

## 函数与方程的思想

### 例 1 2016 年全国 III 卷文科第(7)题

已知  $a = 2^{\frac{4}{3}}$ ,  $b = 3^{\frac{2}{3}}$ ,  $c = 25^{\frac{1}{3}}$ , 则

(A)  $b < a < c$

(B)  $a < b < c$

(C)  $b < c < a$

(D)  $c < a < b$

【说明】 本试题给出的三个数  $a, b, c$ , 其底与指数各不相同, 需要考生利用指数运算法则, 将三数两两转化为“指数”或“底数”——“同”——“异”的形式, 方可利用已知的基本初等函数的单调性比较大小. 如思路 1 与思路 2 所示, 由于作为判断两数大小关系的背景函数

数的多样性(如  $y = x^{\frac{1}{3}}$ ,  $y = x^{\frac{2}{3}}$  等), 所以需要考生能够比较清晰地设计解决问题的途径, 识别、选择恰当的数学模型——具体的指数函数、幂函数, 最终推算出正确答案, 不仅着重考查了考生对有关初等函数基本知识的掌握程度以及根据具体问题构造函数的方法, 而且也突出考查了函数的思想.

思路 1 根据指数运算法则, 有

$$a = 2^{\frac{4}{3}} = 16^{\frac{1}{3}}, \quad b = 3^{\frac{2}{3}} = 9^{\frac{1}{3}},$$

由幂函数  $y = x^{\frac{1}{3}}$  为单调递增函数知

$$c = 25^{\frac{1}{3}} > 16^{\frac{1}{3}} = a, \quad a = 16^{\frac{1}{3}} > 9^{\frac{1}{3}} = b,$$

所以, 应选(A).

思路 2 根据指数运算法则, 有

$$a = 2^{\frac{4}{3}} = 4^{\frac{2}{3}}, \quad c = 25^{\frac{1}{3}} = 5^{\frac{2}{3}},$$

由幂函数  $y = x^{\frac{2}{3}}$  为单调递增函数知

$$c = 5^{\frac{2}{3}} > 4^{\frac{2}{3}} = a > 3^{\frac{2}{3}} = b,$$

所以, 应选(A).

### 例 2 2016 年全国 II 卷文科第(20)题

已知函数  $f(x) = (x+1)\ln x - a(x-1)$ .

(I) 当  $a=4$  时, 求曲线  $y=f(x)$  在  $(1, f(1))$  处的切线方程;

(II) 若当  $x \in (1, +\infty)$  时,  $f(x) > 0$ , 求  $a$  的取值范围.

【说明】 试题选取考生熟悉的对数函数为出发点, 第(I)问考查函数求导, 建立切线方程, 问题基本, 要求明确, 面向大部分考生, 考生能够正确应用导数公式和求导法则进行导数运算就可以解决问题. 第(II)问要求根据题设不等式求参数的取值范围, 有一定难度, 需要考生合理构造新函数, 将不等关系转化为函数值域问题, 为考生提供广阔的空间, 对考生运用所学知识寻找合理的运算途径以及推理论证能力提出了较高要求. 试题分步设问, 逐步推进, 考查由浅入深, 重点突出, 从多角度考查了利用导数研究函数性质以及导数的基础知识和解题方法, 考查了化归与转化思想、函数与方程思想和分类讨论的思想方法, 同时对考生的逻辑推理能力、运算求解能力提出较高要求, 层次分明, 区分度高, 使考生个体理性思维的广度和深度以及进一步学习的潜能得到展现.

(I) 先求出  $f'(x)$ , 得到切线斜率, 再列出切线的点斜式方程.

$f(x)$  的定义域为  $(0, +\infty)$ . 当  $a=4$  时,

$$f(x)=(x+1)\ln x-4(x-1),$$

$$f'(x)=\ln x+\frac{1}{x}-3,$$

$$f'(1)=-2, f(1)=0.$$

曲线  $y=f(x)$  在点  $(1, f(1))$  处的切线方程为  $2x+y-2=0$ .

(II) 转化不等式, 引入辅助函数

$$g(x)=\ln x-\frac{a(x-1)}{x+1},$$

求  $g'(x)$ , 分情况讨论确定参数  $a$  的取值范围.

当  $x \in (1, +\infty)$  时,  $f(x) > 0$  等价于

$$\ln x - \frac{a(x-1)}{x+1} > 0.$$

设  $g(x)=\ln x-\frac{a(x-1)}{x+1}$ , 则

$$g'(x)=\frac{1}{x}-\frac{2a}{(x+1)^2}=\frac{x^2+2(1-a)x+1}{x(x+1)^2}, \quad g(1)=0.$$

(i) 当  $a \leq 2$ ,  $x \in (1, +\infty)$  时,

$$x^2 + 2(1-a)x + 1 \geq x^2 - 2x + 1 > 0,$$

故  $g'(x) > 0$ ,  $g(x)$  在  $(1, +\infty)$  单调递增, 因此  $g(x) > 0$ .

(ii) 当  $a > 2$  时, 令  $g'(x) = 0$ , 得

$$x_1 = a-1 - \sqrt{(a-1)^2 - 1}, \quad x_2 = a-1 + \sqrt{(a-1)^2 - 1}.$$

由  $x_2 > 1$  和  $x_1 x_2 = 1$  得  $x_1 < 1$ , 故当  $x \in (1, x_2)$  时,  $g'(x) < 0$ ,  $g(x)$  在  $(1, x_2)$  单调递减, 因此  $g(x) < 0$ .

综上,  $a$  的取值范围是  $(-\infty, 2]$ .