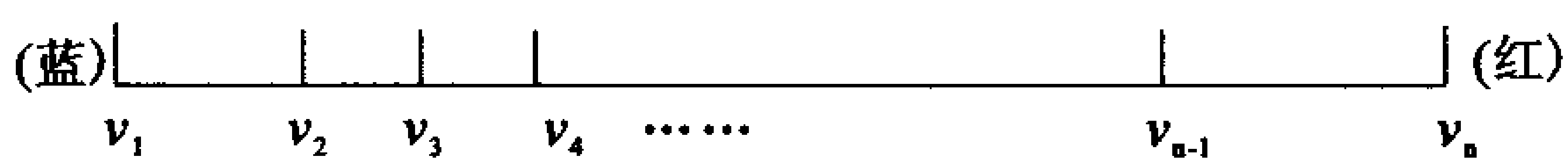
另一方面

$$(x_1x_2)\times(x_2x_3)\times(x_3x_4)\times\cdots\cdots\times(x_{n-1}x_n)\times(x_nx_1)$$
$$=(-1)^k\times(+1)^k$$

所以$(-1)^k \times (+1)^k = +1$.

依性质 2 知 k 为偶数,即 $k=2l$(l 为正整数),
所以 $n=2k=2(2l)=4l$,即 $4 \mid n$.

例 3. n 个点 $v_1, v_2, v_3, \cdots\cdots, v_n$顺次排列在一条直线上。将每个点涂上红色或蓝色,如果相邻两点为端点的线段 v_iv_{i+1} 的两端点的颜色不同,我们称 v_iv_{i+1}为一个“标准线段”。已知 v_1 与 v_n 涂的颜色不同。证明:“标准线段”的个数必为奇数。



证明 点的颜色只有红、蓝两态。其中红点我们标记为 +1,蓝点标记为 -1. “标准线段”对应于标志量 -1. 即

$$\underset{\boxed{\text{左端是蓝}}}{(-1)} \times \underset{\boxed{\text{右端是红}}}{(+1)} = \underset{\boxed{\text{左端是红}}}{(+1)} \times \underset{\boxed{\text{右端是蓝}}}{(-1)} = \underset{\boxed{\text{标准线段标志量}}}{(-1)}$$

非“标准线段”对应于标志量 +1,即

$$\underset{\boxed{\text{左端是红}}}{(+1)} \times \underset{\boxed{\text{右端是红}}}{(+1)} = \underset{\boxed{\text{左端是蓝}}}{(-1)} \times \underset{\boxed{\text{右端是蓝}}}{(-1)} = \underset{\boxed{\text{非标准线段标志量}}}{(+1)}$$

设 $v_1v_2, v_2v_3, \cdots\cdots, v_{n-2}v_{n-1}, v_{n-1}v_n$这 $n-1$ 个线段中共有 k 个“标准线段”,则另 $n-k-1$ 个线段为非“标准线段”,于是有

$(-1)^k \times (+1)^{n-k-1} = (v_1v_2) \times (v_2v_3) \times \cdots\cdots \times (v_{n-2}v_{n-1}) \times (v_{n-1}v_n)$

$$= (v_1v_n) \times (v_1 \times v_2 \times v_3 \times \cdots\cdots \times v_{n-2} \times v_{n-1})$$
$$= (-1) \times (+1)(+1) = -1$$

即$(-1)^k = -1$. 根据性质 2,k 为奇数。

所以“标准线段”的个数为奇数。

例 4. 某班学生(人数大于 2)围成一圈席地而坐。并且按以下规则戴上红帽或蓝帽:如果一个学生的两旁都是男生或都是女生,这个学生就戴红帽;否则就戴蓝帽。

证明　戴蓝帽的学生数目必为偶数。

证明　用数字识别性别，男生记为 $+1$，女生记为 -1，将全班 n 个学生编号依次为 $1,2,3,\cdots,n$.

由于一个学生所戴帽子的颜色由该生左右相邻二同学的性别所决定。我们将与第 i 个学生相邻的两个学生所对应的性别标识量的乘积 $A_i(i=1,2,\cdots,n)$ 来记第 i 个学生所戴帽子的状态。

$$A_i=\begin{cases}+1(\text{第 } i \text{ 个同学戴红帽})\\-1(\text{第 } i \text{ 个同学戴蓝帽})\end{cases}$$

这种表示是合理的，因为

$+1$	$=$	(-1)	$\times$	(-1)	$=$	$(+1)$	$\times$	$(+1)$
红帽		左女同学		右女同学		左男同学		右男同学

-1	$=$	(-1)	$\times$	$(+1)$	$=$	$(+1)$	$\times$	(-1)
蓝帽		左女同学		右男同学		左男同学		右女同学

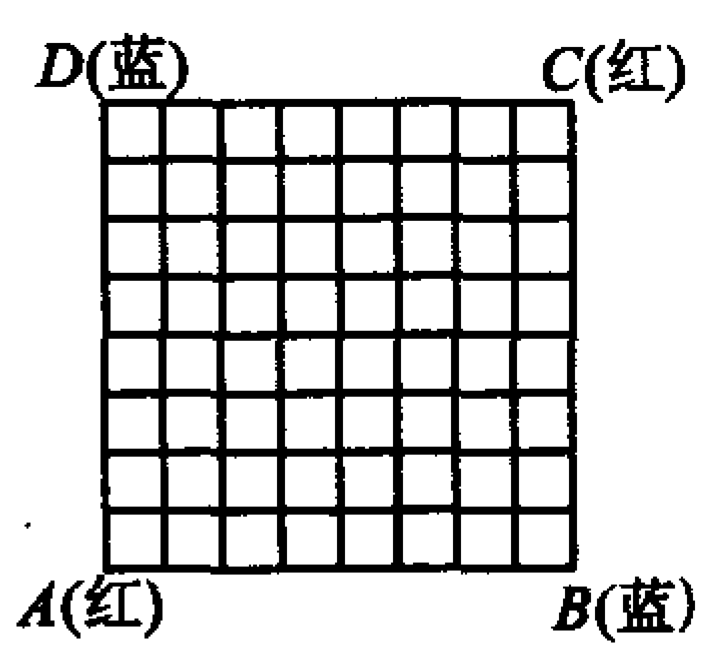
设 A_i 中有 k 个蓝帽（k 个 -1），则有 $n-k$ 个是红帽（$n-k$ 个 $+1$），则

$(-1)^k(+1)^{n-k}=A_1\times A_2\times A_3\times\cdots\cdots\times A_n$

由于每个学生的标识数字在 $A_1\times A_2\times A_3\times\cdots\cdots\times A_n$ 中都出现 2 次，故 $A_1\times A_2\times A_3\times\cdots\cdots\times A_n=+1$.

所以 $(-1)^k(+1)^{n-k}=A_1\times A_2\times A_3\times\cdots\cdots\times A_n=+1$，即 $(-1)^k=+1$. 根据性质 2，k 应为偶数。所以戴蓝帽的学生数目为偶数。

例 5.　将正方形 $ABCD$ 分割成 n^2 个相等的小方格（n 是正整数）。把相对的顶点 A,C 染成红色，把 B,D 染成蓝色，其它的格子点任意染成红、蓝两色中的一种颜色。



证明：恰有三个顶点同色的小方格的数目必是偶数。

证明　用数字标识颜色,红色格点记为 $+1$,蓝色格点记为 -1. 再将小方格编号,记为 $1,2,3,\cdots\cdots,n^2$.

又记第 i 个小方格四个顶点所标数字之乘积为 A_i,显然,若恰有 3 个顶点同色,则 $A_i=-1$;否则 $A_i=+1$.

现考虑乘积 $A_1\times A_2\times A_3\times\cdots\cdots\times A_n$. 这实质上是若干个 $+1$ 与若干个 -1 的乘积。而每个 A_i 又由 4 个 $+1$ 或 -1 的乘积组成,一共是 $4n^2$ 个 $+1$ 或 -1 的乘积。

对正方形内部的格点,各点相应的标数重复出现了 4 次;其数量标识必为
$(-1)\times(-1)\times(-1)\times(-1)=+1$ 或 $(+1)\times(+1)\times(+1)\times(+1)=+1$;边上的不是大正方形顶点的格点上相应的数量标识各出现了 2 次,必为 $(-1)\times(-1)=+1$ 或 $(+1)\times(+1)=+1$;A,B,C,D 四点相应的数量标识的乘积为 $(+1)\times(+1)\times(-1)\times(-1)$.

于是可得 $A_1\times A_2\times A_3\times\cdots\cdots\times A_n=+1$.

因此 $A_1,A_2,A_3,\cdots\cdots,A_n{}^2$ 中 -1 的个数必为偶数个,也就是恰有三个顶点同色的小方格必有偶数个。

仔细分析:例 3、例 4、例 5 本质上是一个问题。属于复合型的两态变化问题。即

第一层次的两态　　a 态记为 $+1$,b 态记为 -1.

第二层次的两态　　A 态记为 $+1$,B 态记为 -1.

而第二层次的两态又是由第一层次的两态所决定的:

A 态出现$\Leftrightarrow$两个 a 态出现或两个 b 态出现;

B 态出现$\Leftrightarrow$一个 a 态与一个 b 态出现。

这样一来

$+1$	$=$	$(+1)$	$\times$	$(+1)$	$=$	(-1)	$\times$	(-1)
A 态标识		a 态标识		a 态标识		b 态标识		b 态标识

-1	$=$	(-1)	$\times$	$(+1)$	$=$	$(+1)$	$\times$	(-1)
B 态标识		b 态标识		a 态标识		a 态标识		b 态标识

因此我们就可以利用

$$A_i=\begin{cases}+1(n\text{ 为偶正整数})\\-1(n\text{ 为奇正整数})\end{cases}$$来解决一批两态关系及复合型两态关系的问题。同时,也可进一步体会到$(-1)^n=\pm1$的实际具体意义。

研究练习题 3－6

1. 在操场上有 101 名学生面向南站成一排。每次口令使其中任 10 名学生向后转,称为一次"反向运动"。证明:无论经过多少次"反向运动",都不可能使得所有学生都同时面向北方。

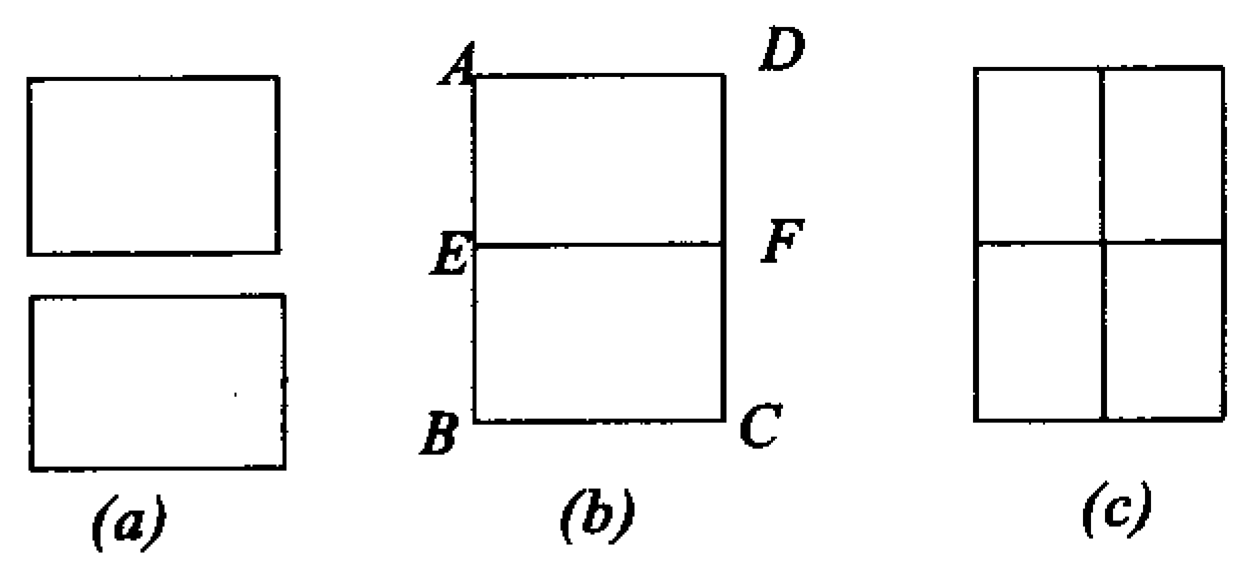
2. 设 $x_1,x_2,x_3,\cdots\cdots,x_n$是一组数,它们中每一个都取值 +1 或 -1. 而且$\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_3}+\frac{x_3}{x_4}+\cdots\cdots+\frac{x_{n-1}}{x_n}+\frac{x_n}{x_1}=0.$

求证:$4\mid n$.

3. n 个学生站成一队。首尾两个同学一个是男生,另一个是女生。现要在男、女相邻的两个学生之间都摆放一盆花。证明:所摆放的盆花的数量必为奇数。

§3.7　一笔画问题例谈

在数学的智力竞赛中,常常遇到一个图形能否一笔画的问题。



(图 1)

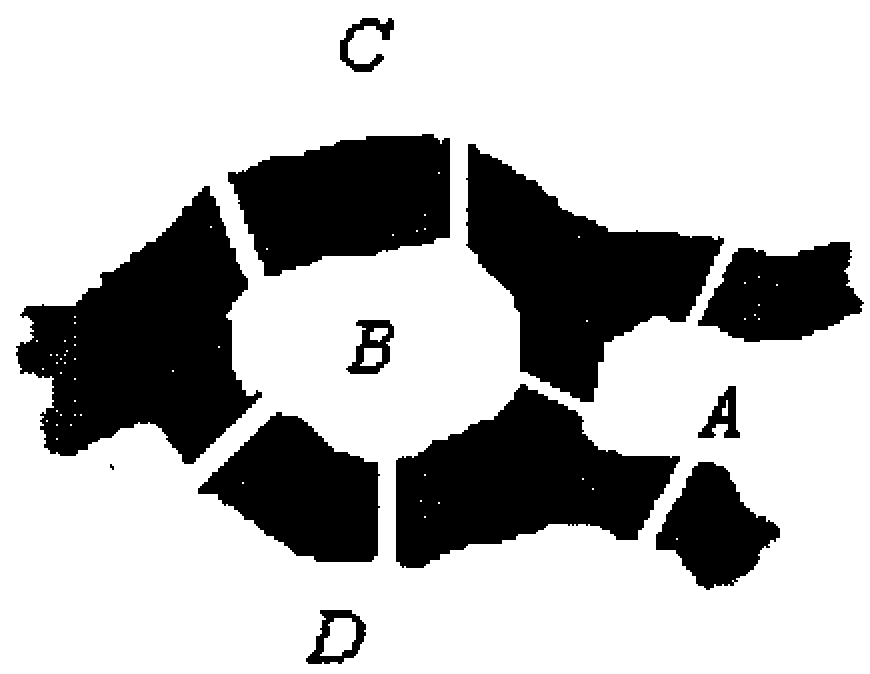
所谓一笔画,就是要求笔不离纸地一次把图画出,图上的每一条边都要画到而又不准重复。比如图 1 中的三个图形,(a)显然不能一笔画;(b)可以一笔画,比如沿路线

$E \to F \to D \to A \to E \to B \to C \to F$ 就是一种画法。而对(c)中的田字形,你试来试去就会发现,尽管它没像(a)那样分成两部分,(c)的整个图形都是连在一起的,但(c)也仍然不能一笔画。

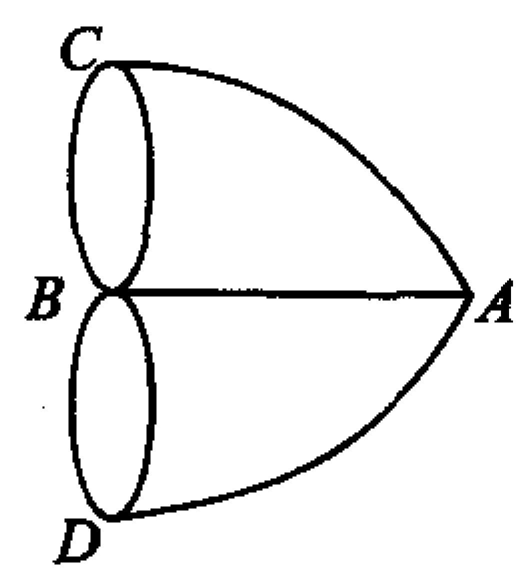
那么人们是如何在数学中提出了一笔画的问题? 一个图形能否一笔画总不能靠"试来试去"地碰运气去画吧! 也就是一个图形具备什么条件才能一笔画呢? 这正是我们要讨论的问题。

(一) 从"七桥问题"到"一笔画模型"

18 世纪东欧的哥尼斯堡城,有图 2 所示的七座桥。居民经常沿河过桥散步,到两岸、河心岛、半岛上一览风光,于是提出了一个问题:



(图 2)



(图 3)

一个散步者能否一次走遍这七座桥,而每座桥只许通过一次,最后仍回到起始的地点?

这个问题看起来似乎不难,然而众多热心散步的市民们都没能找到答案。于是问题被一传十、十传百地传到了大数学家欧拉(*Euler*,1707—1783)那里。欧拉以深邃的洞察力很快地证明了这样的走法根本不存在,并于 1736 年公布了自己的研究结果。

欧拉的思考是这样的:既然岛与半岛无非是桥梁的连接地点,两岸陆地也是桥梁通往的地点,那么就不妨把这四处地方抽象成 A, B, C, D 四个点,把七座桥表示成连接这四个点间的七条线,如图 3 所示,这样作并不改变问题的本质。于是人们企图一

次无重复地走过七座桥的“七桥问题”，就等价于图3所示图形能否一笔画的问题。欧拉作为一位数学大师，把实际中的“七桥问题”抽象成图3的“一笔画”模型。当千百个过桥者在实际的桥上转得昏头昏脑而不得其解时，欧拉的数学思维真乃大有高屋建瓴之势。这正是一个生动的数学建模过程。

欧拉所画的图3叫做“图”，A,B,C,D叫做图的顶点。两顶点之间的连线叫做边。图3与图1(a)不一样。图3中可以从任一顶点沿着边走到另一个顶点，这种图叫连通图。可见，一个图若能一笔画，这个图必须是连通图。但反过来，连通图却未必能一笔画。

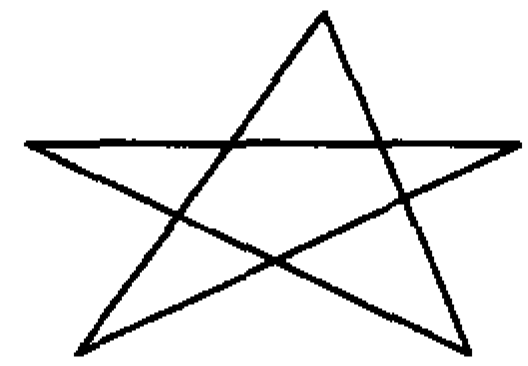
欧拉着手研究连通图，它若能一笔画，从图中A点出发不重复的走遍所有的边，再返回A点，这样的图有什么性质呢？容易看到，在每个顶点处都从一条边进入再从另一条边走出。一进一出，这个顶点应聚结偶数条边。对起点A也是如此，开始由A走出，中间不管有无边的进出，最后总要又有另一条边返回A点。所以A点聚结的也是偶数条边。这表明，凡能从某顶点A出发不重复地走遍所有边又最后返回A点的连通图，每个顶点都聚结偶数条边，然而图3所示的图形中A,B,C,D各顶点都聚结着奇数条边，所以这个图形不能“一笔画”，所谓“七桥问题”就这样轻松地解决了。

（二）　一笔画判定的欧拉定理

在上面的分析中，图中一个顶点聚结边的条数是个很重要的量。在图论术语中称一个顶点聚结的边的条数为这个顶点的度数、聚结偶数条边的顶点称为偶结点，聚结奇数条边的顶点称为奇结点。一般地，一个顶点A的度数记为$d(A)$，如图3中$d(A)=3,d(C)=3,d(D)=3$，而$d(B)=5$.

一笔画问题，仔细分析有两种类型：一种是如图1(b)所示，从

E 点出发止于 F,这是起点与终点不重合的一笔画通路。另一种是如图 4 所示,从任一个顶点起始不重复地走遍所有边而最后返回起始点,是起点与终点重合的一笔画回路。



(图4)

根据对七桥问题的分析:一个图形要能一笔画,这个图必须是连通图。当每个顶点都是偶结点的时候可以一笔画;或者如图 1(b),图中只有两个奇结点时也能一笔画。其它的情形一概不能一笔画。将以上的直观分析综合在一起,就得到一个图形能否一笔画的判定方法——欧拉定理。

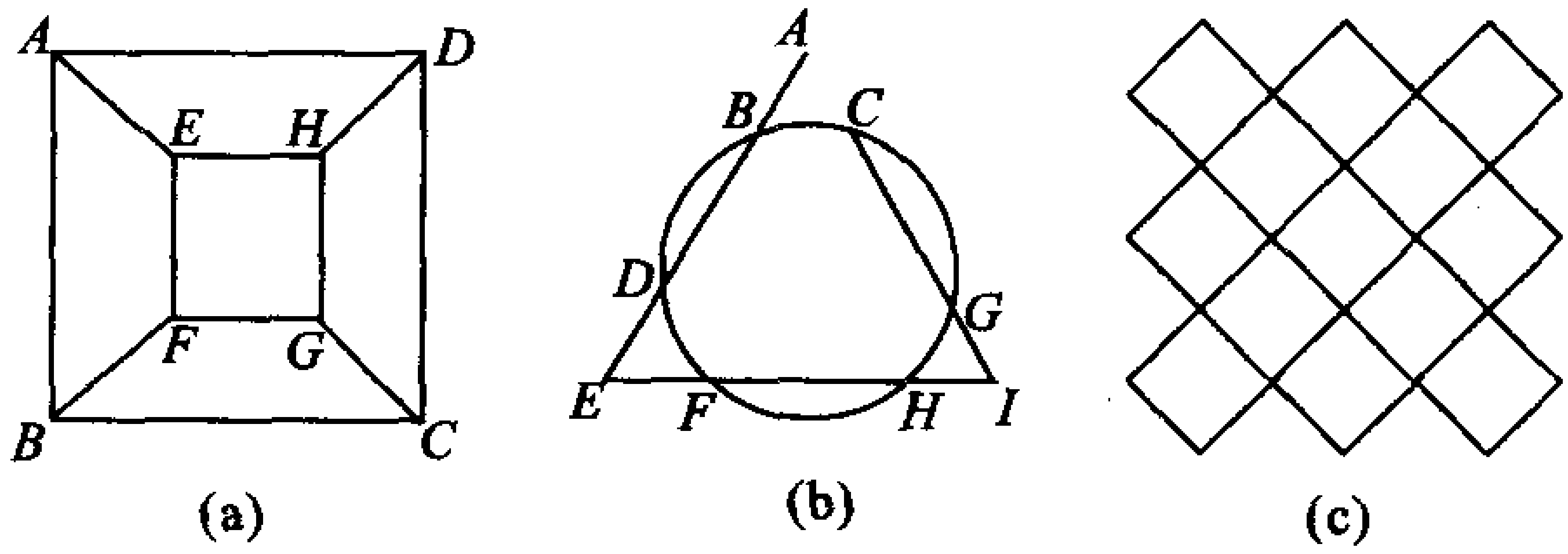
欧拉定理　一个图形能够一笔画的必要充分条件是:它是连通的,并且它的奇结点的个数为 0 个或 2 个。

(1)一个连通图,若没有奇结点(即全是偶结点),那么这个图一定可以一笔画成,而且可以从任一顶点出发将图形一笔画最后返回起始顶点,形成一个一笔画回路。

(2)　一个连通图,若只有两个奇结点,那么这个图也可以一笔画,而且只能从某一奇结点出发到另一奇结点结束,以其它结点为起点与终点的一笔画通路是不存在的。

(3)　一个连通图,若奇结点的个数多于两个,那么这个图就不能一笔画。

例 1.　试判定下列各图形哪些可以一笔画,哪些不能一笔画?



(图5)

解　(1). 对于图 5(a),

$d(A)=d(B)=d(C)=d(D)=d(E)=d(F)=d(G)=d(H)$

$=3$. 八个顶点都是奇结点，图 5(a)不能一笔画。

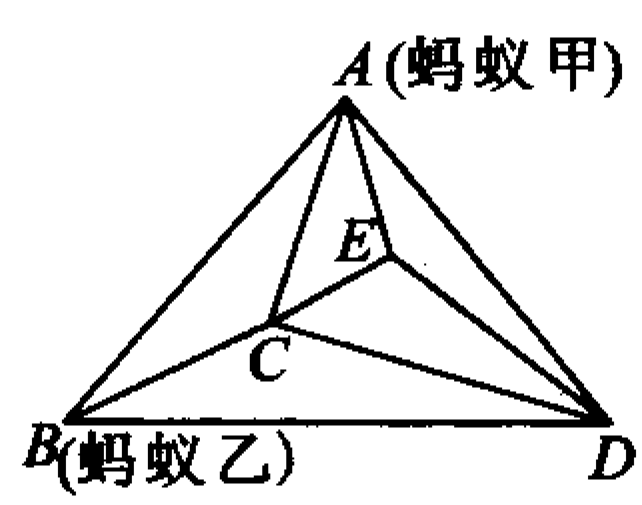
(2)对于图 5(b)，

$d(A)=1, a(C)=3, d(B)=d(D)=d(F)=d(G)=d(H)=4, d(E)=d(I)=2$. 其中只有两个奇结点 A,C，根据欧拉定理，该图可以一笔画。我们以 $\overset{\vee}{\longrightarrow}$ 表示沿圆弧的路径，其一笔画路线是：

$A \longrightarrow B \overset{\vee}{\longrightarrow} D \overset{\vee}{\longrightarrow} F \overset{\vee}{\longrightarrow} H \overset{\vee}{\longrightarrow} G \overset{\vee}{\longrightarrow} C \overset{\vee}{\longrightarrow} B \longrightarrow D \longrightarrow E \longrightarrow F \longrightarrow H \text{—>} I \text{—>} G \text{—>} C$.

(3)对于图 5(c)中，共有 24 个顶点，其中外围 12 个顶点度数都是 2，其余 12 个顶点度数都是 4，也就是图 5(c)中 24 个顶点都是偶结点，因此，根据欧拉定理，图 5(c)可以一笔画。并从任何一个顶点出发都存在最后又回到这个顶点的一笔画回路，有兴趣的同学不妨试试看。

例 2.　如图 6，甲、乙两只蚂蚁分别处在 A,B 两个顶点处。甲蚂蚁对乙蚂蚁说："咱们比赛，看谁先把这图中的九条边都爬过一遍后到达顶点 E，先到者为胜方。"乙蚂蚁欣然同意。假设两只蚂蚁的速度是一样的，问比赛结果谁先到达 E 点取得胜利？



(图 6)

解　图 6 各顶点的度数如下：

$d(A)=d(C)=d(D)=4, d(B)=d(E)=3$. 即只有两个奇结点，根据欧拉定理可知，图 6 可以一笔画。它的一笔画通路只能起始于 B 点而终止于 E 点。

因蚂蚁乙恰在 B 点，可由 $B\to C\to D\to B\to A\to C\to E\to D\to A\to E$，恰将九条边不重复地走了一遍。而蚂蚁甲起始于 A 点，自 A 点起始不存在不重复地走过所有边的一笔画通路。因此，自 A 到 E 要走过所有边，其中必有的边要走重复路。所以甲蚂蚁走的路程要比乙多。因为甲乙两个蚂蚁的速度相同，而乙蚂蚁比甲蚂蚁走的总路程要少，所以乙蚂蚁按要求先到达 E 点，从而获胜。

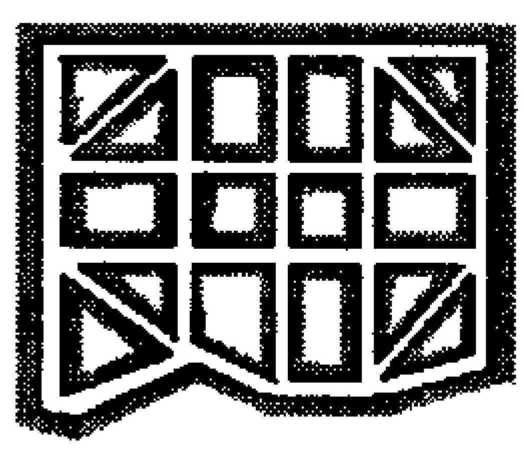
（三） 可化为一笔画的问题

有些问题可以抽象为一个图的一笔画问题，我们称这类问题是可化为一笔画的问题。也就是可以建立一笔画模型求解的问题。

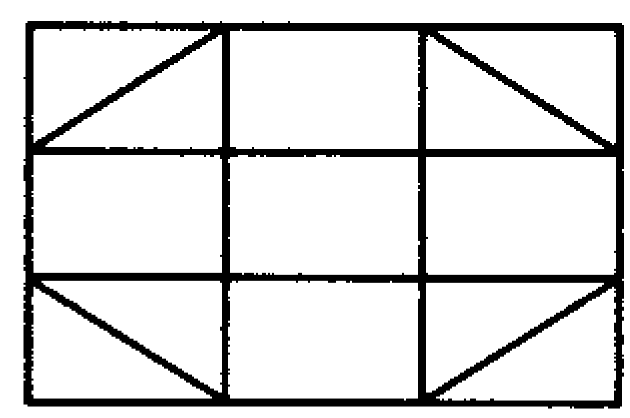
例 3. 公园里有如图 7 所示的花圃。洒水车可同时为道路两侧摆放的盆花浇水。园丁想驾洒水车一次浇完路边的所有盆花，并且每条道路只经过一次。问园丁的打算能实现吗？

解 将图 7 抽象成图 8，实线表示花圃中的道路。问题变为图 8 所示的图形能否一笔画？

我们注意到图 8 中共有 16 个顶点（交叉路口），其中四角上四个顶点的度数是 2，其余 12 个顶点的度数是 4，也就是图 8 中 16 个顶点都是偶结点，奇结点的个数为 0. 根据欧拉定理，图 8 可以一笔画。所以园丁的打算是可以实现的。



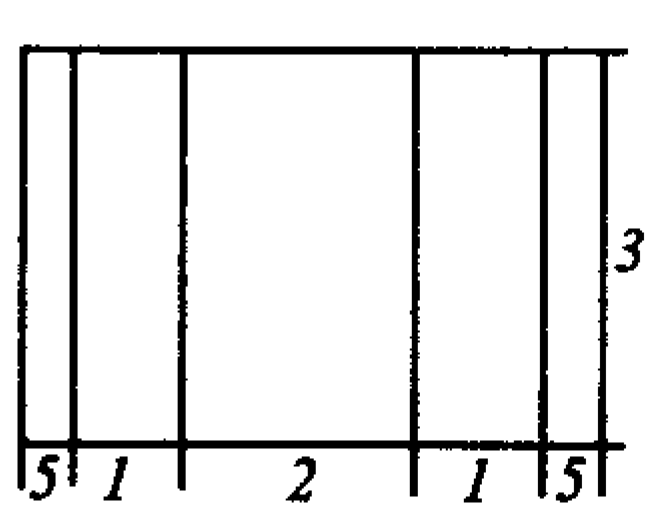
（图 7）



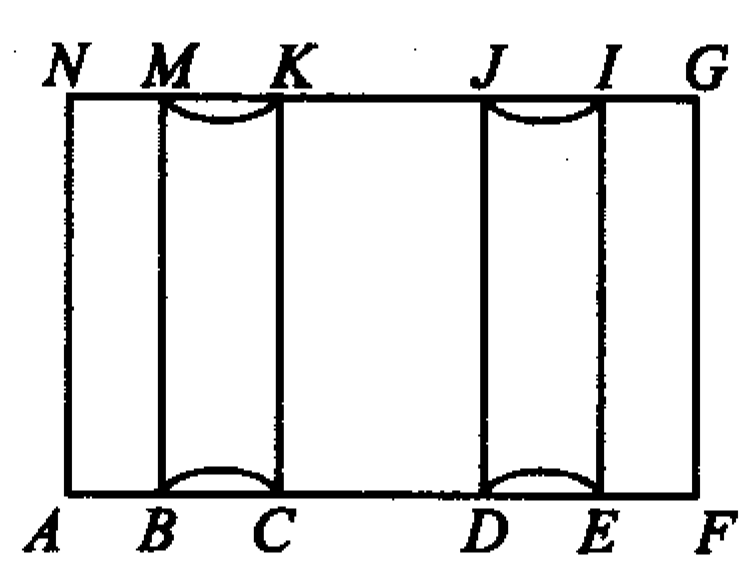
（图 8）

例 4. 一个邮递员送信件的街道如图 9 所示。图上的数字表示各段街道的长度（单位：千米），邮递员从邮局 A 出发，要走遍各条街道，最后回到邮局。问：在送信过程中怎么走行程最短？最短路程是多少千米？

解 图 9 中有 8 个奇结点，按图 9 所示路线，邮递员不能无重复走遍各个街道。所以我们考虑加上一些线，将图 9 变为图 10，使 8 个奇结点全变为偶结点。从而实现从 A 出发最后返回 A 的一



（图 9）



（图 10）

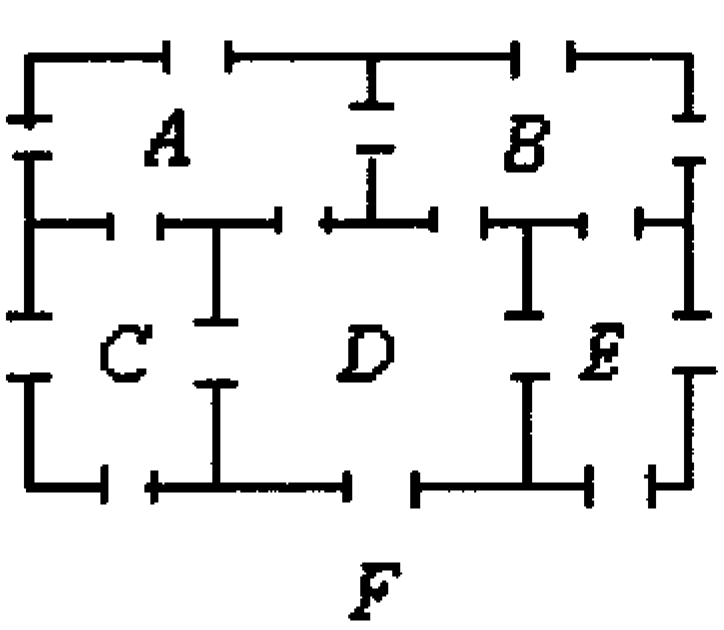
笔画回路。当然要使送信总路程最小,图 10 中所添的弧线总长要最少。也就是在 4 段长为 1 千米的街道可以走重复路:共 4 千米。

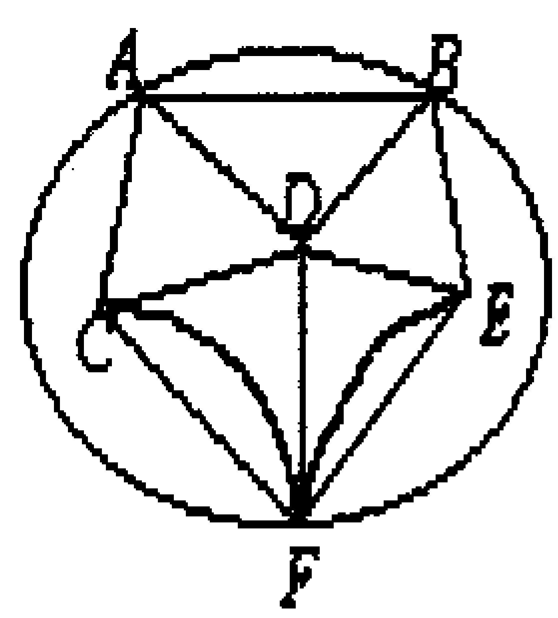
邮递员所走的总路程是:

$$3\times6+2\times2+1\times8+0.5\times4=32(\text{千米}).$$

答　邮递员从 A 出发,送完信返回到 A 的最短路程走 32 千米,其中一种走法是:$A\to B\to C\to D\to E\to F\to G\to I\to J\to D\to E\to I\to J\to K\to M\to B\to C\to K\to M\to N\to A$.

例 5.　如图 11 所示,是一个展览会馆的平面图。其中馆内各房间之间以及各房间与馆外均有门相通,共计开了 16 道门。小明来馆参观,他想在参观过程中把这 16 个门都不重复地穿行一遍,请问小明的这个想法能实现吗?





(图 11)　　(图 12)

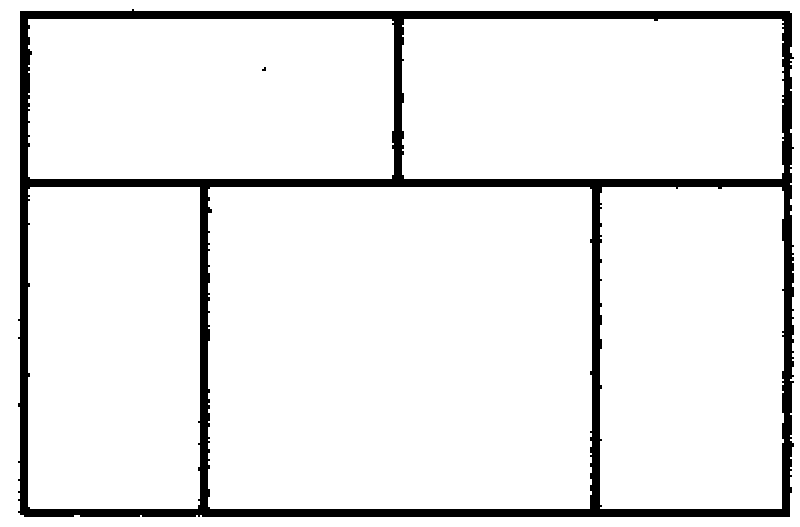
解　将五个展室及馆外空间看成六个点 A,B,C,D,E,F. 连接两个地方的门表示为连接对应两点的线。这样就形成了如图 12 所示的有 6 个顶点、16 条边的一个图。

小明想一次把所有 16 个门都不重复地穿行一遍,等价于图 12 能否一笔画的问题。

我们发现:$d(A)=d(B)=d(D)=5,d(C)=d(E)=4,d(F)=9$. 也就是图 12 中有 4 个奇结点。因此,根据欧拉定理,图 12 不能一笔画。也就是小明欲参观中把 16 个门不重复地穿行一遍的想法是不能实现的。

值得注意的是,在 1961 年第一届全俄数学奥林匹克有如下

一道8年级的试题："图13是由16条线段组成的图形。证明：不能画出一条折线，它和图中每条线段相交并且只相交一次（这条折线可以是开的，也可以是自身相交的，但折线的顶点不能在线段上，而折线的边也不能通过线段的公共端点）。"



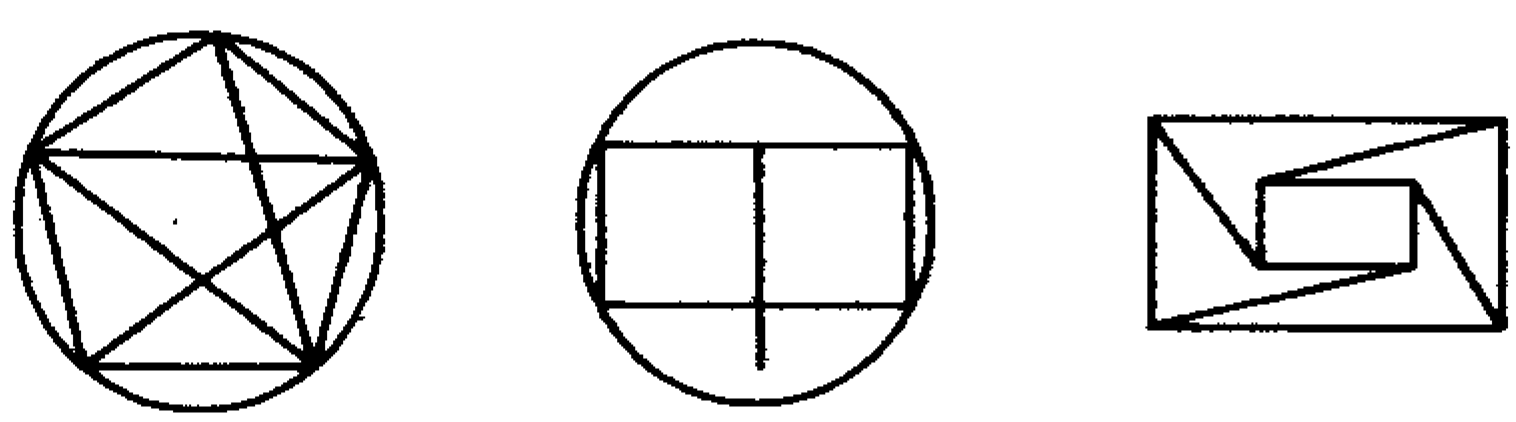
（图13）

仔细与例5对照，我们发现它与例5实质上是同一个问题。前苏联在1961年就已经通过数学竞赛向中学生普及一笔画模型与图论的基本常识，这很值得我们研究与借鉴。

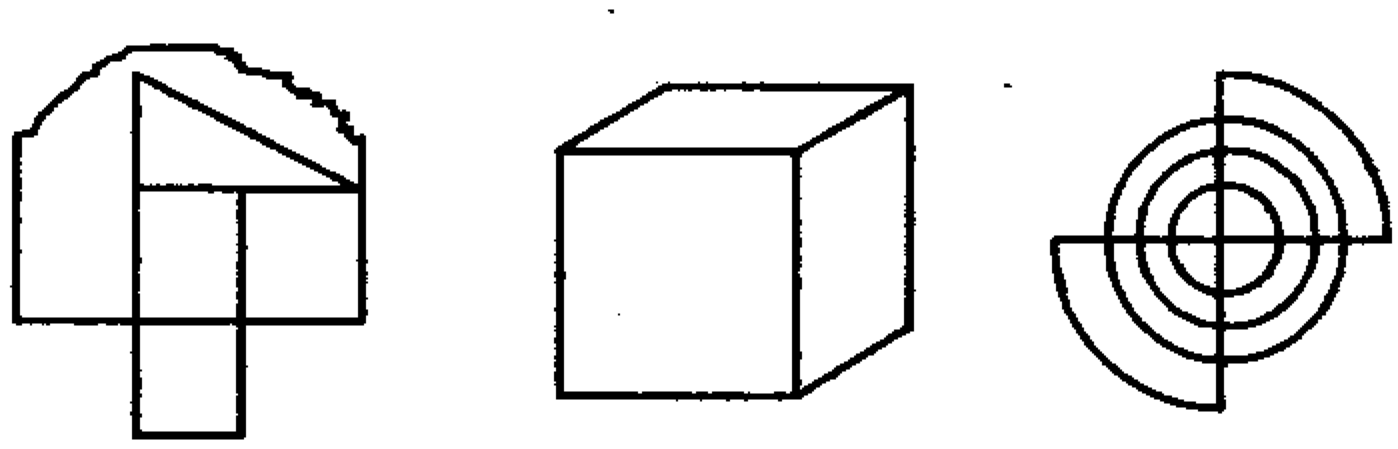
一笔画问题不只存在于游戏之中，很多日常生活所见也多有一笔画问题。如参观、旅游路线如何都要参观到又不走重复路的问题。再如，将图5(c)看成一个城市小区的街道图，就有邮递员投递信件，洒水车给街道洒水，怎样才能不走重复路，这都可化归为图形一笔画问题，都涉及到欧拉定理的应用。

研究练习题3－7

1. 判断下列图形哪些可以一笔画？哪些不能一笔画？

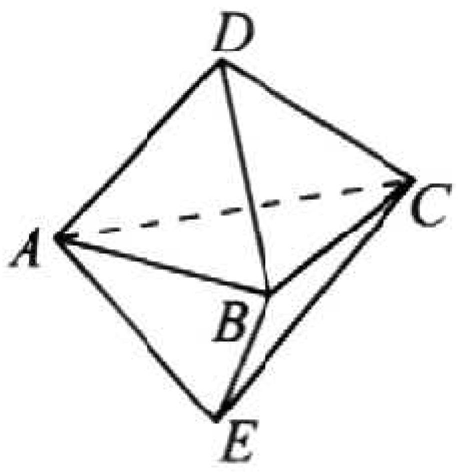


(1) (2) (3)

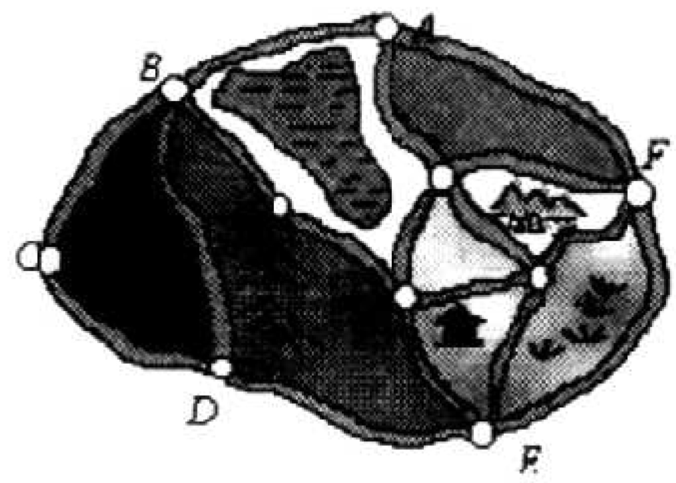


(4) (5) (6)

2. 设想在六面体的顶点 B 上有一只蚂蚁。它与顶点 E 上的另一只蚂蚁约定，同时起动以相同的速度爬完所有棱之后，最后到达 D 点。问哪只蚂蚁先到达 D 点？为什么？



3. 图中是某公园的六个门，均可进入公园。导游带团游公园，要使游客走遍公园中每一条道路且不重复，问出、入口应选在哪里？



§3.8　足球比赛中的数学问题

世界杯足球赛吸引着世界各国亿万个球迷。这其中有相当数量的初中学生。大家见面后的话题往往是对赛况的分析。并且经常要用到数学计算与逻辑推理。我们收集了一些有关足球比赛的、并且初中学生完全可以解决的问题，供大家研究。这是一件非常有趣又十分有益的事情。

例 1.　世界杯足球小组赛，每组四个队进行单循环赛，每场比赛胜队得 3 分，败队记 0 分，平局时两队各记 1 分。小组赛完以后，总积分最高的两个队出线进行下一轮比赛。如果总积分相同，还要按“小分”排序（比如按净胜球数排序）。

问：一个队至少要积几分才能保证本队必然出线？简述理由。

分析　四个队单循环比赛共要赛 6 场，若每场均有胜负，6 场最多共积 $3\times6=18$ 分。

对于某一队，它要与其它三队各赛一场，共计赛 3 场。若 3 场都胜这个队可积 9 分，当然必在出线之列；因为 8 不能表为三个这样的加数之和，其中每个加数只能在 0，1，3 中取值，易知一

个队3场比赛不能积8分；下面再考虑3场比赛积7分的情况。若甲队积7分，剩下的至多11分被乙、丙、丁3个队去分，不可能有两个队都得7分。即乙、丙、丁3个队中至多有一个队可得不少于7分。这样一来，甲队属于得分最高的两个队中的一个，甲队得7分时必在小组中出线。

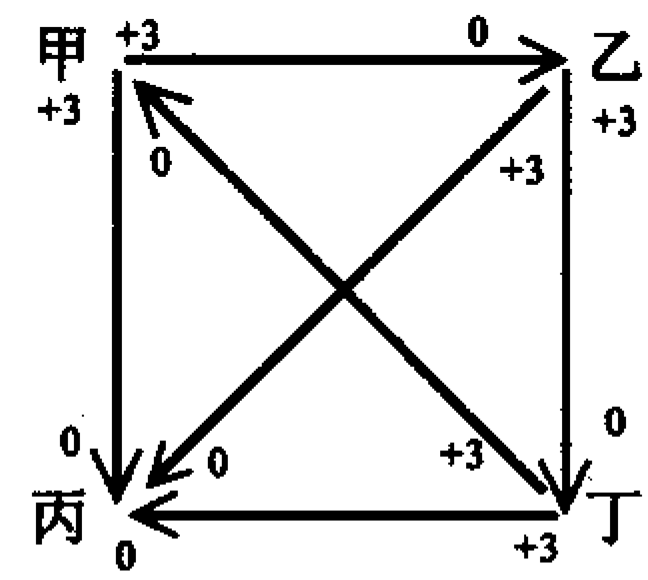
其次，如果甲队只积6分，则乙、丙、丁三队至多积12分，可能有另两队各积6分。比如乙、丙也各得6分，如果乙、丙两队的“小分”都比甲队高时，甲队就不能出线了。当然，甲队的得分少于6分时就更不能保证出线了。

综上所述可知，一个队至少要积7分，才能保证该队必在小组中出线。

在例1的上述解法中，我们靠的是纯粹逻辑推理的分析。这种分析好像缺乏一种“实物载体”，因此需要高度精力集中才能听明白、听清楚。其实若把每个队看成平面上的一个“点”，两个队比赛，就在相应的两个点间联结一条线段。这样一来，我们可以用一张图来形象地描述比赛情况。再进一步，若甲队胜乙队，则记成甲 $\overset{+3}{}\rightarrow\overset{0}{}$ 乙，其中箭头指向这场比赛中负的一方，记0分，箭尾是胜的一方，记+3分。如果平局就用不带箭头的线段来标记，如甲 $\overset{+1}{}\rightarrow\overset{+1}{}$ 乙，表明甲、乙平局各记1分。这样，我们就建立了甲、乙、丙、丁四个队单循环足球比赛的模型。每个点周围所标数字之和，就是该点所代表的球队的总积分。（易知，在甲、乙、丙、丁四个队单循环足球比赛模型中，任何两点间至多连一条线表示任何两队间只赛一场；每个点至多引出三条线段表示四个队中每个队至多比赛3场，因此每个队所积分至多是9分，至少是0分。）利用“模型图”作为分析球赛的“实物载体”，既直观又方便，是一种好方法。

请大家利用“模型图”再对例1进行分析是十分有益的。比如在分析甲队得6分，未必一定出线时，只要画出图1，可知甲、乙、丁各积6分，如果甲的“小分”比乙、丁两队低，则乙、丁两队出线，甲队将不能出线，道理十分清楚。

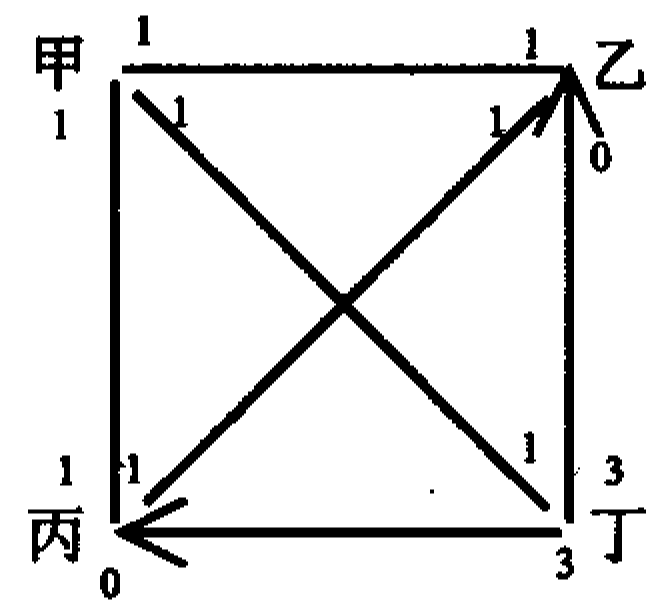
例2.　在例1四个足球队小组循环赛中，若有一个队只积3分，问这个队有可能出现吗？为什么？



（图1）

解　设甲队只积3分，甲队可能平3场，也可能2负1胜。如图2，甲积3分，就有出线的可能。甲积3分，乙、丙各积2分，丁积7分，这时甲队仍可在小组中出线。

建议读者再举出一个甲2负1胜积3分也可能在小组中出线的例子。



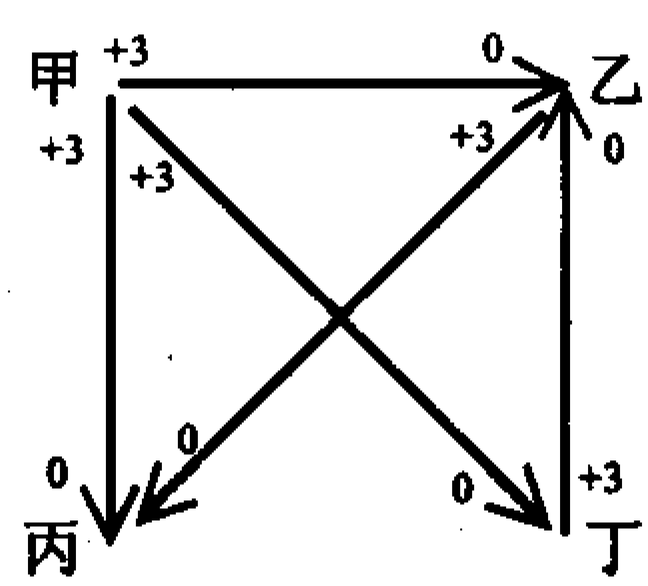
（图2）

例3.　甲、乙、丙、丁四个队单循环比赛（每两个队都要赛一场）。评分办法是：胜一场得3分，负一场记0分。平一局两队各记1分。全部六场赛完以后，统计出四个队的积分恰是四个互不相同的奇数。并且甲积分最多，乙积分第二，丙积分第三，丁第四。你能说出甲、乙、丙、丁四个队各积多少分吗？

解　甲、乙、丙、丁四个队单循环比赛，每个队都要与其它三个队比赛，所以每个队都要赛3场。若全胜，最多积9分，又知甲、乙、丙、丁四个队的积分恰是四个互不相同的奇数，因此，只有下列五种可能

$$\left\{\begin{array}{l}(甲\ 乙\ 丙\ 丁)\\(9,7,5,3)\\(9,7,5,1)\\(9,7,3,1)\\(9,7,3,1)\end{array}\right\}\text{最高积分为9分}$$

(7,5,3,1)→最高积分为7分。



（图3）

下面我们证明，甲积9分是不可能的.

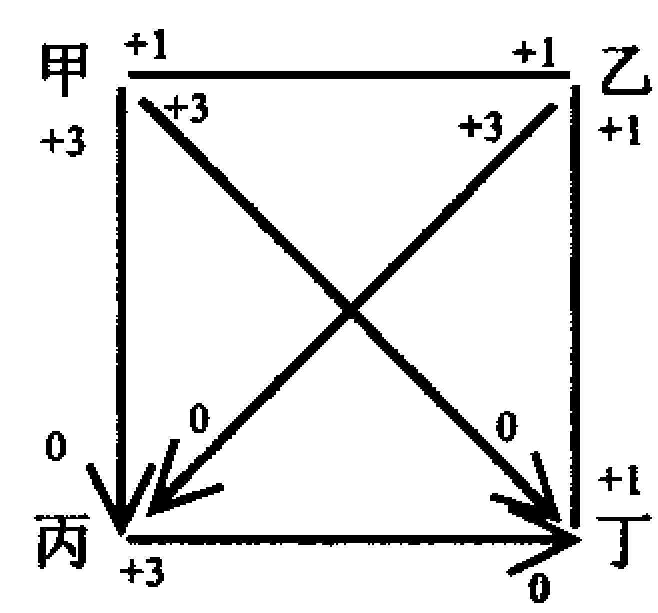
事实上，若甲积9分，即甲胜乙，甲胜丙，甲胜丁。从图3可见，乙、丙、丁各队均已负1场。所以乙、丙、丁各队至多两胜一负

积6分。所以乙、丙、丁各队均不能取到7分。并且也不能取到5分(5=0+3+2,也不能出现)。所以,乙、丙、丁各队只能最多积3分,即乙、丙、丁三队的积分只能取3,1两个奇数,与乙、丙、丁三队的积分取三个不同的奇数的条件相矛盾!因此甲队不能积9分,所以只能是甲队积7分,乙队积5分,丙队积3分,丁队积1分的情况成立。

例4. 对于例3的条件下,你能推断出甲、乙、丙、丁这四个队之间的胜负关系吗?

解 由例3,可知甲队积7分,乙队积5分,丙队积3分,丁队积1分。由于每队都要踢三场球且仅踢三场球,甲队积7分肯定是二胜一平;乙队积5分肯定是二平一胜;总之,甲、乙两队都保持不败。

由于甲、乙两队都保持不败,所以甲、乙两队之间的比赛是平局。因此甲胜丙,甲胜丁。如图4,由丙得3分,可能是平3场,也可能是一胜二负。但已知丙已负于甲,所以丙只能是一胜二负。由于乙保持不败,因而不可能是丙胜乙,所以肯定是丙胜丁。从而可知乙胜丙。



(图4)

剩下的乙与丁的一场比赛,只能是乙丁平局(丁一平二负积1分)。

综上所述,甲、乙、丙、丁四个队的胜负关系是:甲与乙踢平,甲胜丙,甲胜丁,乙胜丙,乙与丁踢平,丙胜丁。

例5. 世界杯足球小组赛,每组四个队进行单循环赛。每场比赛胜队得3分,败者记0分,平局时两队各记1分。小组赛完以后,按积分从高到低排名次,积分相同的队还要按“小分”排序(比如按净胜球数排序)。试问:获得相邻名次的两个队的积分最多可以相差多少分?

解 四个队单循环比赛,第一名的队至多可积9分。要使第

二名与第一名的积分的差数最大，应使后三名积分相等并尽可能最小才可能办到。这样，当其它三个队全互相踢平时，每队积2分，再按“小分”确定第2，第3，第4名的次序。因此，这时的第一名积分与相邻的第二名的积分相差 $9-2=7$ 分，这是名次相邻的两个队积分最大可能的差值。

请你思考：如果 n 个足球队进行单循环比赛，每场比赛胜队得3分，败者记0分，平局时两队各记1分。全赛完以后，按积分从高到低排名次，积分相同的队还要按“小分”排序。问：获得相邻名次的两个队的积分最多可以相差多少分？为什么？（答：最多可以相差 $2n-1$ 分）

附录 研究练习题提示与解答

研究练习题 1－1

1. **解** $x^4+3x^2+x+2=0$ 无实根，等价于对任意实数 x，都有 $x^4+3x^3+x+2\neq 0$. 事实上

$x^4+3x^2+x+2=(x^4+2x^2+1)+(x^2+x+1)=(x^2+1)^2+(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}>0$ 即可得证。

2. 由于 $f(x)=\frac{4^x}{4^x+2}$，要求和式 $f\left(\frac{1}{1001}\right)+f\left(\frac{2}{1001}\right)+\cdots+f\left(\frac{999}{1001}\right)+f\left(\frac{1000}{1001}\right)$ 的值。若 $x+y=1$，则 $f(x)+f(y)=\frac{4^x}{4^x+2}+\frac{4^y}{4^y+2}=\frac{2\cdot 4^x+2\cdot 4^y+8}{2\cdot 4^x+2\cdot 4^y+8}=1$. 所以可化归为 500 个其和为 1 的两数组来计算。求得这个和式的值等于 500.

3. 证明：根据平均数原理，若 $A+B+C>0$ 则 A,B,C 中至少有一个的值大于 0. 问题化归为证明 $A+B+C>0$ 即可。

事实上，$A+B+C=(a^3-2b+\frac{\pi}{2})+(b^2-2c+\frac{\pi}{3})+(c^2-2a+\frac{\pi}{6})=(a^2-2a+1)+(b^2-2b+1)+(c^2-2c+1)+(\pi-3)=(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2+(\pi-3)>0.$

根据平均数原理，A,B,C 中至少有一个的值大于 0.

研究练习题 1－2

1. 若取 2,4,6,……,98,100 这 50 个偶数时,其中任两个数都不互质。可见,$k>50 \Rightarrow k\geqslant 51$.

当 $k=51$ 时,由于相邻的两个自然数互质,可将 1～100 这 100 个自然数分成如下的 50 组:

$(1,2),(3,4),(5,6),\cdots\cdots,(i,i+1),\cdots\cdots,(99,100)$.

在 1～100 这 100 个自然数中任取 51 个数,必有两个数属于同一组,这两个数必是互质的。所以 k 的最小值是 51.

2. 将半径为 1 的圆分为 6 个相等的扇形,依抽屉原则,任意放入 7 个点,至少有两个点属于同一个扇形,这两个点的距离不大于 1. 问题是 7 个点是最小值吗?

其实,任意放入 6 个点就可以。设放入的 6 个点为 A_1,A_2,A_3,A_4,A_5,A_6,可以固定圆心,绕圆心旋转这个圆面,使得其中一个点,比如 A_1 在等分的六个扇形的一条半径上,这个半径是相邻的两个扇形的公共边。如果这相邻的两个扇形中至少有一个有放入的点,比如 A_2,则 A_1,A_2 两点的距离不大于 1. 如果这相邻的两个扇形中都没有放入的点,则所放入的其余 5 个点都在另外的四个扇形中,根据抽屉原则,至少有一个扇形中有放入的两个点,则这两个点的距离不大于 1. 点数为 5 个时,比如这 5 个点是该圆的内接正五边形的五个顶点时,任两点的距离都大于 1. 所以 k 的最小值是 6.

3. 四个人聚会,每人各带了 2 件礼品。分赠给其余三个人中的两个人。

若甲赠礼物给乙记为(甲,乙),这样一来,甲、乙、丙、丁共配 12 个对子:

(甲,乙),(乙,甲);

(甲,丙),(丙,甲);

(甲,丁),(丁,甲);
(乙,丙),(丙,乙);
(乙,丁),(丁,乙);
(丙,丁),(丁,丙)。

四个人之间共送8个礼物,至少有两对人,每对人是互赠礼物的。

研究练习题1-3

1. 题设的互不相等的且均不大于70的20个正整数,不妨设为

$(1\leqslant)a_1<a_2<a_3<a_4<\cdots\cdots<a_{19}<a_{20}(\leqslant 70)$(排序!)

考虑19个特殊的差数:

$b_1=a_2-a_1, b_2=a_3-a_2, \cdots\cdots, b_{18}=a_{19}-a_{18}, b_{19}=a_{20}-a_{19}$,

假设$b_1, b_2, \cdots\cdots, b_{18}, b_{19}$中最多只有三个相等,于是

$b_1+b_2+\cdots\cdots+b_{18}+b_{19}\geqslant 1+1+1+2+2+2+3+3+3+4+4+4+5+5+5+6+6+6+7=70.$

另一方面

$b_1+b_2+\cdots\cdots+b_{18}+b_{19}$

$=(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\cdots\cdots+(a_{19}-a_{18})+(a_{20}-a_{19})$

$=a_{20}-a_1\leqslant 70-1=69.$

导致了矛盾!

所以,这20个正整数两两(以大减小)的差值中,至少有四个是相等的。

2. 将2003个正数从小到大排列,不妨设为$a_1<a_2<a_3<a_4<a_5<\cdots<a_{2000}<a_{2001}<a_{2002}<a_{2003}$(排序!)

取脚标为奇数的前1001个数为第一组:

$\{a_1, a_3, a_5, \cdots, a_{1999}, a_{2001}\}$,记$a_1+a_3+a_5+\cdots\cdots+a_{1999}+a_{2001}=m$

取脚标为偶数的 1001 个数为第二组：

$\{a_2, a_4, a_6, \cdots, a_{2000}, a_{2002}\}$

记 $a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_{2000} + a_{2002} = n$

显然 $n < m$，

这时将 a_{2003} 分为 x, y 两部分，使得 $x + y = a_{2003}$ 且满足

$x + m = y + n$.

解得 $x = \dfrac{a_{2003} + (n - m)}{2}$，$y = \dfrac{a_{2003} - (n - m)}{2}$

显然 $x > 0$，又

$$y = \frac{a_{2003} - (n - m)}{2} = \frac{a_{2003} + m - n}{2}$$

$$= \frac{a_{2003} + (a_{2001} + a_{1999} + \cdots + a_5 + a_3 + a_1) - (a_{2002} + a_{2000} + a_{1998} + \cdots + a_4 + a_2)}{2}$$

$$= \frac{(a_{2003} - a_{2002}) + (a_{2001} - a_{2000}) + \cdots\cdots + (a_{1999} - a_{1998}) + (a_5 - a_4) + (a_3 - a_2) + a_1}{2} > 0$$

所以 $y > 0$.

这表明将 a_{2003} 可以分为 $x = \dfrac{a_{2003} + (n - m)}{2}$，$y = \dfrac{a_{2003} - (n - m)}{2}$ 两个正数，将 x 加到第一组，将 y 加到第二组，使得

新的第一组为 $\{a_1, a_3, a_5, \cdots, a_{1999}, a_{2001}, x\}$

新的第二组为 $\{a_2, a_4, a_6, \cdots, a_{2000}, a_{2002}, y\}$

此时，每一组都是 1002 个正数，计算两组数的和：

$$m + x = m + \frac{a_{2003} + (n - m)}{2} = \frac{a_{2003} + n + m}{2}$$

$$= \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{2001} + a_{2002} + a_{2003}}{2}$$

$$n + x = n + \frac{a_{2003} - (n - m)}{2}$$

$$= \frac{a_{2003} + n + m}{2} = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{2001} + a_{2002} + a_{2003}}{2}$$

可知,这两组和数都等于

$$\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{2001}+a_{2002}+a_{2003}}{2}.$$

3. 设数组中4个数的绝对值依次为 $a\leqslant b\leqslant c\leqslant d$(排序!)由题意应有 $a=bc$ 或 $a=bd\geqslant bc$ 或 $a=cd\geqslant bc$,可知 $a\leqslant bc$ 成立。同理应有 $d=ac\leqslant bc$,可知 $d\leqslant bc$ 成立。于是 $bc\leqslant a\leqslant b\leqslant c\leqslant d\leqslant bc$,从而 $a=b=c=d=x$,因而 $x^2=x$. 所以 $x=0$ 或 $x=1$. 考虑到 -1 的绝对值为 $+1$,从而所求的数组有四个:

$(0,0,0,0),(1,1,1,1),(-1,-1,1,1),(-1,-1,-1,1)$.

研究练习题 1-4

1. 解方程 $|x-5|+|x-6|+20=0$. 如果动手去解,将繁而无功。若从整体考虑,$|x-5|\geqslant0$,$|x-6|\leqslant0$,所以 $|x-5|+|x-6|+20>0$. 因此方程无解。

2. 由于整个齿轮传动系统依次逐个紧衔,所以只要有一个可以转动,其它齿轮都将带动起来。但若第一个齿轮顺时针转,则第二个齿轮逆时针转。第三个齿轮顺时针转,第四个齿轮逆时针转。由此类推,第十个齿轮将逆时针转,第11个齿轮将顺时针转,第一个齿轮逆时针转动。这是不可能的。因为第一个齿轮不可能既顺时针转同时又按逆时针转。所以整个齿轮系统不能转动。

3. 明明每个盒子的棋子都有变动,但小明却看不出来。这是什么原因?明摆着,原来空盒子不空了,为什么看不出来?肯定有一个盒子变成了空盒子。这说明原来有一个盒子只有一枚棋子。这枚棋子被拿走了,装有一枚棋子的盒子变空后,还需要有一盒子来替代它,这个替代的盒子原来装有2枚棋子,按照这个思路类推下去,……,会发现,原来的盒子里的棋子是若干个连续的自然数。现在要算一算是几个连续的自然数?题目告诉我们,

这些连续的自然数之和是50多。只有

$$0+1+2+3+4+5+6+7+8+9+10=55.$$

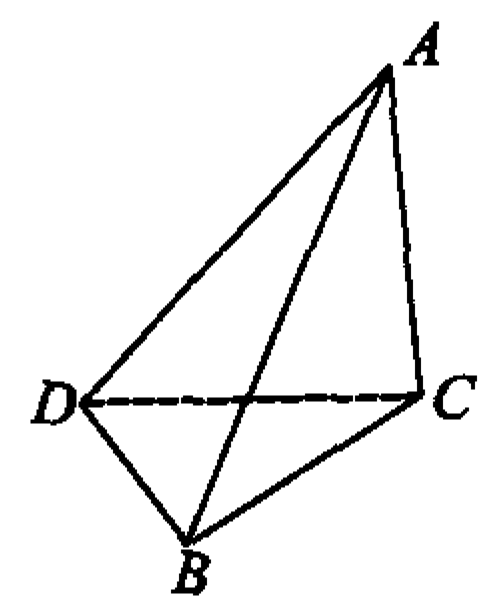
因此,应有11个盒子。

研究练习题1-5

1. 以 n 个点中距离最小的两个点为直径画圆即可。

2. 设 AB 是四面体最长的一条棱(**考虑极端!**)由 $\triangle ABD$ 与 $\triangle ABC$ 中可知

$AD+BD>AB, AC+BC>AB.$



相加得 $(AD+BD)+(AC+BC)>2AB$,即

$(AD+AC)+(BC+BD)>2AB$,

所以要么 $AD+AC>AB$,要么 $BC+BD>AB$.

当 $AD+AC>AB$ 时,由 A 点引出的三条棱可构成一个三角形的三条边。

当 $BC+BD>AB$ 时,由 B 点引出的三条棱可构成一个三角形的三条边。

3. 假设满足 $x^2+y^2=3(z^2+u^2)$ 的四个正整数存在,则其中必有使 x^2+y^2 取得最小值的那一组(考虑极端!),如果有若干组解都使 x^2+y^2 取最小值,我们只取其中一组即可。设这四数组为 (a,b,c,d) 由方程 $a^2+b^2=3(c^2+d^2)$ 可知,
$3\mid a^2+b^2$,容易证明 $3\mid a^2+b^2 \Leftrightarrow 3\mid a$ 且 $3\mid b$. 因此可设 $a=3m, b=3n$. 所以

$a^2+b^2=9m^2+9n^2=3(c^2+d^2)$,即 $c^2+d^2=3(m^2+n^2)$. 这样我们找到了四个正整数组 (c,d,m,n) 满足方程 $x^2+y^2=3(z^2+u^2)$,同时 $c^2+d^2<a^2+b^2$. 这与 a^2+b^2 是使 x^2+y^2 取最小值的选择相矛盾。因此,不存在四个正整数 x,y,z,u 满足方程 $x^2+y^2=3(z^2+u^2)$.

4. 先证至少有1991个红点。

由 997 个点连接的线段共有有限条，必有一条最长的线段，设为 AB（考察极端！）于是 A 与其它 996 个点所连线段的中点都在$\odot(A,\frac{1}{2}AB)$内部或边界上，B 与其它 996 个点所连线段的中点都在$\odot(B,\frac{1}{2}AB)$内部或边界上，上述两圆外切于 AB 中点。$\odot(A,\frac{1}{2}AB)$与$\odot(B,\frac{1}{2}AB)$中共至少有 $2\times996-1=1991$ 个点。

恰有 1991 个红点的点集是存在的。取 x 轴上横坐标为 1，2，3，……，997 的点即可。在(1，997)内，分母为 1 或 2 的有理数就是全部的红点，恰为 1991 个。

研究练习题 2－1

1. 设三角形三个内角分别是 α,β,γ 且有 $\alpha\geqslant\beta\geqslant\gamma$ ①

由题设 $\alpha-\gamma=24$ ②

对三角形中两角和为 $n°$，可分 $\beta+\gamma=n$ 或 $\alpha+\gamma=n$ 或 $\alpha+\beta=n$ 三种情况讨论：

(1)若 $\beta+\gamma=n$ 则 $\alpha=180-n$

由②$\gamma=156-n$

$\beta=n-\gamma=2n-156$

由① $180-n\geqslant2n-156\geqslant156-n$

所以 $104\leqslant n\leqslant112$. ③

(2)若 $\alpha+\gamma=n$ 则 $\beta=180-n$

由②及 $\alpha+\gamma=n$ 解得 $\alpha=\frac{n+24}{2},\gamma=\frac{n-24}{2}$

由①$\frac{n-24}{2}\leqslant180-n\leqslant\frac{n+24}{2}$，所以 $112\leqslant n\leqslant128$. ④

(3)若 $\alpha+\beta=n$ 则 $\gamma=180-n$

由②得 $\alpha=204-n,\beta=n-\alpha=2n-204$

由①有 $180-n\leqslant 2n-204\leqslant 204-n$

所以 $128\leqslant n\leqslant 136$. ⑤

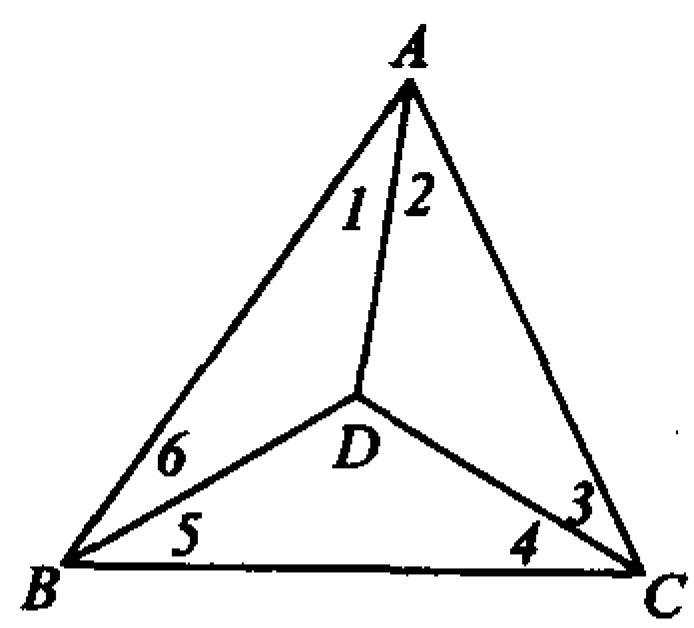
综合③,④,⑤得 $104\leqslant n\leqslant 136$.

2. 四个点 A,B,C,D 在平面上的分布只有两种可能的情况:

(1) 若四点中有一点在另三点所成的三角形的内部,不妨设点 D 在 $\triangle ABC$ 的内部,如图 a. 图中 $\angle 1,\angle 2,\angle 3,\angle 4,\angle 5,\angle 6$,分别是 $\triangle ABD,\triangle ACD,\triangle BCD$ 的内角,所以

$$\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4+\angle 5+\angle 6=180^\circ$$

由平均数原理 $\angle 1,\angle 2,\angle 3,\angle 4,\angle 5,\angle 6$ 中至少有一个不超过 30°,当然更不会超过 45°.



(a)

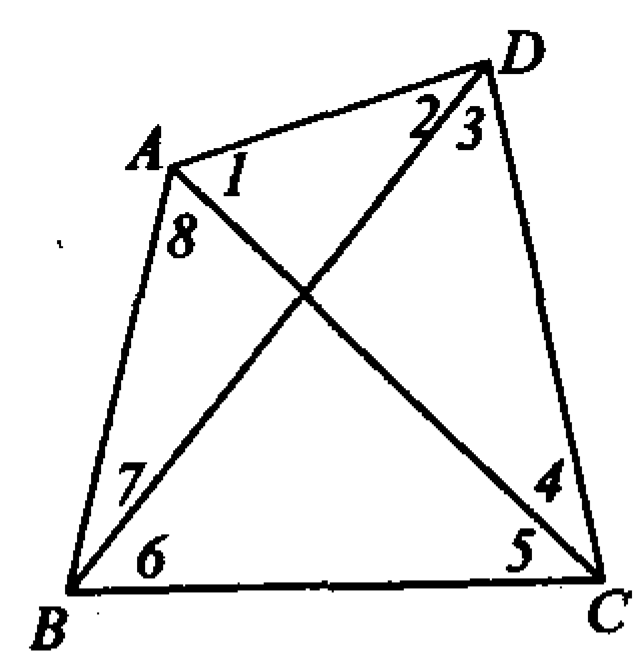
(2) 若四点中没有一点落在另三点所成的三角形的内部,如图 b,A,B,C,D 成为一个凸四边形的四个顶点。

由三角形内角和定理,得 $\angle 1+(\angle 2+\angle 3)+\angle 4=180^\circ$,

$$\angle 5+(\angle 6+\angle 7)+\angle 8=180^\circ$$

所以 $\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4+\angle 5+\angle 6+\angle 7+\angle 8=360^\circ$,而 $\angle 1,\angle 2,\angle 3,\angle 4,\angle 5,\angle 6,\angle 7,\angle 8$ 分别是

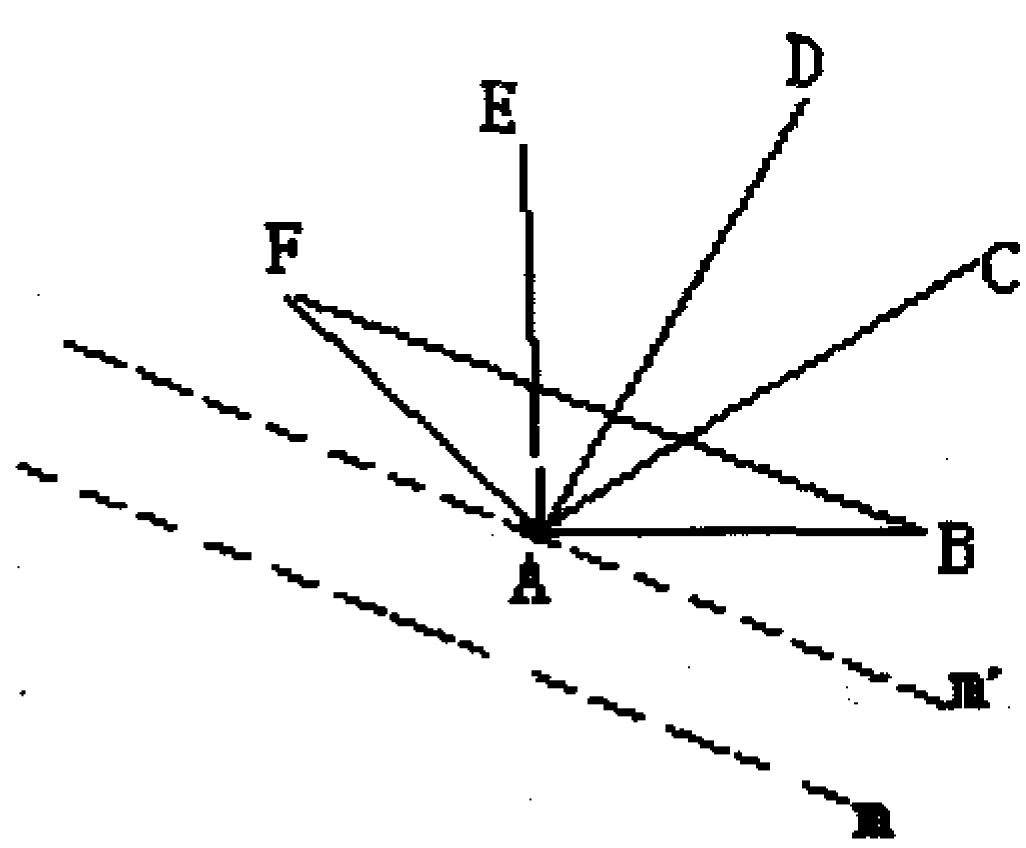
$\triangle ABC,\triangle ABD,\triangle ACD,\triangle BCD$,某一个的内角,根据平均数原理,这 8 个角中至少有一个不超过 45°.



(b)

综合(1),(2)命题得证。

3. 平面上存在直线 m,使得 A、B、C、D、E、F 这 6 个点都在 m 的同侧。平移 m,到遇到 6 个点中的一个点(比如 A)为止,这时 $\angle BAF$ 小于平角。



(1)如果$\angle BAF<120°$,则$\angle BAC+\angle CAD+\angle DAE+\angle EAF<120°$

根据平均数原理,四个角中至少有一个小于30°. 比如$\angle CAD<30°$,即得$\triangle CDE$的一个内角小于30°.

(2)如果$\angle BAF\geqslant 120°$,则在$\triangle BAF$中$\angle ABF+\angle AFB\leqslant 60°$. 根据平均数原理,$\angle ABF$,$\angle AFB$中至少有一个不超过30°.

综上所述,可从已知的6个点中选出某3点构成一个三角形,使得该三角形中至少有一个内角不超过30°

研究练习题2-2

1. 你可以用一张正方形纸片作实验,最后剪完展开,数一数小洞孔个数一共256个. 然而当操作次数很大时,这种方法实际很难进行。

我们可以将实际操作在思维中进行。

一次操作后,层数由1变为4,若剪去所得小正方形左下角,展开后只有1个小洞孔,恰是大正方形的中心。

连续两次操作后,折纸层数为4^2,剪去所得小正方形左下角,展开后大正方形留有$4^{2-1}=4^1=4$个小洞孔。

连续三次操作后,折纸层数为4^3,剪去所得小正方形左下角,展开后大正方形留有$4^{3-1}=4^2=16$个小洞孔。

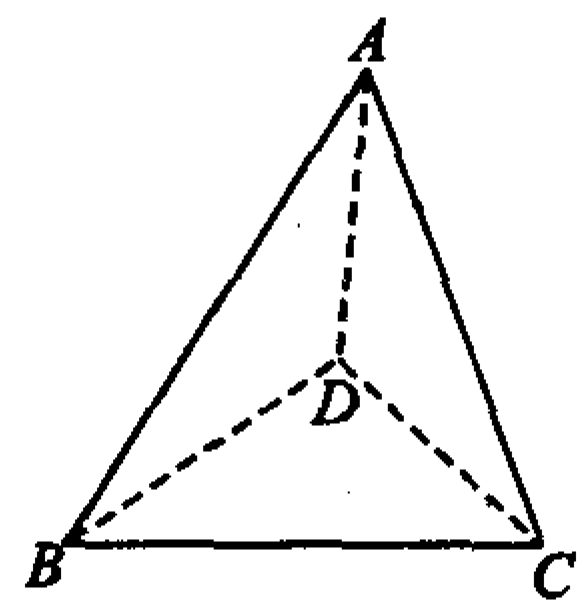
连续四次操作后,折纸层数为4^4,剪去所得小正方形左下角,展开后大正方形留有$4^{4-1}=4^3=64$个小洞孔。

按上述规律不难确定:

连续五次操作后,折纸层数为4^5,剪去所得小正方形左下角,展开后大正方形留有$4^{5-1}=4^4=256$个小洞孔。

由于在思维中总结概括了规律,当要问:将一张充分大的正方形纸片按上述规则完成100次操作后,剪去所得小正方形左下角,当展开这张正方形纸片后,一共有多少个小洞孔?这时,你要实际

去折，去剪，再去数，根本不可能办到。然而思维中由次数较少的操作发见的规律告诉我们完成 100 次操作以后，剪去所得小正方形左下角，当展开这张正方形纸片后，一共有 $4^{100-1}=4^{99}$ 个小洞孔。



2. 由初始状态第一次翻转后红面为底面，第二次翻转后蓝面为底面，这时蓝面正对着你；第三次翻转后，黄面为底面，第四次翻转后红面变为底面，这时白面正对着你。继续按规则操作，会发现连续翻转到第八次出现红面正对着你。此后，每八次操作面对你的红面重复出现，形成周期有序的变化。

由于 $100\div8=12\cdots\cdots$余 4，所以完成第一百次操作后，面对你的面与完成第四次操作面对你的面相同，是白色。

3. 第 1 次操作得数字串　711131131737

第 2 次操作得数字串　11133173

第 3 次操作得数字串　111731

第 4 次操作得数字串　1173

第 5 次操作得数字串　1731

第 6 次操作得数字串　7311

第 7 次操作得数字串　3117

第 8 次操作得数字串　1173

观察可知，以下以 4 为周期循环，即第 $4k$ 次操作均得数字串 1173（$k=1,2,3,\cdots$）

而 $1996=4\times499$，所以第 1996 次操作得数字串 1173，因此第 1997 次操作得数字串 1713.

4. 将数表标上行与列，如：第㈡行第⑤列的数是 17，第㈢行第②列的数是 9，依次类推。

	①	②	③	④	⑤	⑥
㈠	1	2	6	7	15	16……
㈡	3	5	8	14	17……	

(三) 4　9　13……

(四) 10　12……

(五) 11……

……

从表中看出,第一斜行只有一个数,是 1;

第二斜行是 3,2 两个数,由上向下递增,最大数是 3;

第三斜行是 4,5,6 三个数,由下向上递增,最大数是 6;

第四斜行是 10,9;8,7 四个数,由上向下递增,最大数是 10;

第五斜行是 11,12,13,14,15 五个数,由下向上递增,最大数是 15;以下类推。

一般地,奇数斜行中的数由下向上递增,偶数斜行中的数由上向下递增。

第 n 斜行中共有连续的 n 个自然数,其中的最大数是 $S_n=\frac{2n(n+1)}{2}$.

如果我们找出 2001 位于数表中第几斜行的第几位,再换算成原数表的第几行第几列,问题即可解决。

经试算:第 62 斜行的最大数是 $\frac{62\times63}{2}=1953$

第 63 斜行的最大数是 $\frac{63\times64}{2}=2016$.

所以 2001 位于第 63 斜行。第 63 斜行中的数是由下向上递增的,左边第一个数是 1954. 因此 2001 是位于第 63 斜行的由下向上数第 $2001-1954+1=48$ 个位置的数。换算成原数表的行和列是第 $63-48+1=16$ 行,第 48 列。也就是 2001 排在数表中的第 16 行第 48 列。

5. 我们注意,第一行的每个数的分子、分母之和等于 2,第二行的每个数的分子、分母之和等于 3,第三行的每个数的分子、分母之和等于 4,第四行的每个数的分子、分母之和等于 5,第五行的每个数的分子、分母之和等于 6,由此可以看到一个规律就是:

每行各数的分子分母之和等于行数加 1.

其次，很明显可以看出，每行第一个数的分母是 1，第二个数的分母是 2，第三个数的分母是 3，……，即自左起第几个数的分母就是几。

根据上述总结的规律可得，$\frac{1991}{1949}$所在的行数等于 $1991+1949-1=3939$. 而在第 3939 行中，$\frac{1991}{1949}$位于自左至右的第 1949 个。

研究练习题 2－3

1. 假设三角形中直角或钝角的个数多于 1 个，则至少有 2 个。于是这 2 个角的和不小于 180°. 再加上第 3 个内角后，就得出三角形的内角之和大于 180°. 这与三角形内角和等于 180°矛盾。所以三角形中直角或钝角的个数不能多于一个。

2. 我们写出在 5×9 的长方形中分出的所有可能的边长为整数的长方形，它们的面积由小到大排列的序列是

$1\times1, 1\times2, 1\times3, 1\times4, 2\times2, 1\times5, 1\times6, 2\times3, 1\times7, 1\times8, 2\times4, 1\times9, 3\times3, 2\times5, \cdots\cdots,$ （＊）

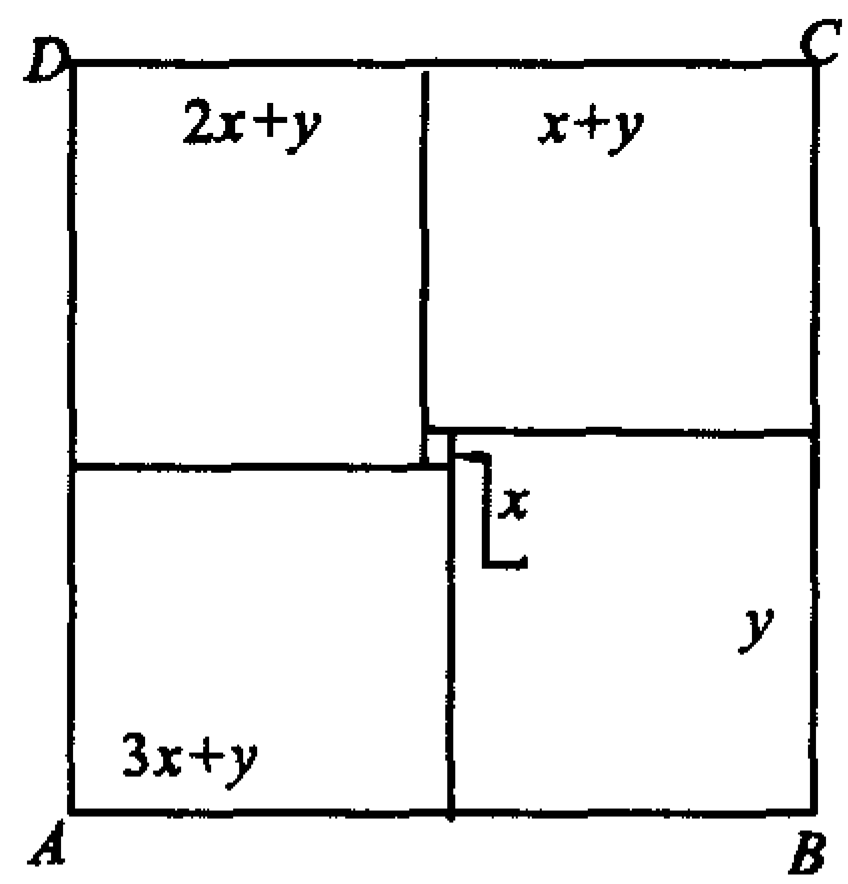
假定 5×9 的长方形能分成 10 个两两不同的边长为整数的长方形，显然它们的面积之和等于 45. 另一方面，这 10 个分得的长方形面积之和不小于序列（＊）中前十个长方形的面积之和，即不小于

$$1\times1+1\times2+1\times3+1\times4+2\times2+1\times5+1\times6+2\times3+1\times7+1\times8=46.$$

于是有 $45\geqslant46$，矛盾！

因此，要将 5×9 的长方形分成 10 个边长为整数的长方形，其中至少有两个是完全相同的。

3. 该同学的想法不能实现。理由如下：



如果某同学的拼图法能实现，即存在5张边长不等的正方形纸片如图拼成大正方形 $ABCD$，那么不妨设中间小正方形的边长为 x，显然，$x>0$ 右下角那个正方形的边长为 y，则右上角正方形的边长为 $x+y$，

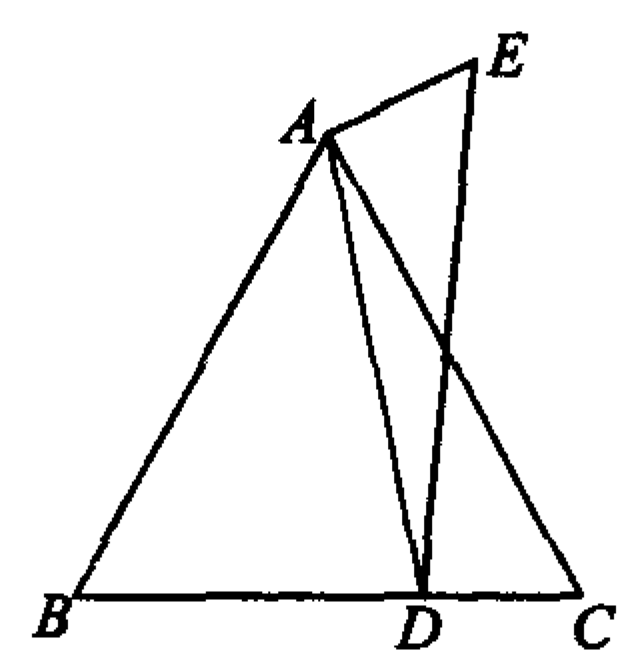
左上角正方形的边长为 $2x+y$，左下角正方形的边长为 $3x+y$. 于是 $AD=5x+2y$，$BC=x+2y$.

要 $ABCD$ 是正方形，必须 $CD=BC$，由 $CD=BC$ 得 $3x+2y=x+2y$，解得 $x=0$. 这与 $x>0$，即与中间的小正方形的存在相矛盾。

所以该同学用5个正方形如图所示拼成大正方形的想法是不能实现的。

研究练习题2－4

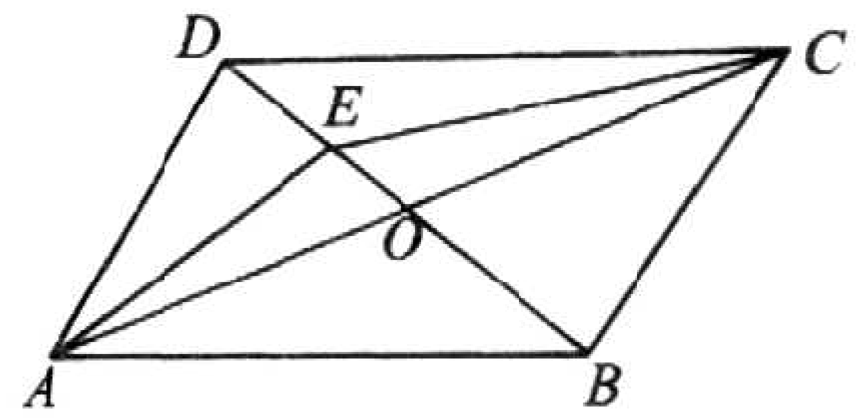
1. 不是真命题。反例如下：$\triangle ABC$ 中，$AB=AC=2$，$BC=\frac{1}{2}$，即 $a=\frac{1}{2}$，$c=b=2$，满足 $\frac{1}{2}+2=2+\frac{1}{2}=2+\frac{1}{2}$，$\triangle ABC$ 不是正三角形。



2. 作等边三角形 ABC，在底边 BC 上取一点 D，使得. $BD>CD$. 连接 AD，作 $\angle EDA=\angle CAD$，在射线 DE 上取点 E，使得 $DE=AC$，连接 AE 如图所示，易证 $\triangle ADC\cong\triangle DAE$，推出 $\angle E=\angle C=\angle B=60°$，$DE=AC=AB$. 由于 $AE=DC<BD$，所以四边形 $ABDE$ 不是平行四边形，然而它却具有对边 $AB=DE$，对角 $\angle E=\angle B$ 的性质。

3. 作等腰三角形 ADE，延长底边 ED 至点 O，在射线 EO 上取点 B，使得 $OB=OD$，连接 AO，延长 AO 到 C，使得 $OC=OA$，则四边

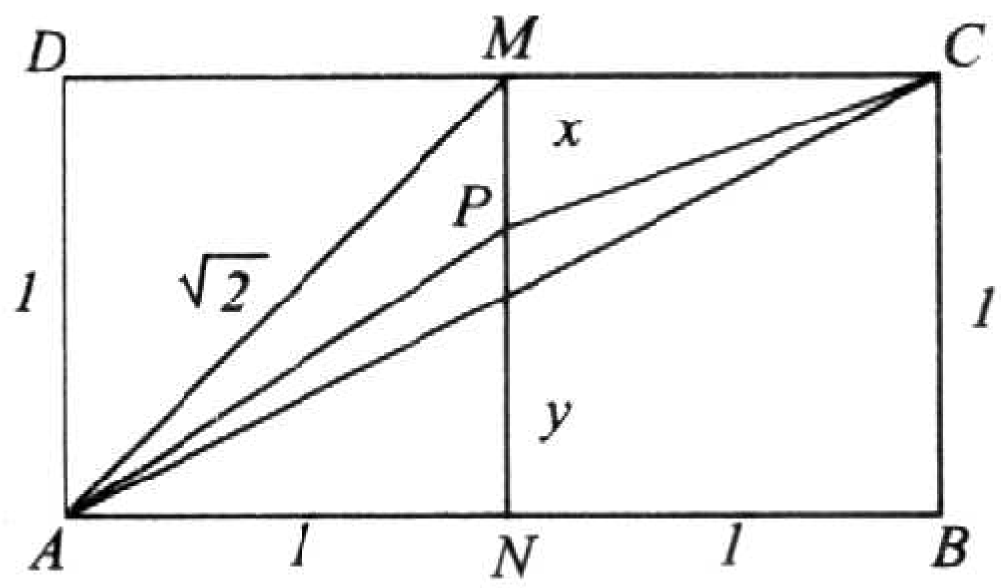
形 $ABCD$ 是平行四边形。而四边形 $ABCE$ 不是平行四边形，但它满足 $AE=AD=BC$ 且对角线 BE 平分 AC，$AO=OC$.



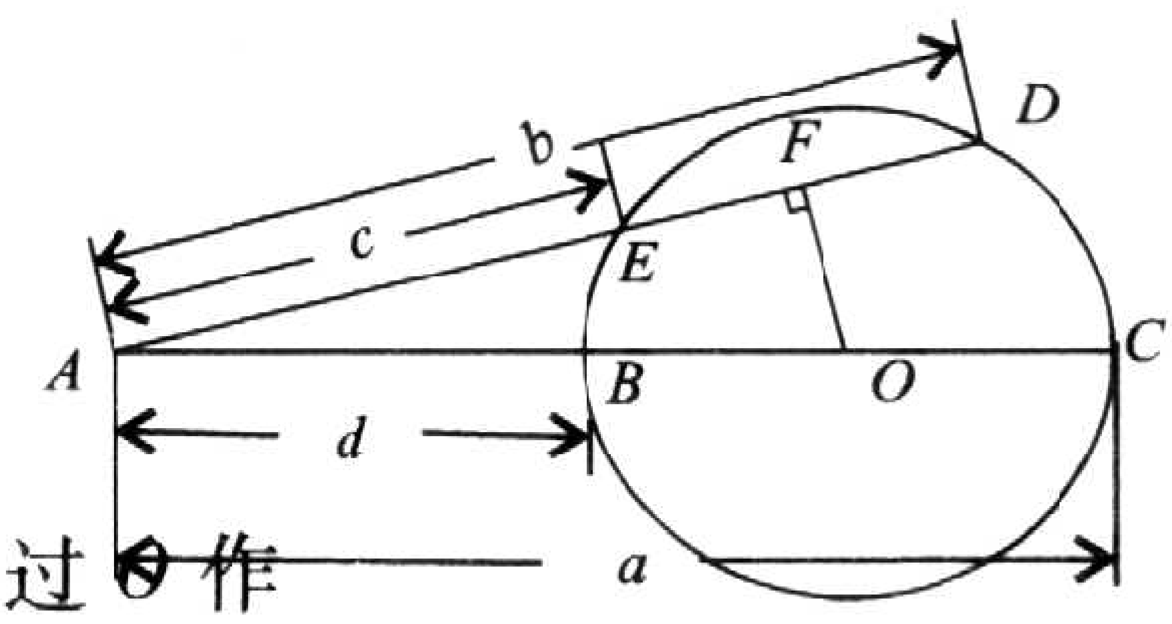
4. 不必每个系数都是整数，例如二次三项式 $\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x=\frac{1}{2}x(x+1)$，对于任意正数 x，其值均为整数。

研究练习题 2－5

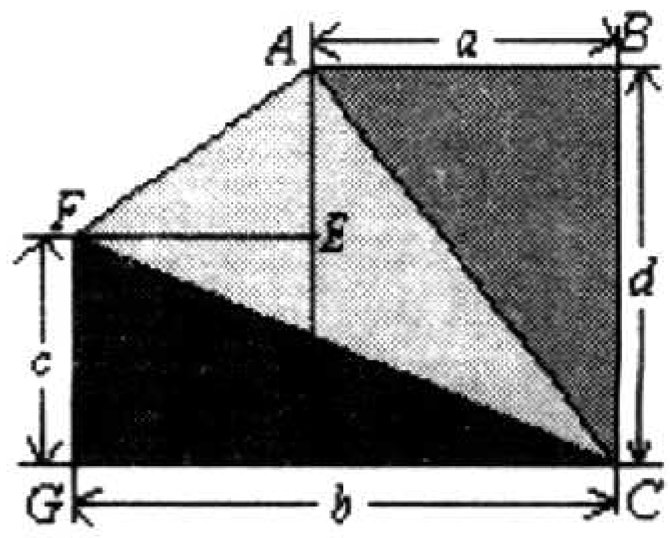
1. 构作如下图形证明不等式 $MP=x,NP=y,MP+NP=1.$ $AC=\sqrt{5}$，$AM=\sqrt{2}$，$PC=\sqrt{1+x^2}$，$AP=\sqrt{1+y^2}$. 由 $AC\leqslant PC+AP\leqslant AM+MC$，即得 $\sqrt{5}\leqslant\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2}\leqslant 1+\sqrt{2}$.



2. 作 $AC=a$，在 AC 上取点 B，使得 $AB=d$. 以 BC 为直径画圆，圆心为 O 点。作割线 $AD=b$ 交圆于 E. 则 $AE\times AD=AB\times AC$ 即 $AE\times b=a\times d$，



由已知 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，易知 $AE=c$. 过 O 作 $AD\perp OF$ 于 F，F 为 ED 的中点。$AO=\frac{a+d}{2}$，$AF=\frac{b+c}{2}$，$AO>AF$，那么 $a+d>b+c$.



3. 如图构作矩形 $ABCD$，使得 $AB=a$，$BC=d$. 则在直角三角形 ABC

中，有 $AC=\sqrt{a^2+b^2}$. 并列地构作矩形 $DEFG$，使得 E 在 AD 上，G 在 CD 延长线上，且 $CG=b$，$GF=c$，在直角三角形 CGF 中，有 $CF=\sqrt{b^2+c^2}$. 在直角三角形 AEF 中，有 $AF=\sqrt{(a-b)^2+(c-d)^2}$.

在 $\triangle AFC$ 中，由于 $AF \leqslant AC+CF$，

所以 $\sqrt{(a-b)^2+(c-d)^2} \leqslant \sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}$.

研究练习题 2-6

1. 因为卡片上任一对命题都是矛盾的，所以至多其中之一是真的。假设这些命题中没一个是真的，就推出第四个命题是真的。因此卡片上必定存在恰好一个命题为真。事实上，容易证实第三个命题是真的，第一、二、四个命题是假的。

2. 有一个人说假话，99 个人说真话。因为说假话至少一人，且不能多于一人。如果多于一人，则至少两个人，则这二人中就没有说真话的。与“任意两个人中总有一个说真话的”条件矛盾。所以，说假话者只有一个人，其余 99 个人都说真话。

3. 若李四说真话，张三、王五都说假话。理由是：假设李四说假话，这样“王五在说谎”为假，王五说的应是真话。即“张三和李四都在说谎”是真话。与“李四说假话”的假设矛盾。所以李四说的是真话。易知，张三、王五说的都是假话.

4. 已知“每一个数与商品编号恰好在同一位上有一个相同的数字”，对 874，765，123，364，925 这五个数，就有五次数字相同的机会。

设商品号为 $\overline{abc}$，百位为 a，十位为 b，个位为 c. 将商品号与五个数排个表：

百位上五个数字各不相同，

十位上有两个 6 和两个 2，

个位上有两个 4 和两个 5.

因此，商品号的个位数字 c 一定和给定五个数中的两个的个位数字相同。$c=5$ 或 4.

	百	十	个
商品号	a	b	c
	8	7	4
	7	6	5
	1	2	3
	3	6	4
	9	2	5

商品号的十位数字 b 一定和给定五个数中的两个的十位数字相同。$b=2$ 或 6.

商品号的百位数字一定和给定五个数中的一个的百位数字相同。

若 $c=5$，划去 765，925，还剩下 874，123，364. 剩下的三个数的十位数字各不相同，无法满足两个相同的要求。因此只能 $c=4$.

当 $c=4$ 时，划去 874，364，还剩下 765，123，925. 所剩下的三个数的十位数字仍有两个 2，可取 $b=2$. 再划去 123，925，最后剩下 765，百位为 7，即 $a=7$. 所以商品的编号 $\overline{abc}=724$.

研究练习题 2－7

1. 若 k 是正偶数，则 $\frac{1-(-1)^k}{2}=0$，$k-1$ 是个正奇数，

$(k-1)^{\frac{1-(-1)^k}{2}}=(k-1)^0=1$，所以数 $m=k+(k-1)^{\frac{1-(-1)^k}{2}}$ 是个奇数。

若 k 是大于 1 的奇数，$k-1$ 是个正偶数，$\frac{1-(-1)^k}{2}=1$，

$(k-1)^{\frac{1-(-1)^k}{2}}=(k-1)^1=k-1$ 偶数.

所以，数 $m=k+(k-1)^{\frac{1-(-1)^k}{2}}$ 是个奇数。

2. $5p+7q=29$，若 p、q 均是奇质数，则 $5p+7q=$ 偶数，与 $5p+7q=29$ 不符。所以 p、q 必一个为偶质数 2，一个为奇质数。若 $p=2$，则 $7q=19$，与 q 是整数不符。所以只能 $q=2$. 此时 $p=3$，因此 $p^3+q^3+p+q=3^3+2^3+3+2=18$.

3. 由 1 是方程 $px+5q=97$ 的根，得　$p+5q=97$，显然 p、q 不能同是奇质数，也不能同是偶质数，所以 p、q 中必一个奇质数，一个是偶质数 2. 若 $q=2$，则 $p=97-5\times2=87$ 是个合数，与 p 为质数不符。所以求得，$p=2$，$q=19$，则 $p^2-q=-15$.

4.　由 $(a_1-b_1)+(a_2-b_2)+(a_3-b_3)+(a_4-b_4)+(a_5-b_5)$

$=(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5)-(b_1+b_2+b_3+b_4+b_5)$

$=(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5)-(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5)=0$. 是个偶数。

所以 (a_1-b_1)，(a_2-b_2)，(a_3-b_3)，(a_4-b_4)，(a_5-b_5) 必有一个是偶数，不妨设 (a_1-b_1) 是个偶数，因此 $(a_1-b_1)(a_2-b_2)(a_3-b_3)(a_4-b_4)(a_5-b_5)$ 是偶数。

5.　$\frac{1}{3},\frac{1}{5},\frac{1}{7},\cdots\cdots,\frac{1}{1993},\frac{1}{1995}$ 是 997 个分母为奇数的单位分数。

设 $M=3\times5\times7\times9\times11\times13\times\cdots\cdots\times1993\times1995$ 是个奇数。通分得

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots\cdots+\frac{1}{1993}+\frac{1}{1995}$$

$$=\frac{N_3+N_5+N_7+N_9+\cdots\cdots+N_{1993}+N_{1995}}{M}$$

其中 N_3 是 $\frac{1}{3}$ 变分母为 M 后的分子；

N_5 是 $\frac{1}{5}$ 变分母为 M 后的分子；

……　……　……　……

N_{1995} 是 $\frac{1}{1995}$ 变分母为 M 后的分子。

$N_3,N_5,N_7,\cdots\cdots,N_{1993},N_{1995}$ 中每一个都是 996 个奇数的乘积，都是奇数。而 $N=N_3+N_5+N_7+\cdots\cdots+N_{1993}+N_{1995}$ 是 997 个

奇数的和必为奇数。

设$(M,N)=d$，d是个奇数。则$M=d\times m$，$N=d\times n$，因为N、d都是奇数，可见n必是一个奇数.

6. 若$abcd$为奇数，则a,b,c,d均为奇数，所以$abcd-a$，$abcd-b$，$abcd-c$，$abcd-d$均为偶数，不能等于2011，2913，2015和2017. 若$abcd$为偶数，则a,b,c,d中至少有一个是偶数，不妨设a是偶数，则$abcd-a$是偶数，不能等于2011. 所以不存在整数a,b,c,d，满足题设的方程组。

7. 设这个五位数为$\overline{abcde}$，交换它的数码后所得新的五位数为$\overline{a_1b_1c_1d_1e_1}$，由题意知

$a+b+c+d+e=a_1+b_1+c_1+d_1+e_1$

设小明计算正确，则

$$\begin{array}{rcccccc} & & a & b & c & d & e \\ +) & & a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & e_1 \\ \hline & 1 & 4 & 6 & 2 & 4 & 5 \end{array}$$

易知$e+e_1=15$，$d+d_1=13$，$c+c_1=11$，$b+b_1=15$，$a+a_1=13$.

则$(a+b+c+d+e)+(a_1+b_1+c_1+d_1+e_1)$

$=(a+a_1)+(b+b_1)+(c+c_1)+(d+d_1)+(e+e_1)$

$=13+15+11+13+15=67$是个奇数

然而 $(a+b+c+d+e)+(a_1+b_1+c_1+d_1+e_1)=2(a+b+c+d+e)$是个偶数，矛盾。所以，小明的计算必定有误。

研究练习题2-8

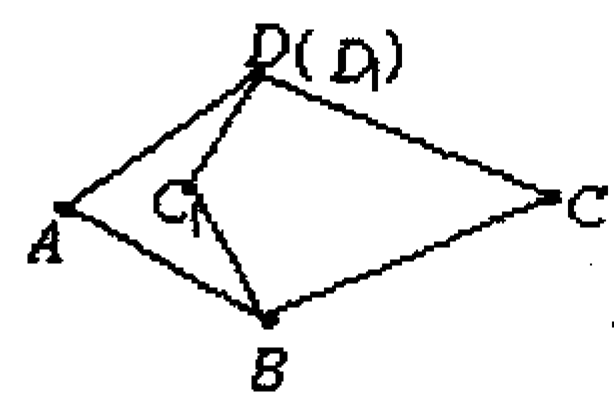
1. $n-2$为所求。

2. 用$2n(n\geqslant 2)$个点表示$2n$个人。如果两人互相认识，就在相应的两点之间连一条边。得图G. 已知对每个顶点都有$d(vc_i)\geqslant n$

若 $G=K_{2n}$，结论显然。如果 $G\neq K_{2n}$，那么有两个不相邻的顶点 v_1,v_2，有 $d(v_1)+d(v_2)\geqslant 2n$. 所以其余 $2n-2$ 个点中必有两个点 v_3,v_4，他们与 v_1,v_2 都相邻。这时 v_1,v_2 相对、v_3,v_4 相对地围圆桌而坐即合要求。

3. 将 $2n(n\geqslant 2)$ 个点分成每部 n 个点，成一个二部图。共连 n^2 条边，则这个二部图中没有三角形。

4. 设 C 是 B 的一个熟人。那么 A 与 C 不相识，A 与 C 除共同的熟人 B 外，还有一个共同的熟人 D. 表明只要 B 有一个除 A 以外的熟人 C，A 就有一个除 B 以外的熟人 D.



会不会出现 B 有一个熟人 C_1，A 与 C_1 还有除 B 以外的共同熟人 D_1 就是 D 呢？我们证明：这种情况不会出现。如果出现这种情况，B 与 D 不相识，但他俩却至少有三个共同的熟人 A，C_1 和 C，与题设条件矛盾！因此 A 的熟人数与 B 的熟人数应相等。

5. 仿本文"六人聚会"题的构想进行证明。

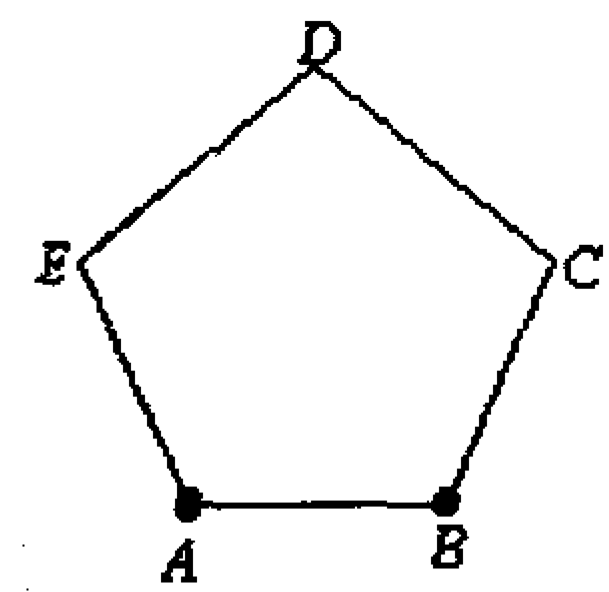
6. 作一个图 G：用 99 个点表示 99 个人。如果两个人不相识就在相应的两点之间连一条边。如果每个人认识的人数大于 66，那么对每个点 v_i 有

$d(v_i)\leqslant 99-1-67=31$. 对于 v_1，取一个与它不相邻的点 v_2 后还剩下 97 个顶点，其中与 v_1 或 v_2 相邻的顶点个数不超过 $d(v_i)+d(v_2)\leqslant 31+31=62$. 因而必有与 v_1 及 v_2 均不相邻的点 v_3，与 v_1,v_2,v_3 中至少有一个相邻的顶点个数不超过

$d(v_1)+d(v_2)+d(v_3)\leqslant 31\times 3=93$，所以在剩下的 96 个点中必有一个点 v_4 与 v_1,v_2,v_3 均不相邻。由于 v_1,v_2,v_3,v_4 互不相邻，所以它们代表的四个人是互相认识的，这四个人愿意在一起打桥牌。

研究练习题 3 - 1

1.　正五边形 5 个顶点染两种颜色，必有 3 点同色，这三个同色点中必有两个相邻。不妨就是 A,B 两点相邻且同色，第三个同色的点无论是 C,D,E 中的哪一个，都与 A,B 构成一个等腰三角形的三个顶点。

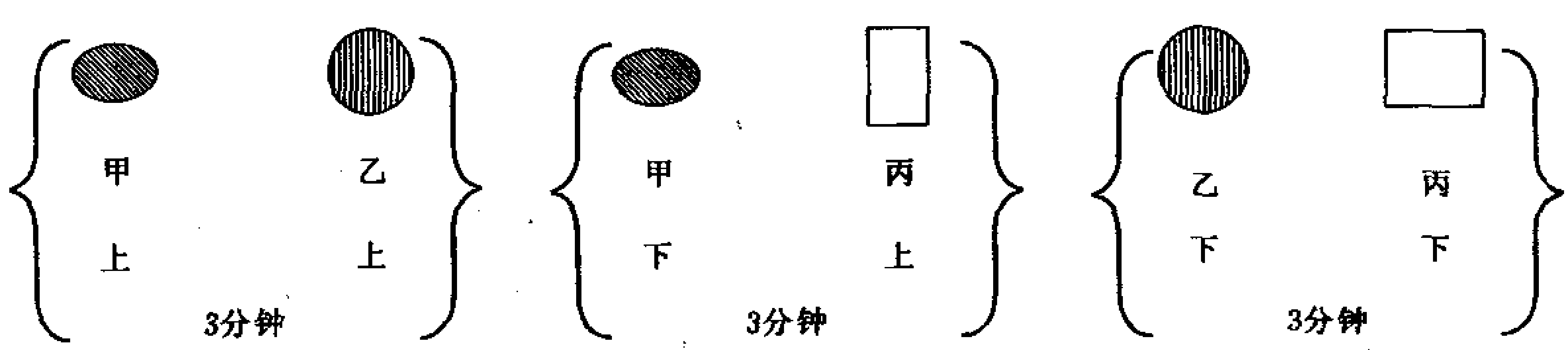


2.　见例 3 的证法 2.

3.　见例 9，当 $p=1$ 时就是本题。

研究练习题 3 - 2

1. 在火炉上烤饼，饼的两面都要烤。每烤完一面需要 3 分钟，炉上只能同时放两个饼。现在需要烤 3 个饼，可如下进行：



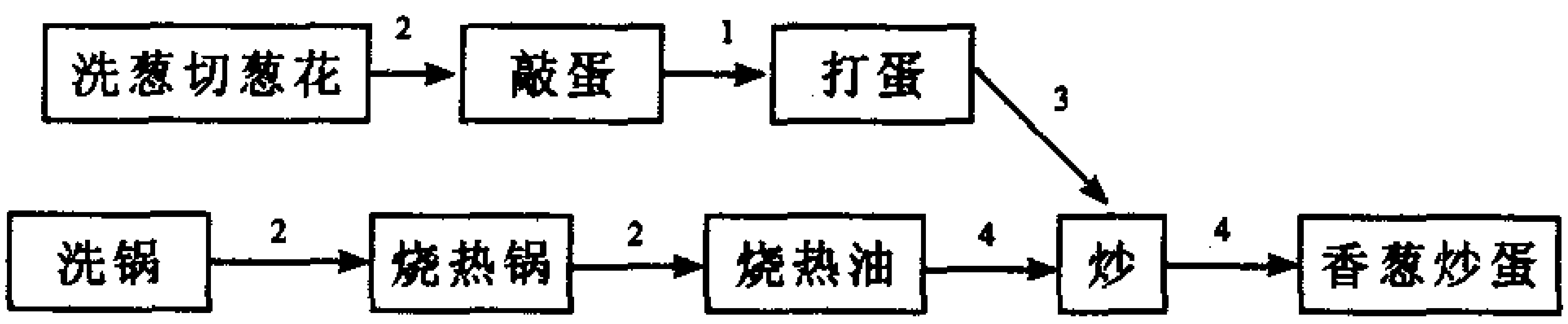
最少需要 9 分钟。

2. 要耗油量最少，尽量多用大卡车，由于 $157=5\times31+2$，可用 31 辆大卡车，一辆小卡车，最少共耗油 $10\times31+5\times1=315$（公升）。

3. 根据“小往大靠”的原则，货物应集中到二号仓库的运费最省。最少要

$(20\times100+40\times300)\times0.5=7000$（元）.

4. 烧好这道菜所需最短时间是 12 分钟。



5. 甲打满水需 20 分钟，乙打满水需 15 分钟，丙打满水需 10 分钟，丁打满水需 5 分钟。要总时间最少，关键在于等的时间最小，因此，打水时间少的先打水，次序为丁、丙、乙、甲，最少的时间为 $4\times5+3\times10+2\times15+1\times20=100$（分钟）.

6. 设甲调运给丙城 x 台，则甲调运给丁城 $8-x$ 台，乙调往丙城 y 台，乙调往丁城 $4-y$ 台，其中 $x+y=5$. 设运费为 W，则

$$W=500\times x+1200\times(8-x)+300\times y+800\times(4-y)$$
$$=500\times(5-y)+1200\times(3+y)+300\times y+800\times(4-y)$$
$$=9300+200y$$

当 $y=0$ 时，W 取最小值 9300 元。这时，甲调运给丙城 5 台，则甲调运给丁城 3 台，乙调往丙城 0 台，乙调往丁城 4 台。

研究练习题 3－3

1. 我们发现，所给 12 张牌中每张牌的点数都是被 4 除余 2 的数。其中任意七张牌点数之和仍是被 4 除余 2 的数，而 52 被 4 整除（余数是 0），所以无论如何从中取的七张牌点数之和都不会等于 52.

2. 不能办到！

理由如下：不同的两个奇数、两个偶数之和都是大于 2 的偶数，它必是合数。所以，要使任意相邻两个运动员号码之和都是质数，这些质数必都是奇数。因此，相邻二运动员号码必定奇偶性相反。

2	3	5
13	11	7
17	19	23

这样一来,运动员必须号码奇偶相间地排成一圈。这表明号码为奇数的运动员与号码为偶数的运动员个数必须相等。因此,运动员总数为偶数个。这与运动员个数是奇数(27)不符。所以题设要求的站圈排列法是不能办到的。

3.　题设要求的操作不能办到。理由如下:表中九个质数之和恰为100,100被3除余1。经过每一次操作,总和增加3的倍数。设m次操作后能使表中各数都相等。此时表中诸数总和为

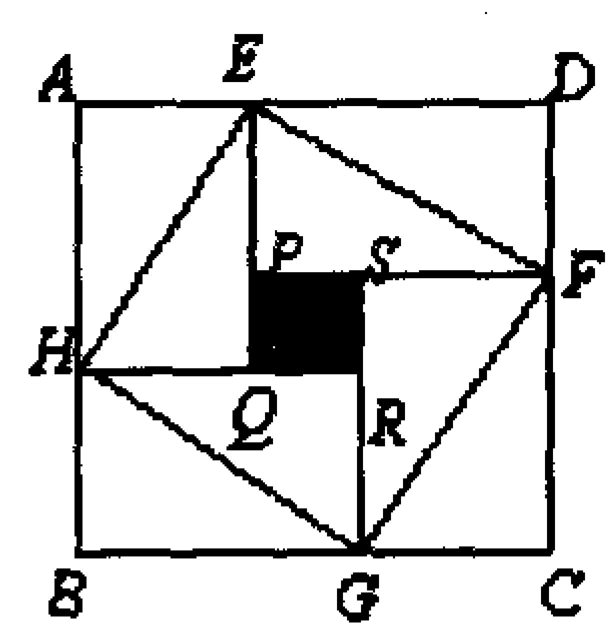
$$100+3(k_1+k_2+\cdots\cdots+k_m)$$

它仍应是个被3除余1的数。但表中九个数变为相等,其总和应被3整除。这就得出了矛盾!

所以,无论经过多少次操作,表中的数都不会变为九个相等的数。

研究练习题3-4

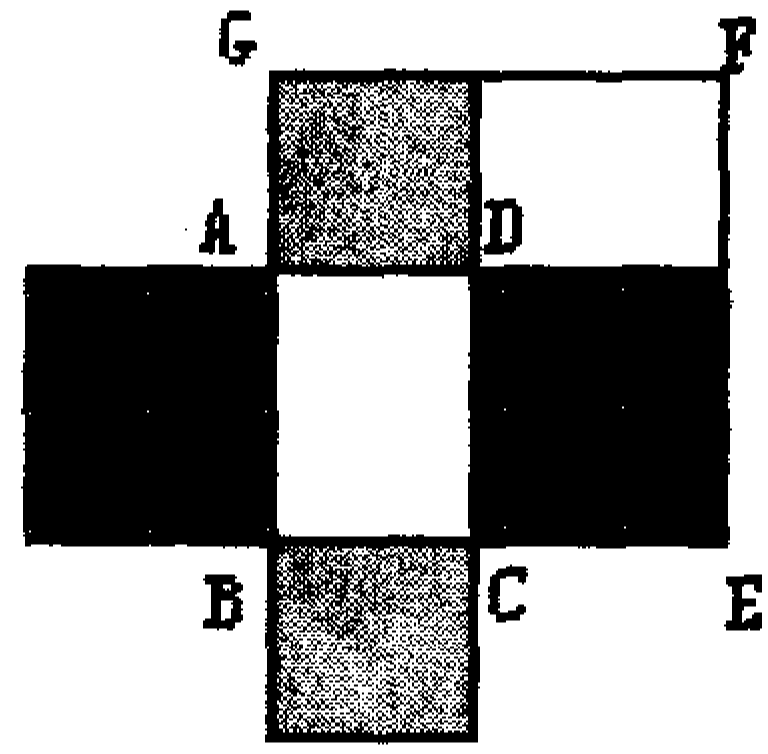
1. 一个直角三角形DEF两个直角边的平方和等于250平方厘米,如图所示,正方形$EFGH$的面积是250平方厘米.正方形$PQRS$的面积是16平方厘米,所以四个直角三角形的面积等于$250-16=234$平方厘米,所以这个直角三角形DEF的面积等于$\frac{234}{4}=58.5$平方厘米。



2. 如图所示,AD等于长方形$DEFP$的长阔和,$AD=92$.正方形$ABCD$的面积为$92^2=8464$,内部的四个长方形面积为$2052\times4=8208$,所以中间的小正方形$PQRS$的面积为$8464-8208=256$,所以长阔差等于16.于是可以计算出长为54厘米,宽为38厘米。

3. 如图将长方形$ABCD$补到图形的右上角,成一个正方形$BEFG$,显然,正方形$BEFG$的边成为8厘米,面积为64平方厘米。

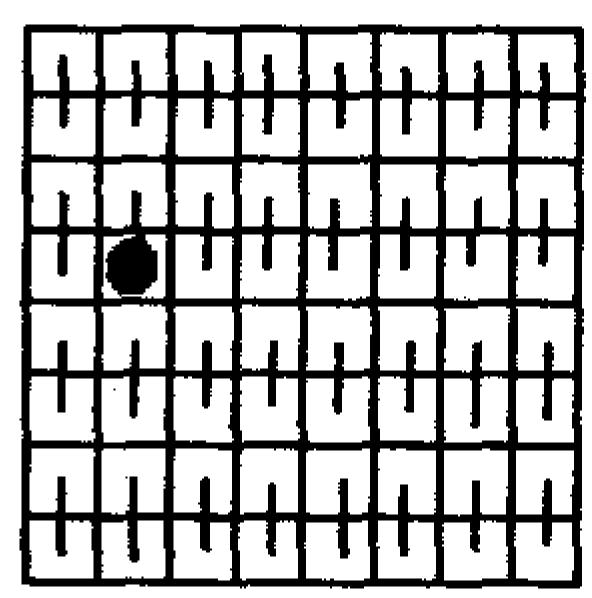
它等于大小两个正方形面积(34 平方厘米)以及两倍的长方形 $ABCD$ 的面积的和。所以两倍的长方形 $ABCD$ 的面积等于 $64-34=30$ 平方厘米。长方形 $ABCD$ 的面积等于 15 平方厘米。



研究练习题 3－5

1. 采用凑 5 法。(1)棋子已经先放到第一格,还剩下 1989 个格。而 1989 除以 5 的余数是 4,所以甲第一步走 4 格,这时还剩 1985 个格,可被 5 整除。甲从第二步开始,不论乙走几格,甲都走(5 － 乙走的格数)个格。如此走下去,乙都走不完最后剩下的 5 个格,甲必胜。(2)由(1)的分析,可知乙第一步走 3 格,以后每步都和甲走的格数凑 5,乙可获胜。

2. 甲先走有必胜策略。在甲的心目中如图所示,将 64 个小方格,用线段连接为 32 个对子。棋子必在一对小方格的一个格子里,甲先走就走到这个对子里的另一个格子里。此时乙只能走到相邻的对子的一个格子里。甲就可以走到另一个格子里。只要乙能走,甲就能走。所以最先无法走的是乙,所以乙必输。



3. 先走者有必胜策略。甲先走,着白子于左下角的小方格里,在甲心目中将剩下的 624 个小方格分成 312 个 1×2 的小矩形。乙置黑子于某个 1×2 的小矩形的一个小方格中,则甲就置白子于另一个小方格里。只要乙有子可放,甲就有子可放。所以最先无法放棋子的是乙,所以乙必输。

研究练习题3－6

1. 仿本节例1可证。
2. 仿本节例2可证。
3. 仿本节例3可证。

研究练习题3－7

1. (1)、(2)、(4)、(6)可以一笔画,(3)、(5)不能一笔画。

2. E点上的蚂蚁先到达D,解法仿例2.

3. 图中只A,D两个奇结点,可以一笔画。一笔画通路起于$A(D)$止于$D(A)$。所以可选A门进D门出,或选D门进A门出。